ADAPTACIÓN MACROTIPO
Matemática
2º Medio
TOMO II

Autores

Eduardo Díaz Valenzuela

Natalia Ortiz Solís

Patricio Norambuena Morales

Katherine Morales Valderrama

Manuel Rebolledo Hernández

Editorial SM

Centro de Cartografía Táctil
Universidad Tecnológica Metropolitana
Dieciocho 414
Teléfono: (562) 2787-7392
Santiago de Chile
Año 2021

ÍNDICE

TOMO I

Pág.

Unidad 1

Números 13
Activo lo que sé 17
Lección 1.
Los números reales 23
El conjunto de los irracionales 23
Calcular en $\mathbb{R}$ 32
Estimar en $\mathbb{R}$ 48
Antes de continuar 69
Lección 2.
Potencias y raíces enésimas 73
Raíz enésima 73
Raíces enésimas y potencias
de exponente racional 90
Racionalización 102
Antes de continuar 119

Lección 3.

Logaritmos 124

Definición de logaritmos. 124

Propiedades de los logaritmos 138

Aplicaciones de los logaritmos 156

Antes de continuar. 171

¿Qué aprendí? 178

Síntesis unidad 1 187

Unidad 2

Álgebra y funciones 191

Activo lo que sé 195

Lección 4

Cambio porcentual constante 200

Definición de cambio porcentual . . . 200

Aplicaciones de cambio porcentual . 221

Antes de continuar. 235

Lección 5

Ecuaciones de segundo grado. 241

La ecuación de segundo grado 241
Resolución de una ecuación de segundo grado por factorización 252
Resolución de una ecuación de segundo grado por completación de cuadrados 267
Resolución de una ecuación de segundo grado por fórmula general 281
Antes de continuar 295
Lección 6.
Funciones de segundo grado 302
Función cuadrática 302
Representación de una función cuadrática 311
Variación de parámetros de una función cuadrática 331
Aplicaciones de la función cuadrática 346
Antes de continuar 359

Lección 7.
Función inversa. 363
Definición de la función inversa. . . . 363
Representación de una
función inversa 379
Función inversa de la función
lineal y afín 397
Función inversa de la función
cuadrática 415
Antes de continuar 434
¿Qué aprendí? 439
Síntesis unidad 2 448

TOMO II

Unidad 3

Geometría 447
Activo lo que sé 451
Lección 8
Esfera 457
Definición de esfera. 457
Volumen de la esfera. 469
Área de la superficie de la esfera . . 486
Antes de continuar. 500
Lección 9
Razones trigonométricas 504
Razones trigonométricas en
triangulos rectángulos 504
Aplicaciones de las razones
trigonométricas. 527
Vectores y trigonometría 541

Antes de continuar 564
¿Qué aprendí? 572
Síntesis unidad 3 581

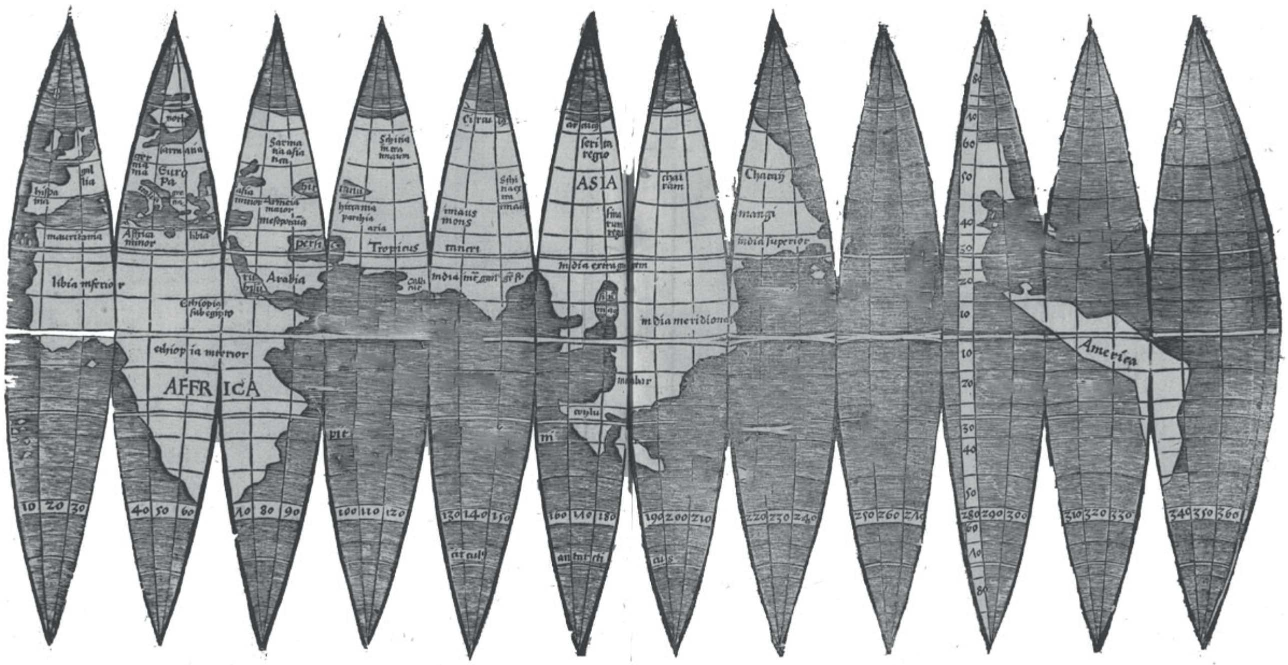
Unidad 4

Probabilidad y estadística 584
Activo lo que sé 590
Lección 10
Técnicas de conteo 596
Principios básicos de conteo 596
Permutaciones 610
Variaciones 621
Combinaciones 630
Aplicaciones 640
Antes de continuar 656
Lección 11
Variable aleatoria 660
Definición de variable aleatoria 660

Probabilidad de una variable
aleatoria 674
Gráfica de la distribución de una función
de probabilidad 691
Antes de continuar 713
Lección 12
Probabilidad en la sociedad 718
La probabilidad en los
medios de comunicación 718
Probabilidad y toma de
decisiones 732
Interpretación de la
probabilidad 745
Antes de continuar 758
¿Qué aprendí? 762
Síntesis unidad 4 769

UNIDAD TRES

GEOMETRÍA



En esta Unidad, aprenderás área de superficie y volumen de una esfera. Además, aprenderás sobre las razones trigonométricas y sus aplicaciones.

1. ¿Qué continentes identificas en los mapas? ¿Qué diferencias existen entre ellos?

2. ¿Por qué crees que Waldseemüller se vio en la necesidad de actualizar el mapa de Ptolomeo? ¿Qué descubrimientos fueron importantes para la época?

En una época en que mucha gente pensaba que la Tierra era plana, Colón estaba convencido de que esta tenía forma esférica. Por ello, se propuso navegar hasta la India dando la vuelta al mundo. Basado en los cálculos de Ptolomeo, presentó su idea a los Reyes Católicos y solicitó su apoyo para realizar ese viaje. Buscando nuevas rutas de comercio, desembarcó en tierras americanas el 12 de octubre de 1492.

El planisferio de Waldseemüller fue el primer mapa en incluir el continente de América, cuyo nombre se debe al explorador Américo Vespucio. Estaba compuesto de 12 hojas que, en conjunto, formaban un mural mapamundi.

3. ¿Qué cuerpo geométrico modelaba la Tierra según Ptolomeo? ¿Cómo se refleja en el de Waldseemüller?

4. ¿Qué elementos geométricos reconoces en el globo terráqueo recortable?

5. En el año 200 a.c, Eratóstenes calculó el radio de la Tierra con un error del 1%. ¿Cómo crees que lo logró? Comenta con tu curso.

Activo lo que sé: Evaluación diagnóstica

1. Calcula lo solicitado en cada caso.

a. El área de 2 círculos si el radio del menor mide 3 cm y el del mayor mide 3 veces ese valor.

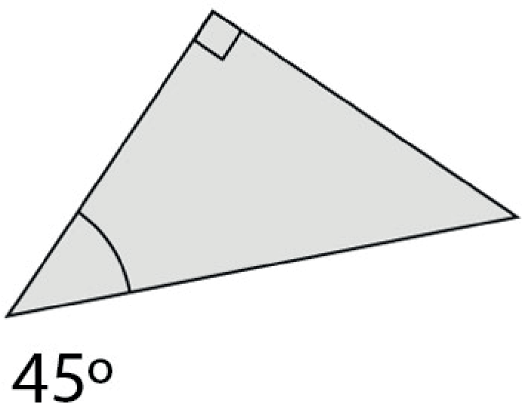
b. La altura de un cilindro (sin considerar base ni tapa) cuya área superficial (o lateral) mide 200π cm^2. Además, el radio de su base mide 5 cm.

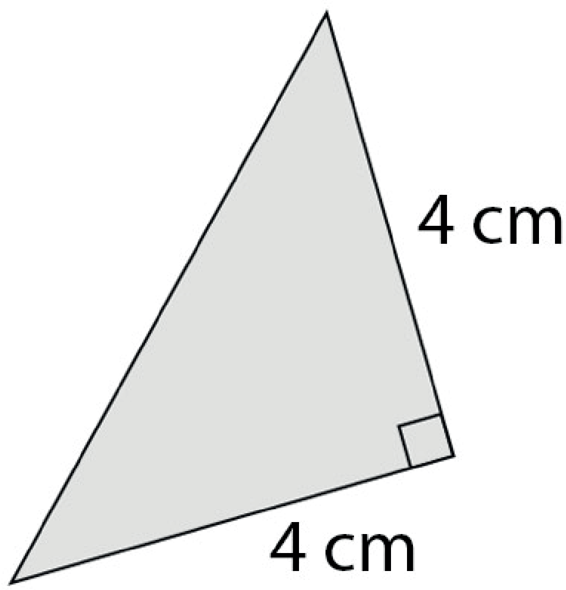
c. El perímetro del sector circular correspondiente a cuatro novenos de un circulo de radio 9 cm.

d. El área de una semicircunferencia de radio 1 cm.

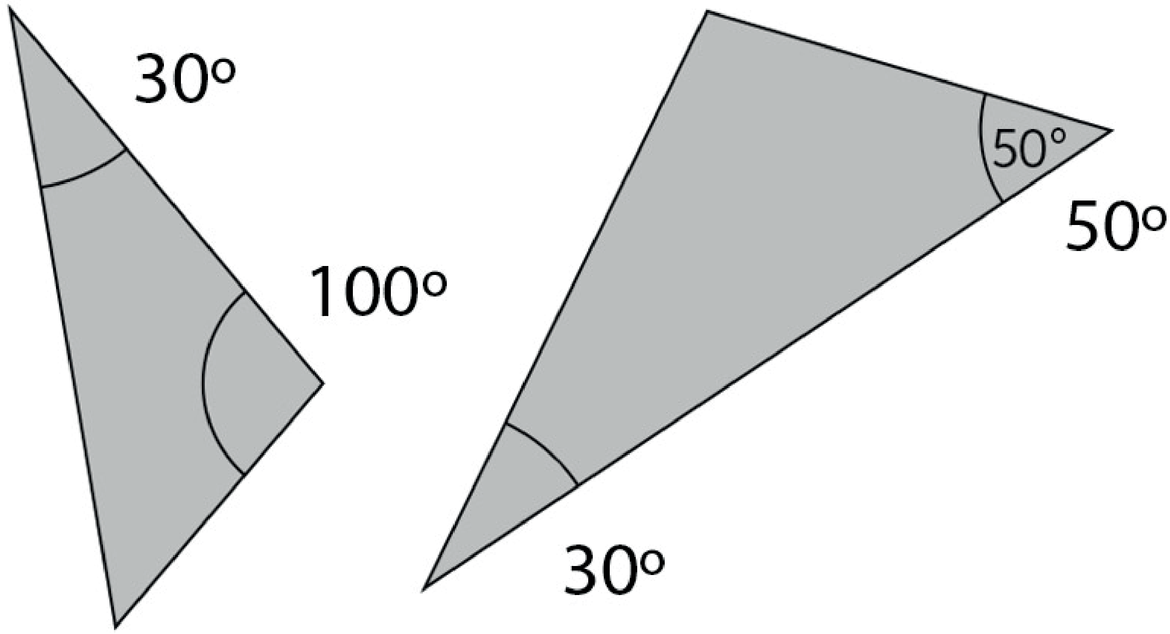
2. Determina si los siguientes pares de triángulos son o no semejantes entre sí.

a.

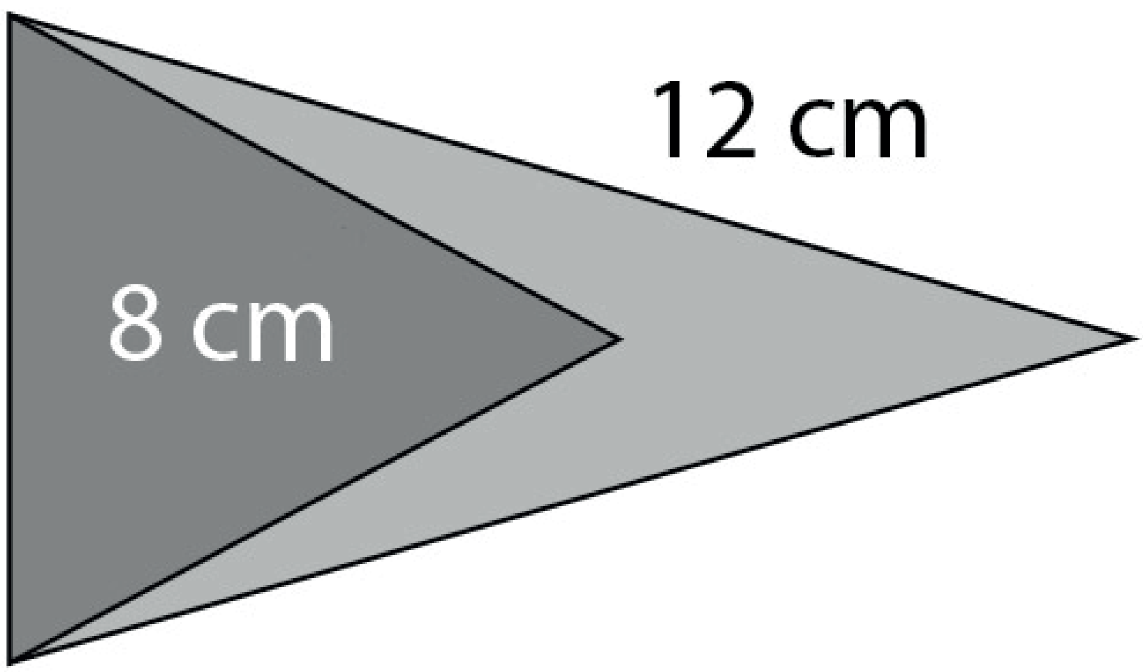




b.

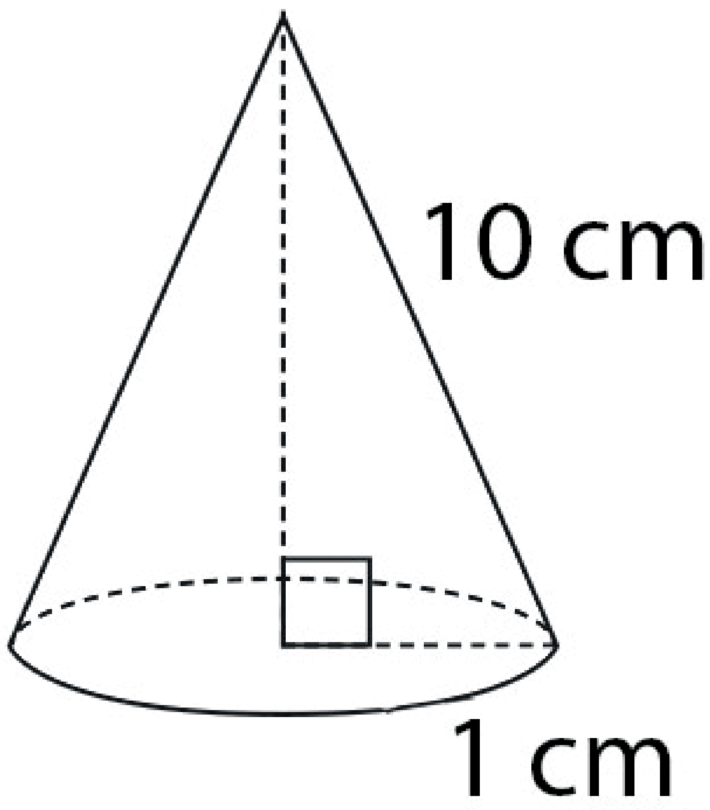


c.



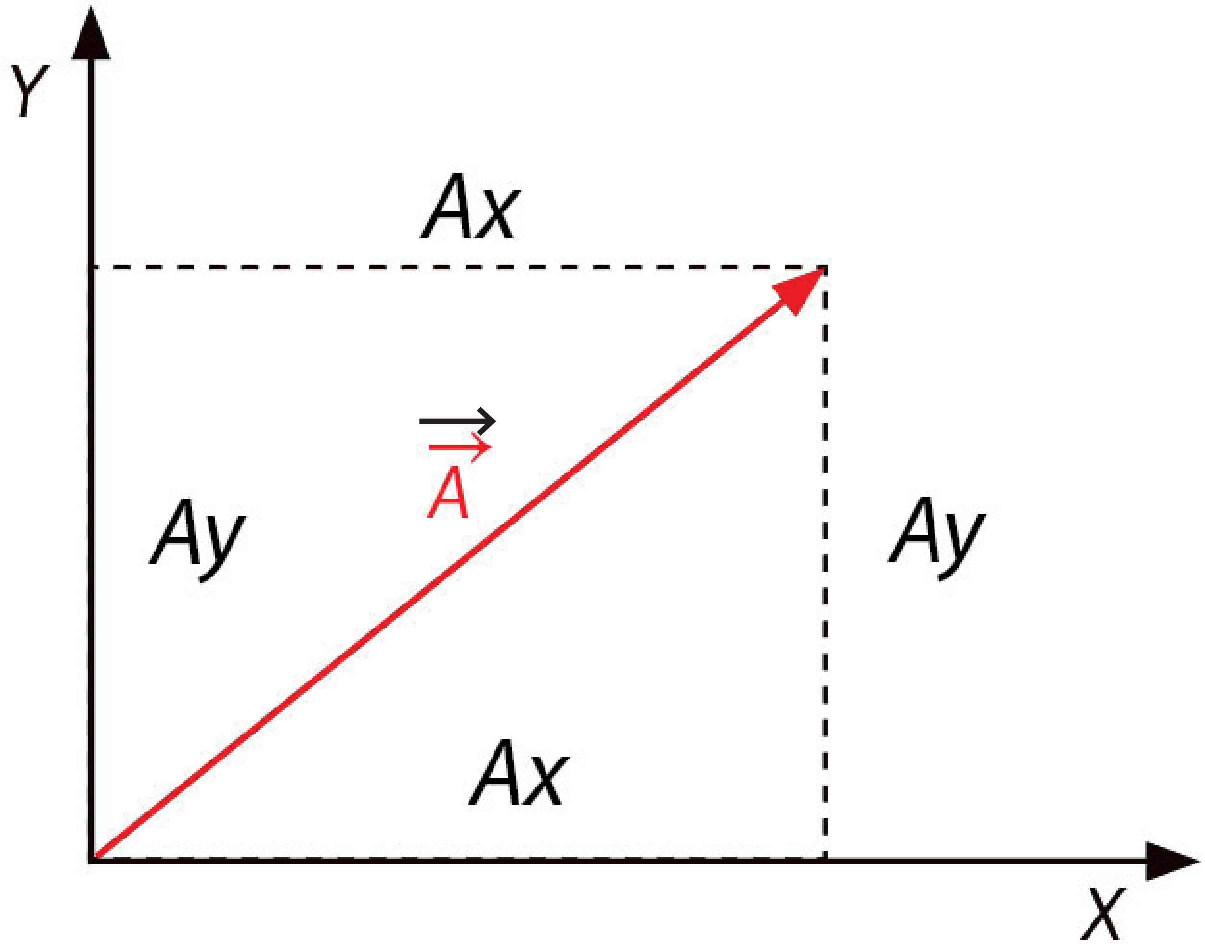
3. Resuelve los siguientes desafíos:

a. Determina el área de la superficie del siguiente cono. Aproxima el resultado utilizando $\pi = 3$.



b. El área basal de un cono es 25π cm^2 y su altura es 13 cm. ¿Cuál es el volumen de un cilindro de igual base y altura?

c. Observa la siguiente figura:



Si el largo de la flecha roja es 10 unidades, ¿podrías determinar los valores de A_x y A_y?

4. Evalúa si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

a. El radio de una circunferencia equivale al doble del diámetro.

b. El diámetro es la mayor cuerda que se puede trazar en una circunferencia.

c. El volumen del cono es el triple del cilindro que tiene la misma base.

▶ Reflexiono

- ¿Lograste realizar todas las actividades sin problemas?

- ¿Te sientes preparado para comenzar esta Unidad?
- ¿Crees que debes reforzar algún contenido? Si es así, ¿cuál?

Lección 8: Esfera

Definición de esfera

¿Qué elementos de tu vida cotidiana tienen forma esférica? ¿Cómo los describirías geométricamente?

¿Qué cuerpos geométricos se generan después de rotar figuras planas?

Objetivos: Identificar la esfera como un cuerpo generado por rotación y relacionarla con objetos cotidianos.

1. Observa las siguientes fotografías:



a. Identifica los objetos que tienen forma esférica o se asemejan a una esfera.

b. ¿Qué característica(s) tienen en común los objetos seleccionados? Explica.

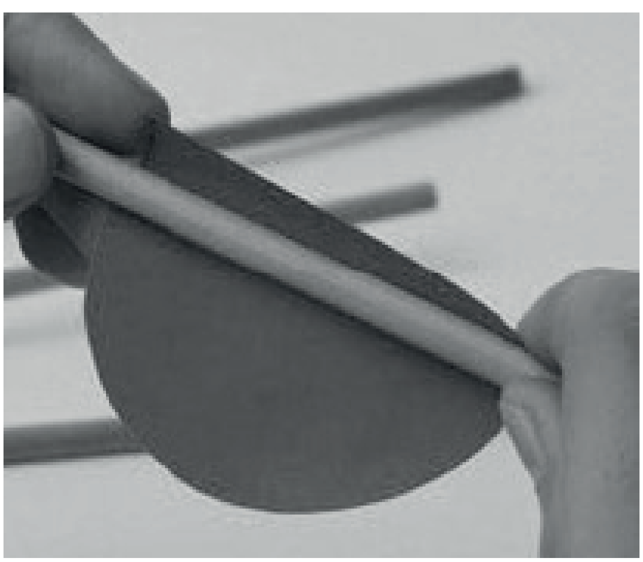
c. ¿A qué cuerpos geométricos se asemejan las figuras que no seleccionaste?

2. En parejas, realicen la siguiente actividad.

Materiales:

- Cartón, cartulina o papel.
- Varilla.
- Tijeras.

Paso 1: Corten una tira de papel o cartulina e inserten los extremos en un lápiz, como se ve en la fotografía, de modo que se forme un semicírculo.



Paso 2: Unan cada figura a una varilla.

Paso 3: Roten la varilla de tal modo que las figuras giren en torno a esta, tal como se muestra en la imagen, y respondan.

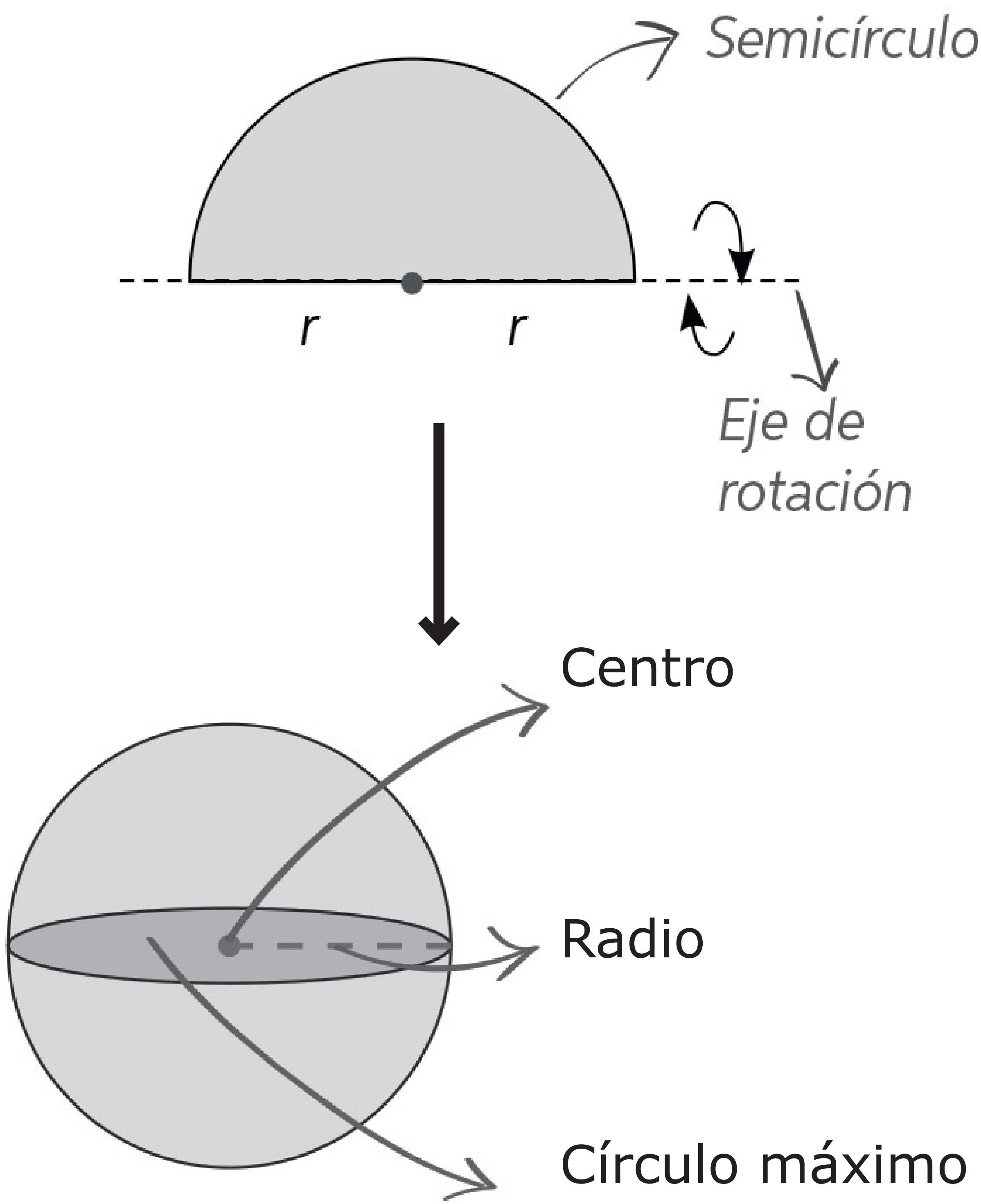
a. ¿Qué figuras 3D observaron al rotar la varilla? Dibújenlas, completando la figura 2D que se utilizó.

b. ¿Cuál de las figuras anteriores corresponde a una esfera?, ¿qué la diferencia de las otras figuras 3D?

¿Qué rol asumió cada uno en esta actividad?, ¿de qué manera se organizaron para realizar cada paso?

La **esfera** es el cuerpo generado al girar un semicírculo en torno a su diámetro.

Observa la figura a continuación:


Semicírculo
r
r
Eje de rotación
Centro
Radio
Círculo máximo

Centro: Punto que se encuentra a igual distancia de todos los puntos que conforman la superficie de la esfera.

Radio: segmento que une el centro de la esfera con cualquier punto de su superficie.

También corresponde al lugar geométrico de todos los puntos del espacio cuya distancia es menor o igual que el valor del radio (*r*) de la esfera.

Una **semiesfera** es cada uno de los dos cuerpos que se obtienen al dividir una esfera en dos partes iguales.

El **círculo máximo** de una esfera corresponde a la base de su semiesfera. Es decir, el círculo máximo y la esfera tienen el mismo radio.

3. Resuelve los siguientes problemas.

d. El radio del círculo máximo de una esfera mide 10 cm. ¿Cuánto mide su diámetro?

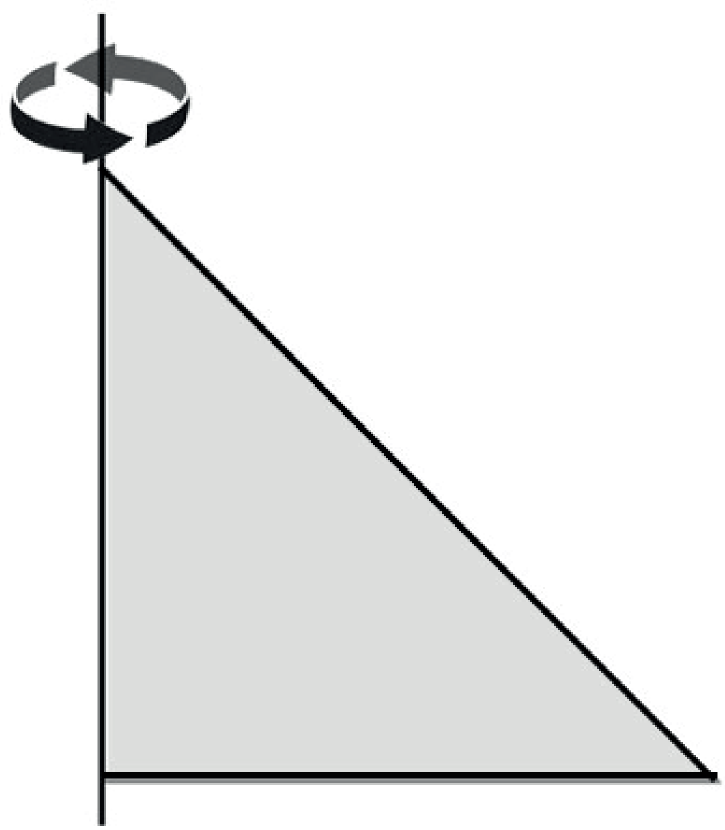
e. El diámetro de una esfera mide 14 cm. ¿Cuál es el área de su círculo máximo?

f. El área de un círculo máximo de una pelota de fútbol es 18π cm^2 ¿Cuánto mide el radio de la pelota?

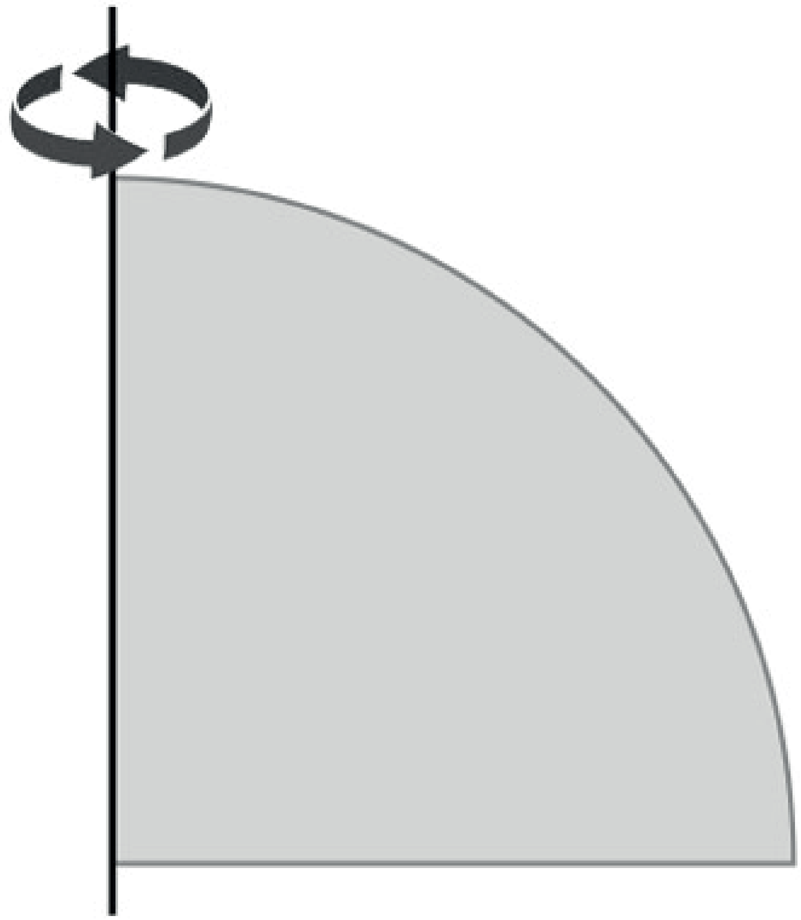
Para comprobar.
gbit.cl/T21M2MP098A

4. Se rotan las siguientes figuras:

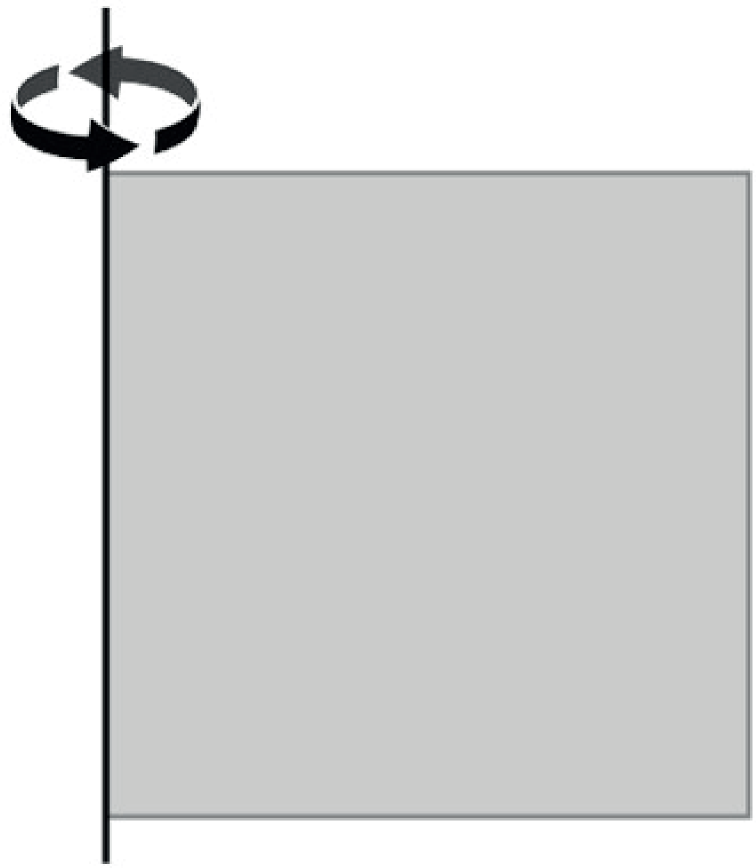
Triángulo rectángulo isósceles con base y altura 5 cm:



Cuarta parte de un círculo de radio 5 cm:



Cuadrado de lado 5 cm:



a. ¿Qué figuras 3D se generan después de rotar las figuras planas?

b. ¿Cuáles son los volúmenes de las figuras 3D generadas por el triángulo y el cuadrado?

c. ¿Se pueden comparar esos volúmenes que calculaste? ¿por qué?

▶ Para concluir:

a. Describe lo que entiendes por una esfera, cono y cilindro. Utiliza un objeto cotidiano e identifica en ellos sus componentes.

b. ¿Tienen un círculo máximo el cono y el cilindro? Comenta en parejas.

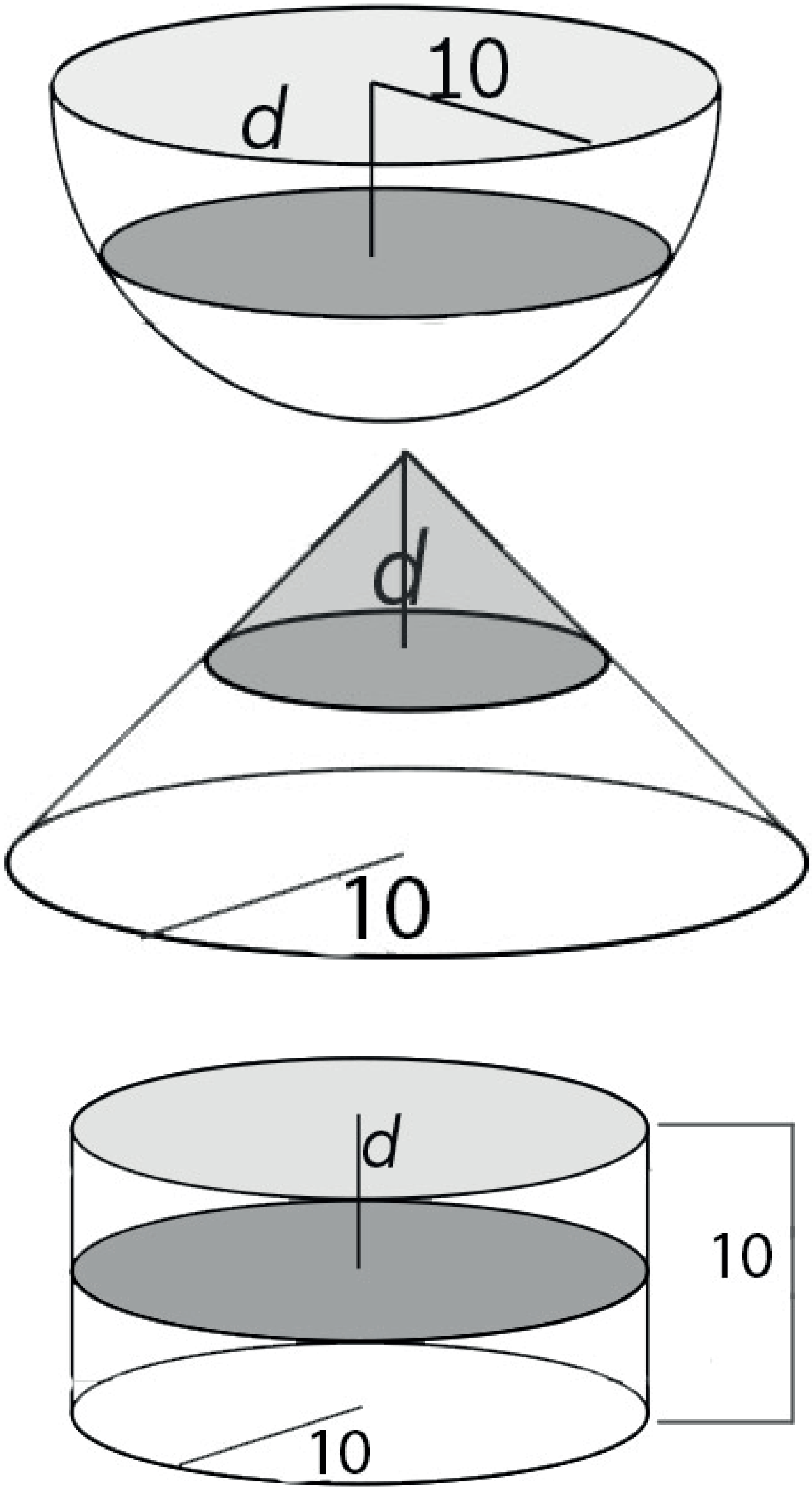
Volumen de la esfera

¿Cuál es el área de un círculo de radio r?

¿Cuál es la fórmula de volumen del cono y del cilindro de radio r y altura h?

Objetivo: Conjeturar la fórmula de volumen de una esfera.

1. Consideremos una semiesfera, un cono y un cilindro todos con radio y altura 10 cm. Luego, realizamos una sección (un corte transversal de una figura tridimensional) como se muestra en la imagen.


10
d
d
10
d
10
10

Para saber más.
gbit.cl/T21M2MP099A

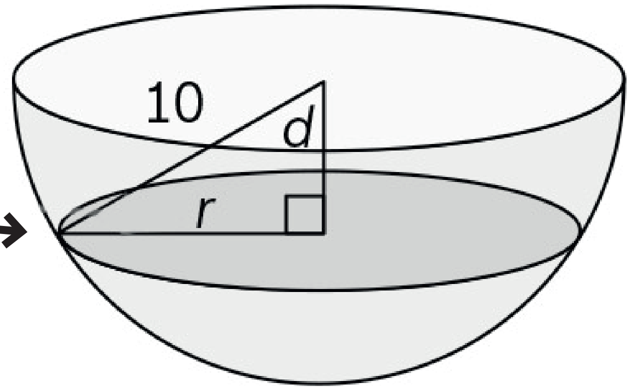
a. ¿Cuál es el volumen total del cono (V_{co}) y el cilindro (V_{ci}) de 10 cm? Recuerda qué

$$V_{co} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \text{ y } V_{ci} = \pi\, r^2 \cdot h$$

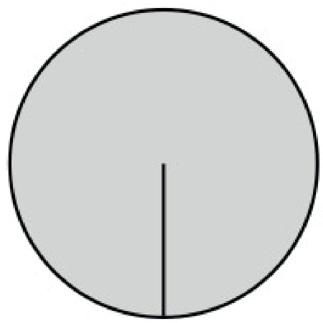
b. La siguiente tabla se obtuvo al realizar seis secciones a diferentes alturas en las figuras anteriores. Complétala en tu cuaderno.

Cuerpo

$$10^2 = r^2 + d^2$$

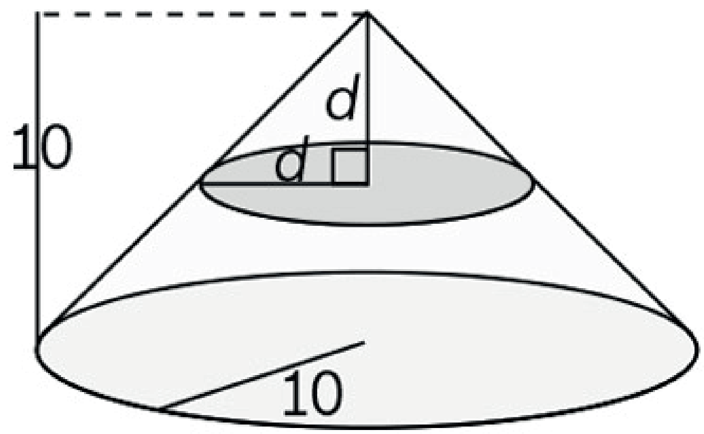


Sección

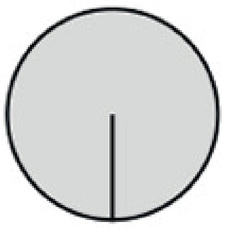


$$r = \sqrt{100 - d^2}$$

Cuerpo

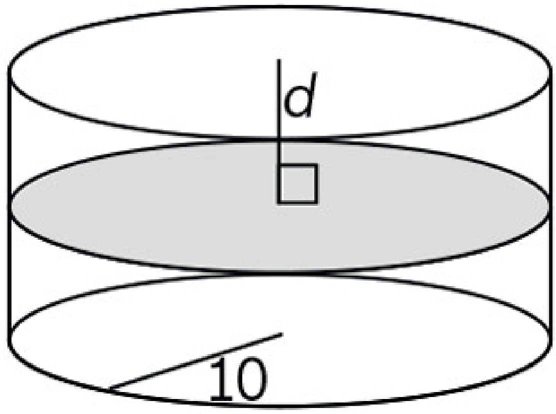


Sección

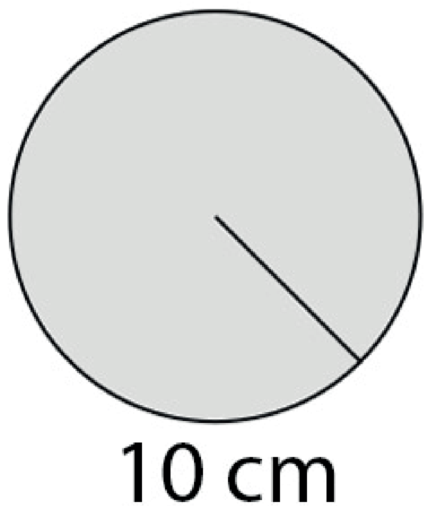


d cm

Cuerpo



Sección



Altura sección	Área sección esfera $A_E = \pi \cdot r^2$	Área sección cono $A_{Co} = \pi \cdot d^2$	Área sección cilindro $A_{Ci} = \pi \cdot 10^2$
d = 2,5	$(100 - 2{,}5^2)\ \pi cm^2$ $93{,}75\ \pi\ cm^2$		$100\ \pi\ cm^2$
d = 5			$100\ \pi\ cm^2$
d = 7,5		$7{,}52\ \pi\ cm^2$ $= 56{,}25\ cm^2$	$100\ \pi\ cm^2$
d = 10	$0\ cm^2$	$100\ \pi\ cm^2$	$100\ \pi\ cm^2$

c. Evalúa y comprueba la siguiente afirmación. Luego, discute con tu curso.

El área de la sección en la semiesfera es igual a la diferencia entre las áreas de las secciones en el cilindro y el cono. Es decir: $A_E = A_{Co} - A_{Ci}$.

Para comprobar.
gbit.cl/T21M2MP099B

d. ¿Qué podrías concluir al apilar todas las secciones de la esfera, cono y cilindro?

Entonces, apilando todas las secciones anteriores, podemos concluir que el volumen de una semiesfera de radio r es:

$$V_{Semiesfera} = V_{cilindro} - V_{Cono}$$

Reemplazando:

$$V_{Semiesfera} = \pi \cdot r^3 - \cdot r^3$$

$$V_{Semiesfera} = \frac{2}{3} \pi \cdot r^3$$

Luego, el volumen (V) de una esfera es el doble de una semiesfera y está dado por:

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$

2. Calcula el volumen de las siguientes esferas:

Por ejemplo, si r = 3 cm:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot (3)^2$$

$$V = 4\pi \cdot (3)^3$$

$$V = 36 \cdot \pi \text{ cm}^3$$

$$V \approx 133{,}04 \text{ cm}^3$$

a. Su radio es:

1,5 cm $\qquad$ $\sqrt[3]{4}$ cm $\qquad$ 0,5cm

b. Sus semiesferas tienen un volumen de:

0,1 cm^3 $\qquad$ $5\sqrt{2}$ cm^3 $\qquad$ πcm^3

c. Su circunferencia máxima tiene diámetro 0,5 cm.

d. Está inscrita en un cubo de arista 10 cm.

e. Su diámetro coincide con la arista de un cubo de volumen 125 cm^3.

f. Calcula el radio de una esfera cuyo volumen mide 124 m^3.

3. Determina el radio con cada volumen dado.

a.

$V = 2,198 \cdot 10^{10}\ km^3$

b.

V = 392, 5 cm^3

c.

V = 0, 008 m^3

4. La Géode es un gigantesco cine con forma de esfera situado en París. Calcula su volumen.

El diámetro es 36 m

Utiliza π = *3,14 para realizar una aproximación.*

480

Astronomía

5. Los cuerpos celestes no son exactamente esferas, pero su forma puede ser aproximada a una.

a. Calcula el volumen de cada uno según su radio aproximado:

Cuerpo celeste	Tierra	Sol
Radio (km)	6 371 km	696 340 km

b. ¿Cuál es la razón entre los radios del Sol y la Tierra? ¿Y el volumen?

c. ¿Cuántas Tierras son necesarias para rellenar un Sol? Aproxima el resultado.

6. La medida del radio de una esfera es la mitad de la del radio de otra esfera. ¿Cuál es la razón entre el volumen de la esfera mayor y la menor?

7. Una esfera se inscribe en un cubo de arista n. ¿Cuál es la diferencia entre el volumen del cubo y el volumen de la esfera?

8. Se moldean cuatro objetos cilíndricos de arcilla, cuyo radio y altura miden ambos 9 cm.

Luego, se decide construir con la misma arcilla tres esferas de radio 9 cm.

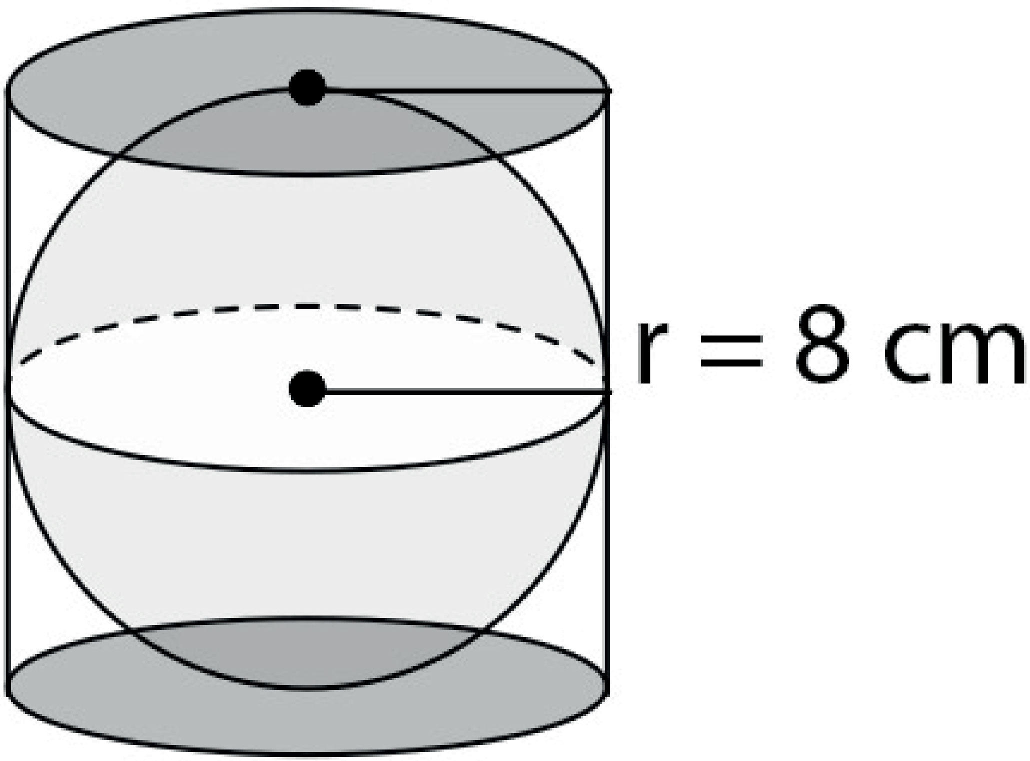
a. ¿Alcanzará la arcilla disponible para construir las tres esferas? Justifica tu respuesta.

b. ¿Cuántas esferas de diámetro 6 cm se podrían fabricar el material disponible?

9. Dos importantes construcciones del mundo tienen forma esférica: el Globo de Ericsson (Suecia) y el Centro Cultural Tijuana (México). ¿Cuál es el volumen de cada construcción? Escribe los resultados en función de π.

Construcción	Radio
Globo de Ericsson	55 m
Centro Cultural Tijuana	13 m

10. Una esfera está inscrita en un cilindro de altura h, como se muestra en la figura.



a. Calcula el volumen de la esfera.

b. Calcula el volumen del cilindro.

c. Entre el cilindro y la esfera.

Para concluir

a. Si el diámetro de la esfera aumenta al quíntuple, ¿en cuánto aumenta su volumen?

b. Se tiene una esfera de radio 36 cm y un cono y un cilindro de radio basal y altura también de 36 cm. ¿Cuál es la razón entre el volumen de cada cuerpo?

Área de la superficie de la esfera.

¿Qué es una red de construcción de cuerpos geométricos?

¿Qué es el área basal de una figura geométrica?

Objetivo: Calcular el área de la superficie de la esfera.

1. En parejas, realicen la siguiente actividad:

Materiales:

- Pomelo, naranja, mandarina o clementina, lo más esférica posible.
- Compás.
- Hojas en blanco.

Paso 1: Pongan la naranja sobre una hoja y dibujen su círculo máximo (lo más exacto posible). A continuación, copien cinco veces el círculo.

Paso 2: Pelen la naranja por completo y guarden la cáscara. Es parte importante del experimento.

Paso 3: Ubiquen los trozos de cáscara al interior de los círculos, como si se tratara de un rompecabezas. Traten de ser lo más exactos posible para que no quede ningún espacio. De ser necesario, córtenlos en trozos más pequeños.

Responde a partir de los resultados.

a. ¿Cuántos círculos se llenaron con las cáscaras?

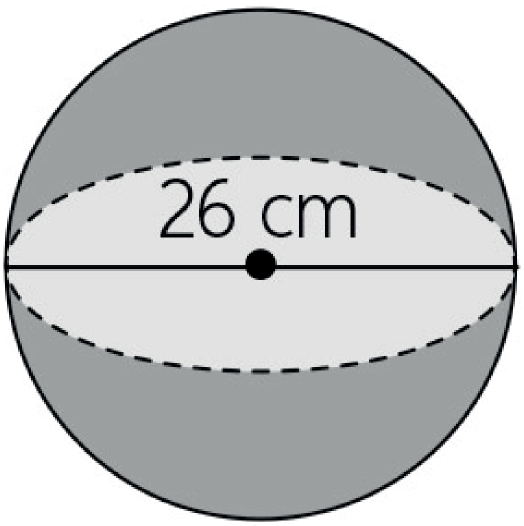
b. Si el tamaño de la naranja hubiera sido otro, ¿la cantidad de círculos rellenos de cáscara hubiera variado? Justifica.

c. Compara tus resultados con tu curso. ¿Qué relación se puede establecer entre el área de la cáscara de la naranja y el área de su círculo máximo?

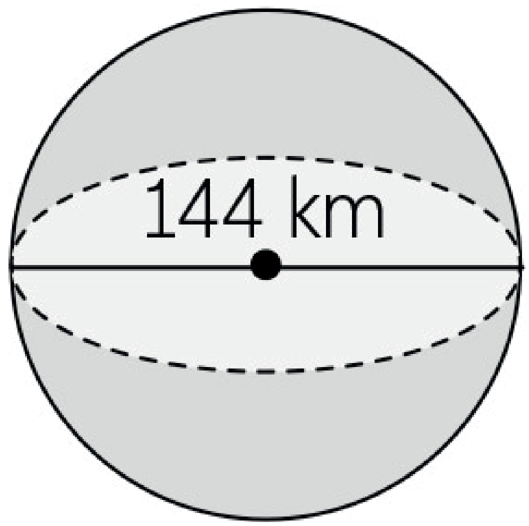
La fórmula para calcular el área de la superficie de una esfera (A) corresponde a: $A = \pi r^2$

2. Dado el diámetro de cada esfera, calcula el área de su superficie (A):

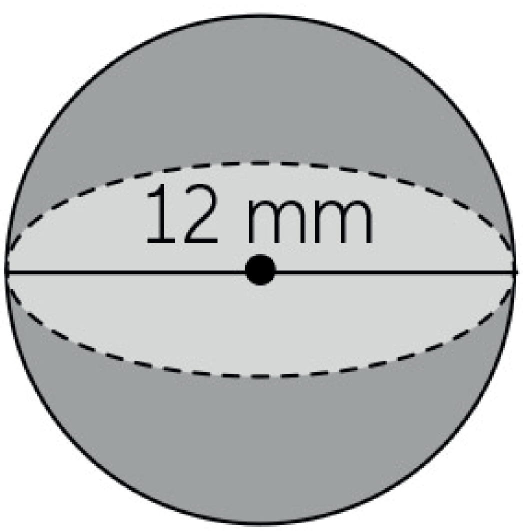
a.



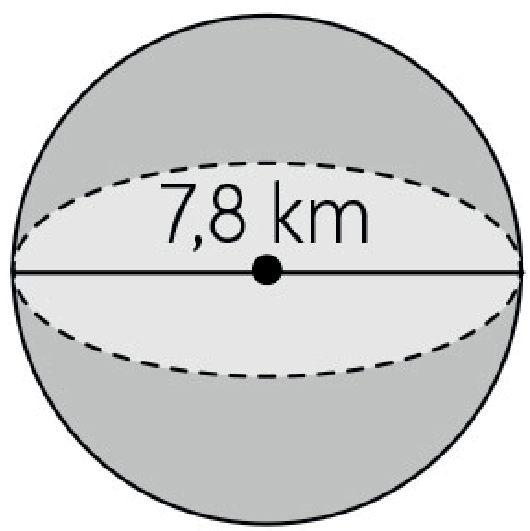
b.

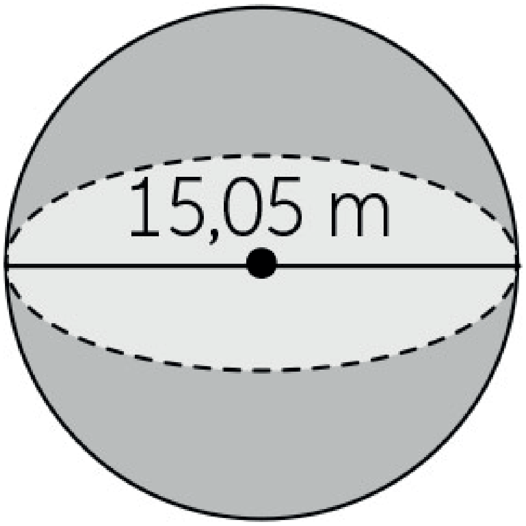


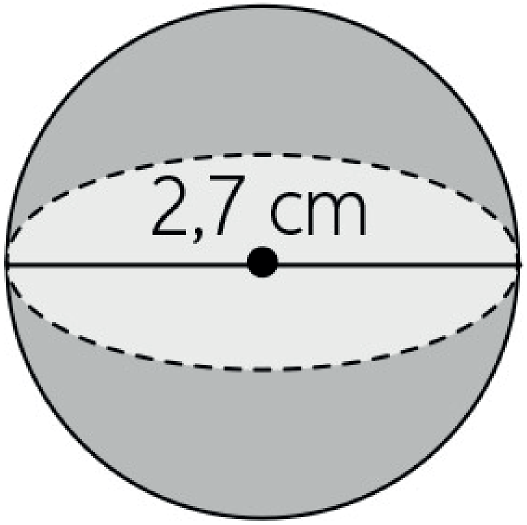
c.



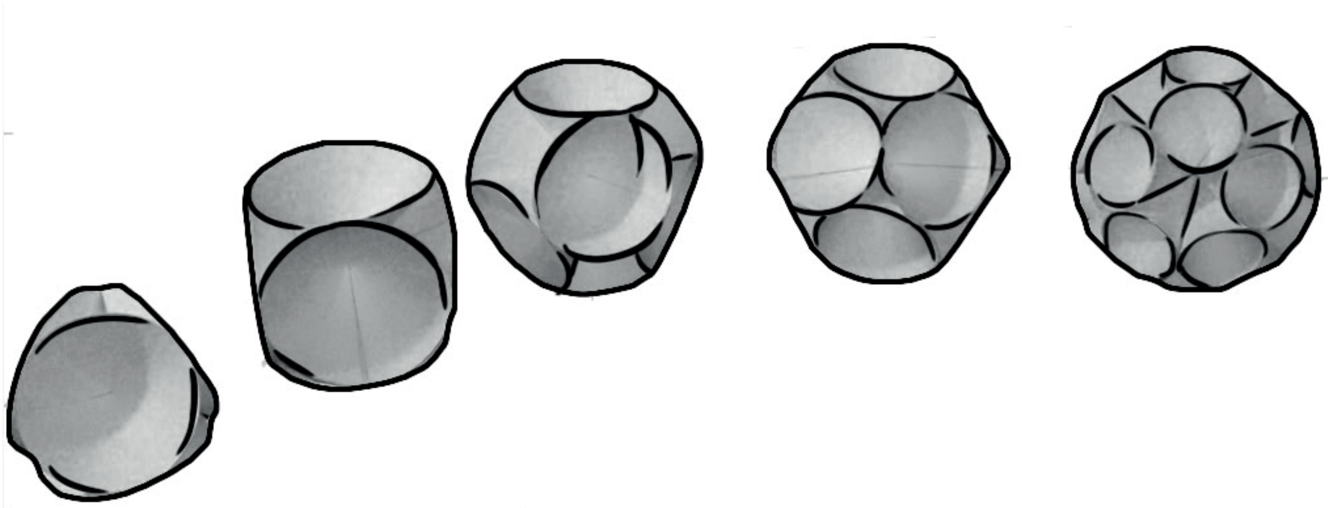
d.



e. 

f. 

Analiza la siguiente secuencia de figuras construidas con conos de papel.



a. ¿A qué figura se asemejan a medida que aumenta la cantidad de conos en ellas?

b. ¿Qué ocurre con el radio de la base de cada cono a medida que aumenta la cantidad de conos en las figuras?

c. Añadimos dos figuras a la secuencia, una compuesta por 100 conos y otra con 120. ¿A qué figura se asemejan? ¿Cuál de ella se asemeja más a dicha figura? ¿Qué ocurre con el radio basal de cada uno de los conos de las figuras?

d. Analiza la siguiente demostración y explica por qué el valor de n debe ser muy grande para que la igualdad sea cierta.

Aproximamos el volumen de una esfera mediante **n** conos de la siguiente forma:

Buscamos aproximar el área de la superficie de la esfera sumando las áreas basales de n conos cuyas cúspides se unen en un solo punto.

$$n \cdot V_c \approx V_e$$

Se remplazan las fórmulas:

$$n \cdot \frac{A_b\ h_c}{3} \approx \frac{4\pi r^3}{3}$$

Reemplazamos la altura del cono por *r*:

$$n \cdot \frac{A_b\ r}{3} \approx \frac{4\pi r^3}{3}$$

Se simplifican.

$$n \cdot A_b \approx 4\pi\ r^2$$

Finalmente, cuando se completa la esfera con muchos conos de área basal extremadamente pequeña, la superficie de sus bases se aproximará al área de la esfera:

$$A = 4\pi\ r^2$$

4. Discute con tu curso sobre la veracidad de las siguientes afirmaciones. Puedes usar las figuras del ítem anterior como referencia.

a. Mientras más conos conformen la figura, la suma de sus volúmenes más se aproxima al de la esfera.

b. Mientras mayor sea la cantidad de conos, estos tendrán un radio basal más grande.

c. Mientras menos conos conformen la esfera, la altura de ellos es cada vez más cercana al radio de la esfera.

d. Mientras menor sea la cantidad de conos, la figura más se asemeja a una esfera.

¿Cómo relacionarías el área de la superficie de una esfera y los resultados del experimento con la naranja?

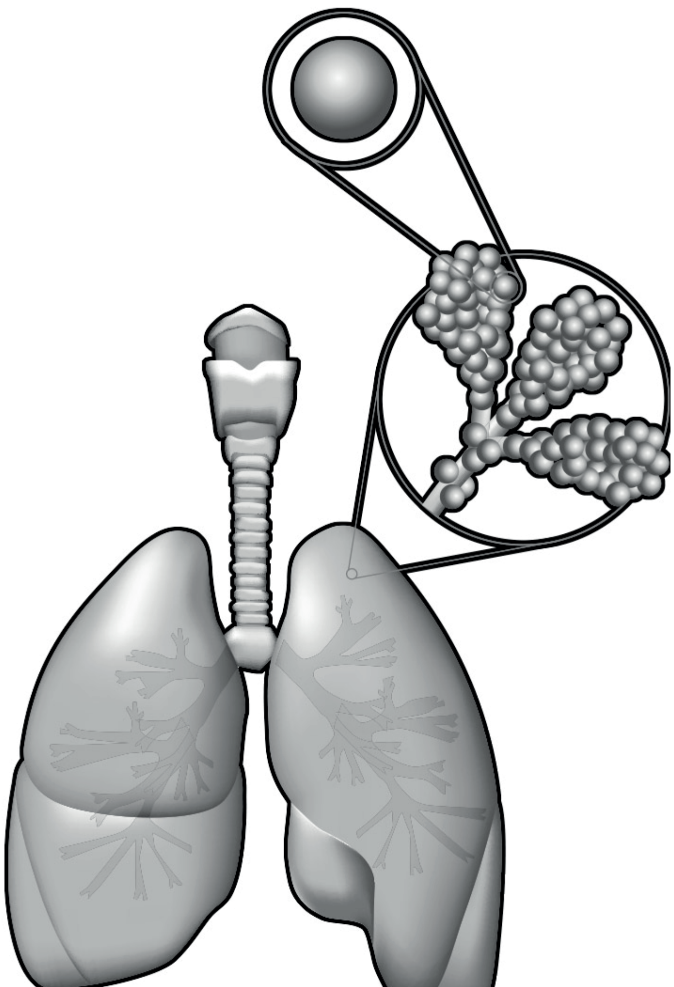
5. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla de valores:

Área de la superficie de la esfera (cm^2)	Área del círculo máximo (cm^2)	Radio (cm)
$324\ \pi$		
	$64\ \pi$	
$484\ \pi$		
		12
	$36\ \pi$	
		17,5

Medicina

6. Los pulmones adultos están compuestos por cerca de 400.000.000 alveolos. Estos se encargan de oxigenar la sangre y eliminar el dióxido de carbono. El diámetro de cada uno es aproximadamente 0,2 mm.

Los alveolos se asemejan a una esfera.



a. Expresen la cantidad de alveolos en un pulmón y su radio en cm utilizando notación científica.

b. ¿Cuál es el volumen aproximado de los alveolos? ¿Qué referencia podrías utilizar para caracterizar el volumen total? (1 litro = 0,001 m^3)

c. ¿Cuál es la superficie total de los alveolos? ¿Qué referencia podrías utilizar para caracterizar su superficie total?

¿Cómo explicarías que objetos tan pequeños tengan un área tan grande?

▶ Actividades de Profundización

Arquitectura

7. En los domos geodésicos se utilizan triángulos isósceles para construir con una forma similar a una semiesfera.

   Se quiere determinar la cantidad de material necesario para cubrir el piso y las paredes de un domo. Este se asemeja a una semiesfera compuesta por 60 triángulos isósceles y su base es aproximadamente una circunferencia de radio 1 m.

a. Si el domo fuera una semiesfera, ¿cuál sería su área?

b. ¿Cuál es el área de cada triángulo?

c. ¿Cuánto material estimarías necesario para construir el domo?

▶ Para concluir

a. El área de una esfera aumenta al doble. ¿Qué sucede con el área de su círculo máximo?

b. Un observatorio tiene la forma de un cilindro con una semiesfera en su parte superior. ¿Por qué crees que se construyen con esa forma?

Antes de continuar: Evaluación intermedia

Confirmando el volumen de una esfera

Materiales:

- Jarro graduado para medir líquidos.
- Distintas esferas que quepan en el jarro (juguetes, frutas, etc.).
- Pie de metro o regla.

Para esta actividad trabajarán en grupos de 3 personas.

Paso 1: Seleccionen una esfera y midan su diámetro. Con ello, calculen su volumen (en cm^3).

Paso 2: En un jarro graduado coloquen agua. Cuiden que el jarro no se rebalse cuando sumerjan completamente la esfera que están utilizando.

El **principio de Arquímedes** permite medir volúmenes de forma muy sencilla: "Cuando sumerges un cuerpo en un líquido, el volumen del líquido desplazado (cuánto “sube” el líquido) es igual al volumen del objeto sumergido".

Paso 3: Sumerjan la esfera seleccionada, y registren cuánto subió el nivel del agua. Si es necesario, transformen las unidades para que sean las mismas que las del volumen calculado en el Paso 1.

Paso 4: Repitan el proceso con otras esferas.

a. ¿Cuál es la diferencia entre el valor medido en el paso 1 y el valor calculado en el paso 3? ¿A qué se debe? Argumenten.

b. Calculen el radio aproximado utilizando el volumen que obtuvieron en el paso 3. ¿Es mayor o menor la diferencia porcentual de la que se obtuvo al comparar volúmenes? ¿A qué se debe?

c. ¿A qué se debe que algunos cuerpos floten y otros no? Investiga.

▶ Reflexiono

a. Mis compañeros, ¿participaron de manera proactiva, valorando el trabajo propio y del equipo?

b. ¿Tuvieron una actitud positiva en la búsqueda de soluciones?

Lección 9: Razones trigonométricas

Razones trigonométricas en triángulos rectángulos.

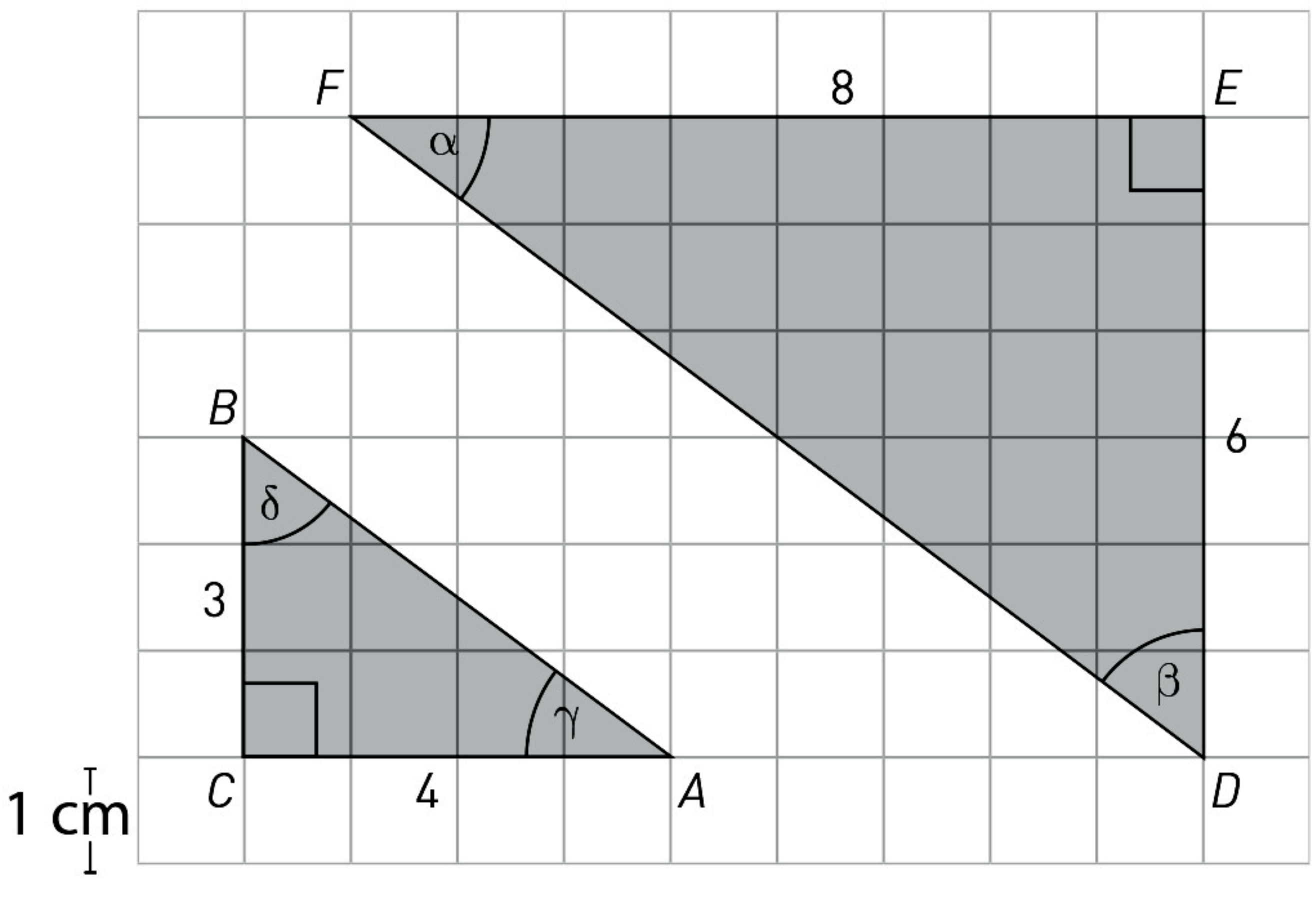
En un triángulo rectángulo, ¿cómo diferencias la hipotenusa de los catetos?

¿Todos los triángulos rectángulos son semejantes?, ¿por qué?

Objetivo: Comprender las razones trigonométricas en los triángulos rectángulos.

1. Para esta actividad necesitarás una hoja de block, tijeras y una regla.

Paso 1: En la hoja de block dibuja dos triángulos rectángulos. El primero debe tener sus catetos de medida 6 y 8 cm. Los catetos del segundo triángulo deben medir 3 y 4 centímetros.



Paso 2: Recorta ambos triángulos y marca en ellos las medidas, tal como aparecen en la imagen.

Compara los triángulos superponiéndolos en diferentes posiciones. Luego, responde:

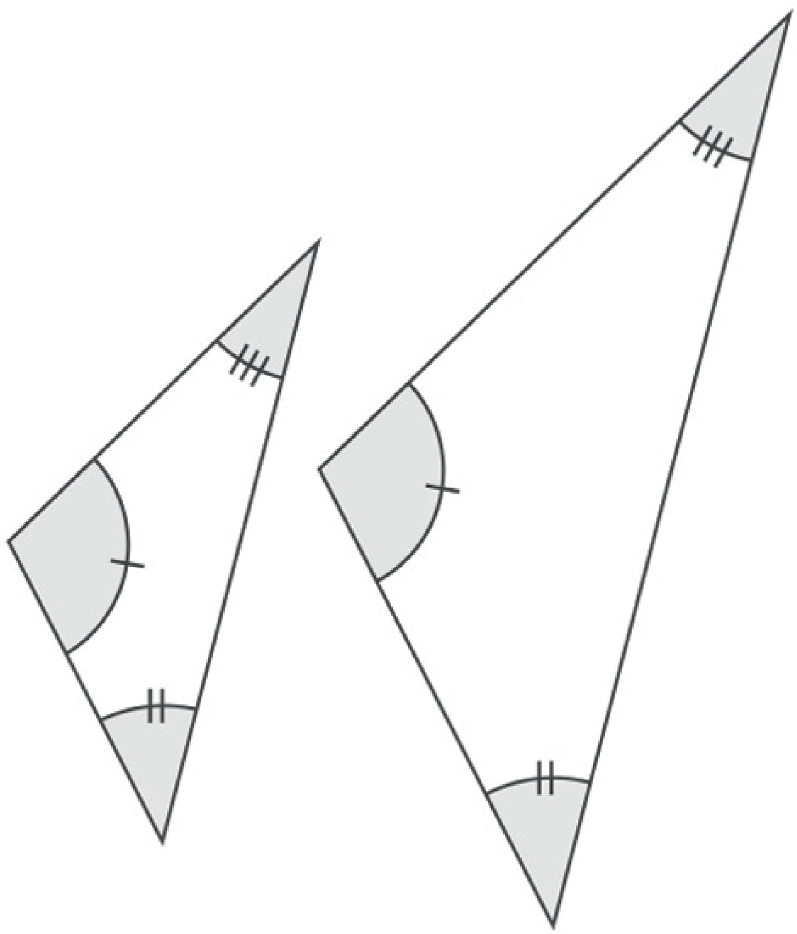
a. Calcula la medida de la hipotenusa de cada triángulo. Luego, comprueba con una regla.

b. ¿Podrías establecer que los triángulos construidos son semejantes?, ¿por qué?

c. Calcula el valor de las siguientes razones:

- $\frac{CB}{AB}$
- $\frac{AC}{AB}$
- $\frac{AC}{BC}$
- $\frac{DE}{DF}$
- $\frac{EF}{DF}$
- $\frac{EF}{ED}$

Recuerda: Criterio AA (ángulo-ángulo) dos triángulos son semejantes si dos de sus ángulos interiores son congruentes.



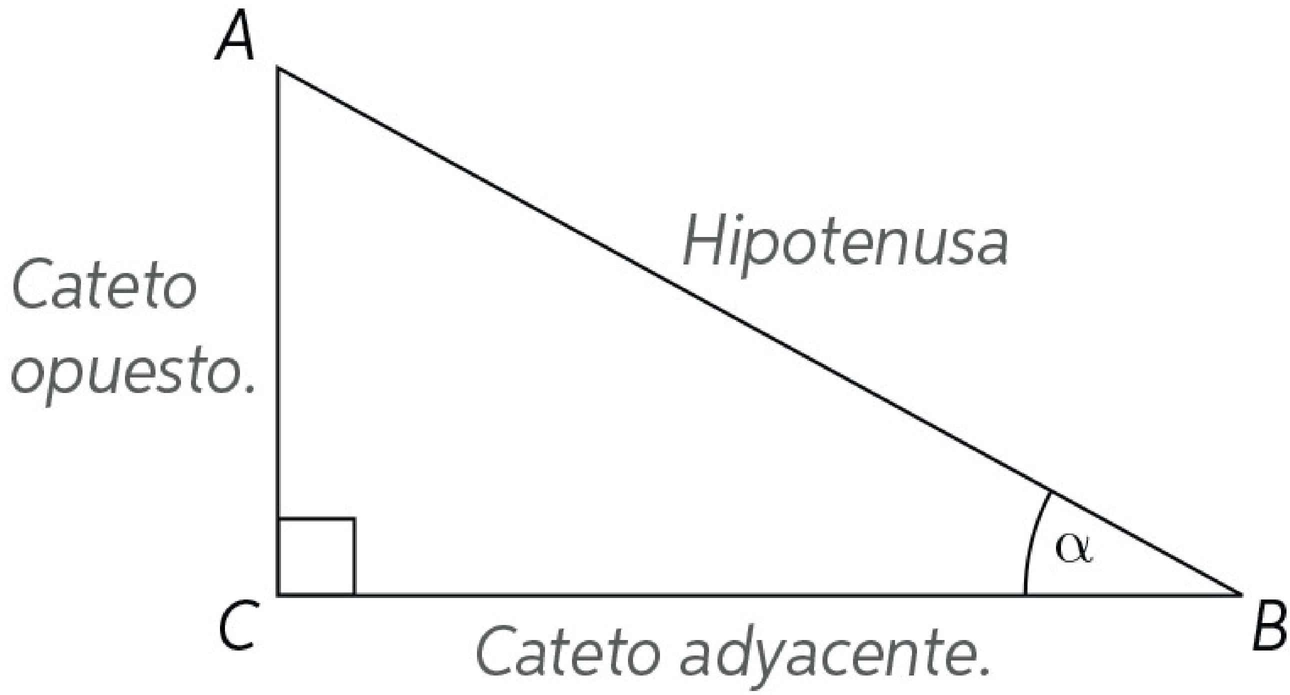
d. ¿Qué relación existe entre las razones anteriores?

e. Si los lados del triángulo ABC se amplifican por 2, ¿qué sucede con los ángulos del triángulo? ¿Y con las razones entre los lados de los triángulos?

Por criterio de semejanza ángulo - ángulo, las razones entre los lados de un triángulo rectángulo no dependen del tamaño del triángulo, sino de sus ángulos.

Considera que estas razones son siempre las mismas y que cada ángulo tiene un cateto adyacente y un cateto opuesto a él. Entonces, para α por ejemplo, se las puede definir de la siguiente manera:

Se lee	Se escribe	Se calcula	Ejemplo
Seno de α	sen(α)	$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{AC}{AB}$
Coseno de α	cos (α)	$\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$	$\frac{CB}{AB}$
Tangente de α	tg(α) o tan(α)	$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$	$\frac{AC}{CB}$

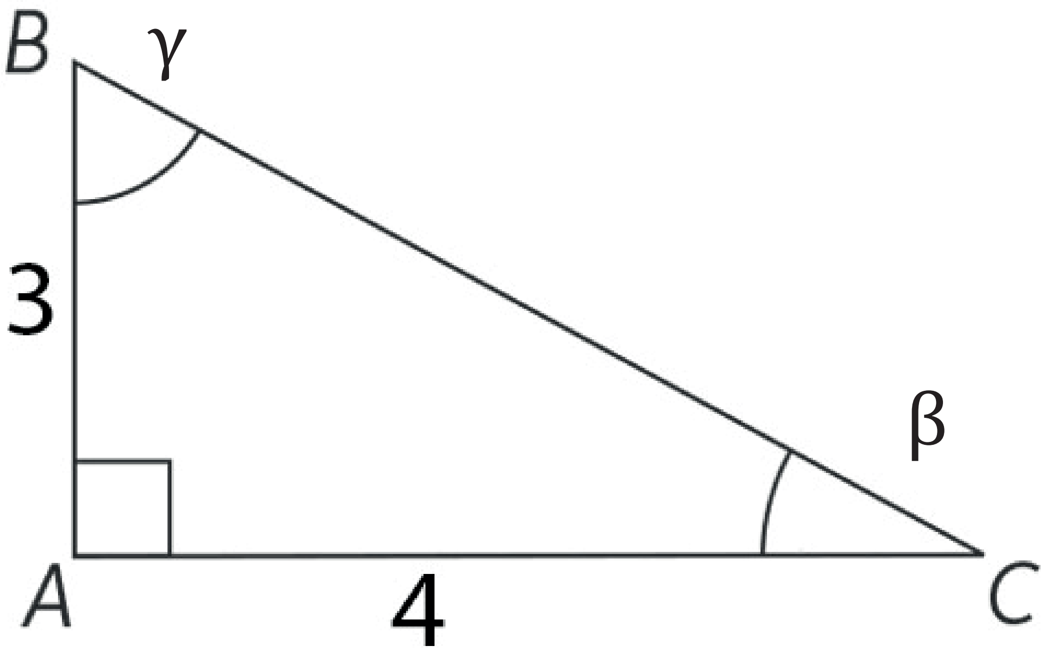


2. En los siguientes triángulos rectángulos, escribe el valor de cada razón trigonométrica.

Ejemplo:

Consideramos el triángulo ABC y calculamos su hipotenusa, utiliza calculadora:

$$BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \rightarrow BC = 5$$



Luego, se calculan las razones trigonométricas.

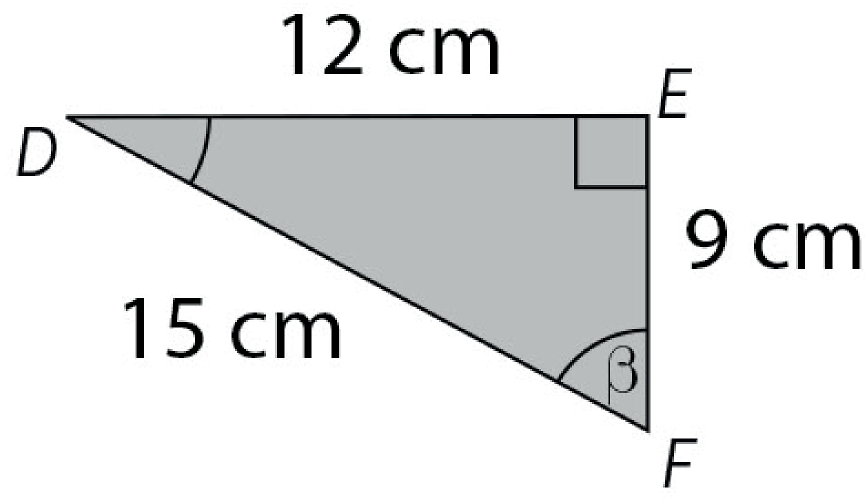
$\text{sen}(\beta)= \frac{3}{5} = 0,6$; $\cos(\beta)=\frac{4}{5}=0,8$;

$\text{tg}(\beta)= \frac{3}{4} =0,75$

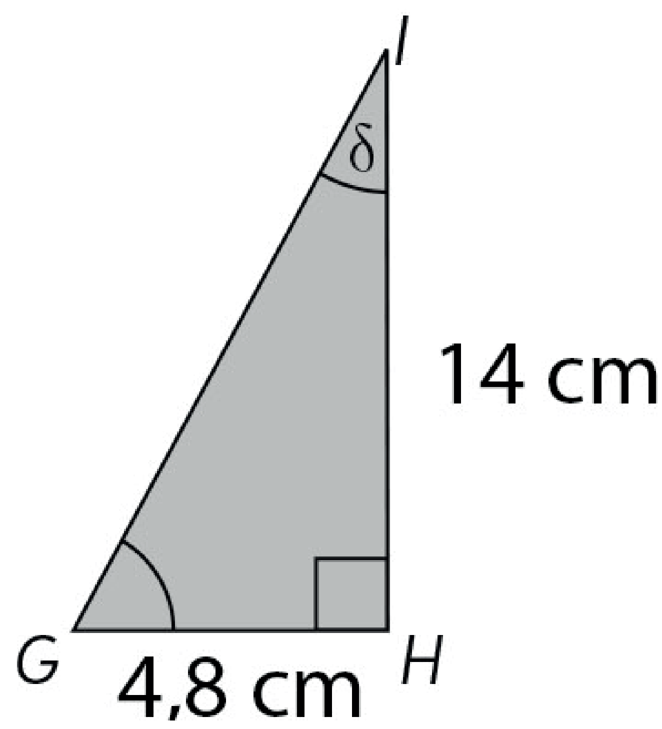
$\text{sen}(\gamma)= \frac{4}{5} = 0,8$; $\cos(\gamma)= \frac{3}{5} = 0,6$;

$\text{tg}(\gamma)= \frac{4}{3} = 1,\overline{3}$

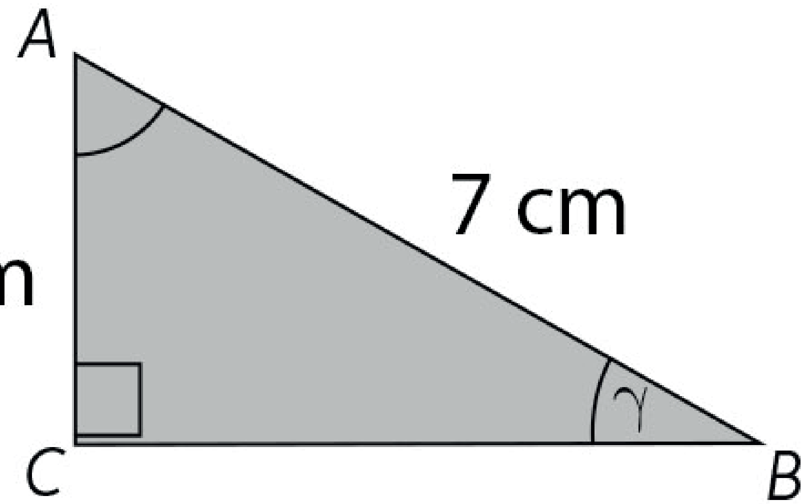
a.



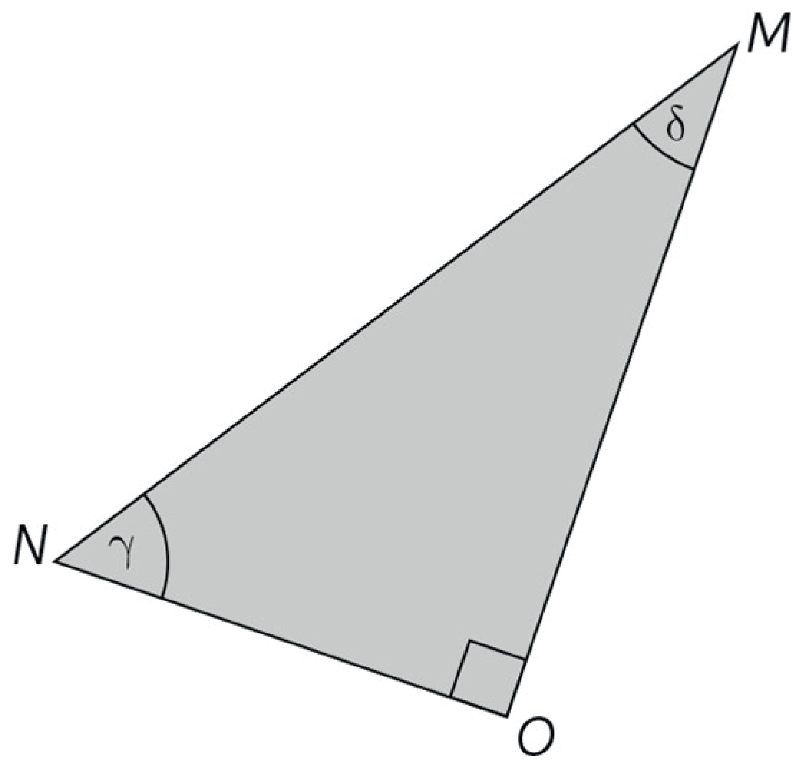
b.



c.



3. Evalúa si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para el triángulo MNO. Justifica tus respuestas.



a. La expresión $\frac{ON}{MN}$ corresponde a sen(γ).

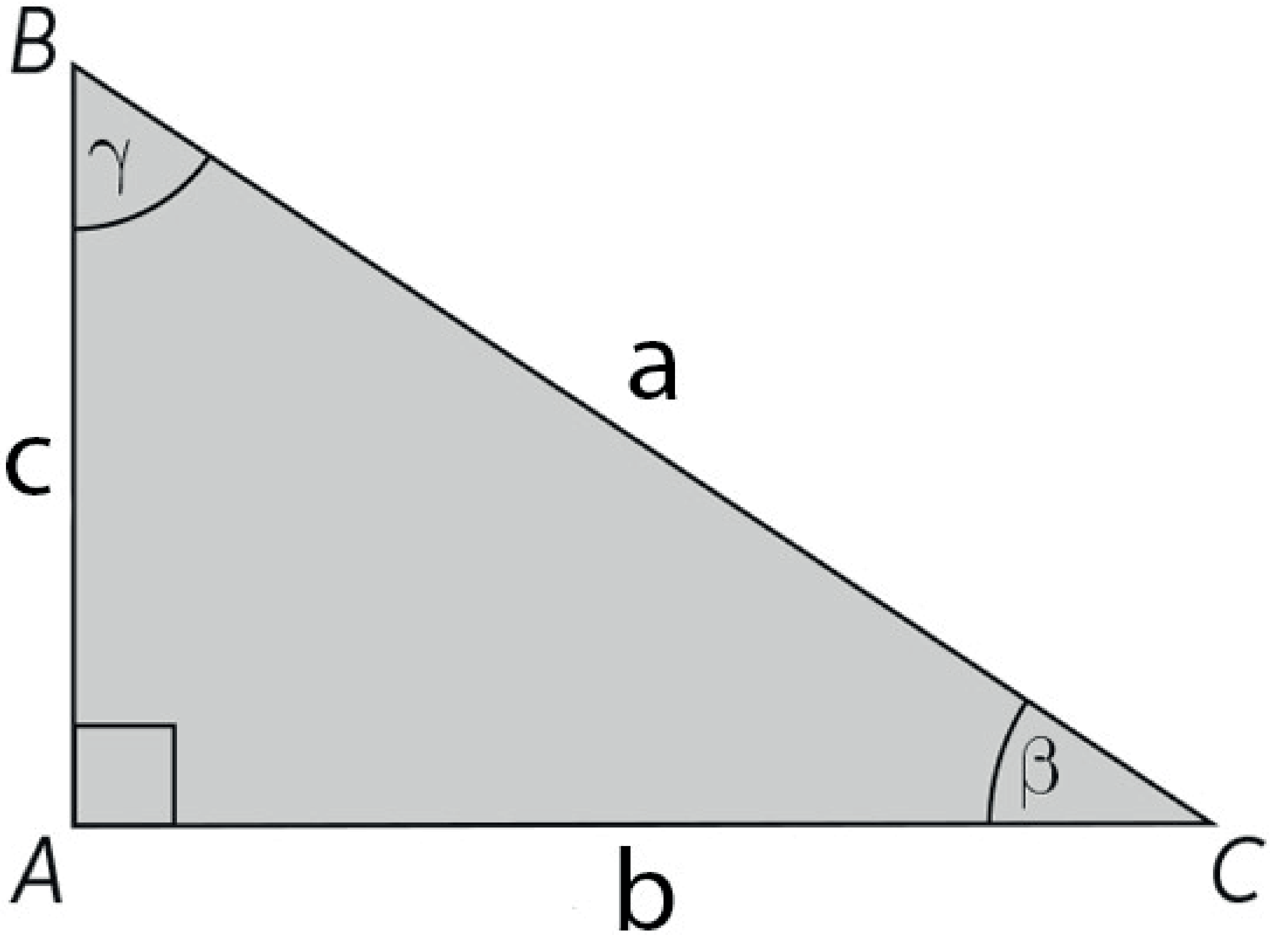
b. La expresión $\frac{OM}{MN}$ corresponde a cos(δ).

c. El valor de tg(δ) es $\frac{ON}{OM}$

d. cos(γ) es igual a sen(δ).

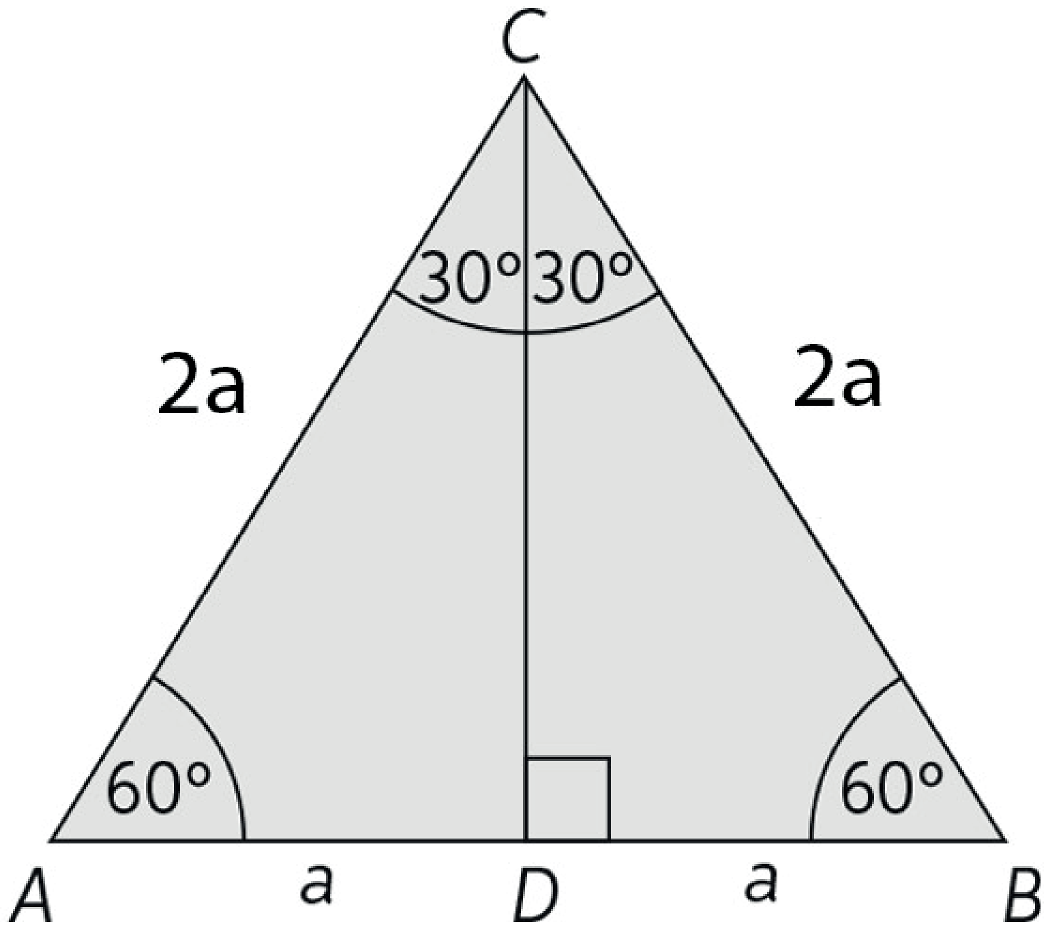
e. Si $\overline{OM}$ tiene mayor longitud que $\overline{ON}$, se tendrá que $\text{sen}(\gamma) > \text{sen}(\delta)$.

4. Considerando el siguiente triángulo, completa la tabla en tu cuaderno.



a	b	c	sen(γ)	sen(β)
$\sqrt{61}$		5		
	2	5		
		1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
	4			$\frac{1}{\sqrt{13}}$
	7	2		
$\sqrt{13}$		$\sqrt{15}$		

5. El triángulo ABC que se muestra en la figura es equilátero de lado 2a cm y $\overline{CD}$ es una altura.



a. Calcula la medida de $\overline{CD}$ utilizando el teorema de Pitágoras.

b. Escribe el valor de cada razón trigonométrica y completa la tabla en tu cuaderno.

Ángulo (α)	sen(α)	cos (α)	tan (α)
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
60°			

c. Supón que los lados del triángulo equilátero anterior miden 20 cm. ¿Cuáles son sus razones trigonométricas? ¿Y si los lados miden 30 cm?

d. ¿Qué conclusiones puedes obtener con respecto a las razones trigonométricas para ángulos de 30° y 60°?

6. Construye en tu cuaderno un triángulo rectángulo isósceles de lado a con un ángulo de 45°. Utilízalo para determinar los valores de las razones trigonométricas sen(45°), cos(45°) y tan(45°).

¿Qué relación existe entre el seno y el coseno de 45°?, ¿por qué? Justifica.

7. Calcula los valores pedidos.

Si sen(γ) = 0,8, ¿cuáles son los valores de cos(γ) y de tg(γ)?

Como sen(γ) = 0,8; seleccionamos dos valores de los lados que cumplan esa condición. Por ejemplo, el cateto opuesto puede valer 8 y la hipotenusa puede valer 10.

Luego, calculamos el valor del cateto faltante con los valores seleccionados:

$8^2 + CA^2 = 10^2 \rightarrow CA^2 = 100 - 64 \rightarrow CA = 6$

Finalmente, utilizamos los valores para calcular cos(γ) y de tg(γ):

$\cos(\gamma) = \dfrac{6}{10} = 0,6$ y $tg(\gamma) = \dfrac{8}{6} = 1,3$

a. Si sen(x) = 0,6; calcula cos(x).

b. Si $\cos(x) = \dfrac{3}{5}$; calcula sen(x).

c. Si tg(x) = 6; calcula sen(x).

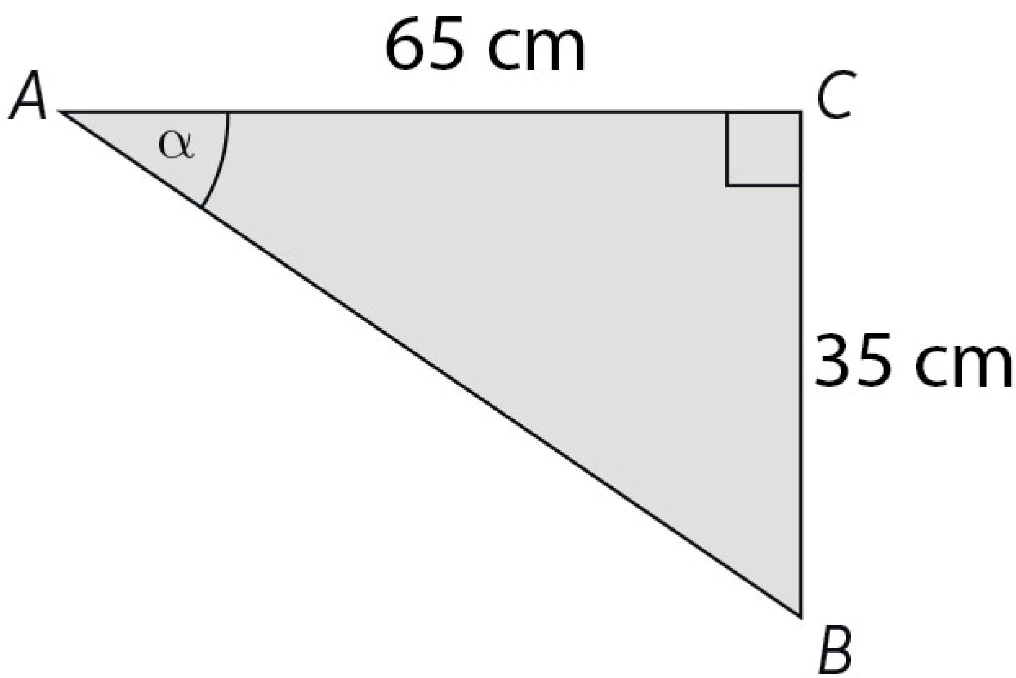
d. Si tg(x) = 0,5; calcula cos(x).

Utilizando el triángulo isósceles y el triángulo rectángulo puedes obtener los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°. Así, gracias al teorema de Pitágoras y algunos simples cálculos, obtienes estos valores y no necesitas memorizarlos.

Ángulo	sen (α)	cos (α)	tan (α)
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

▶ Actividades de profundización

8. Responde considerando el triángulo rectángulo de la imagen:



a. ¿Cuál es el valor de tan(α)?

b. Con todo lo estudiado hasta el momento, ¿podrías calcular en valor de α? Justifica.

Para calcular el ángulo α teniendo el valor de su razón trigonométrica, debes aplicar la relación inversa. Por ejemplo:

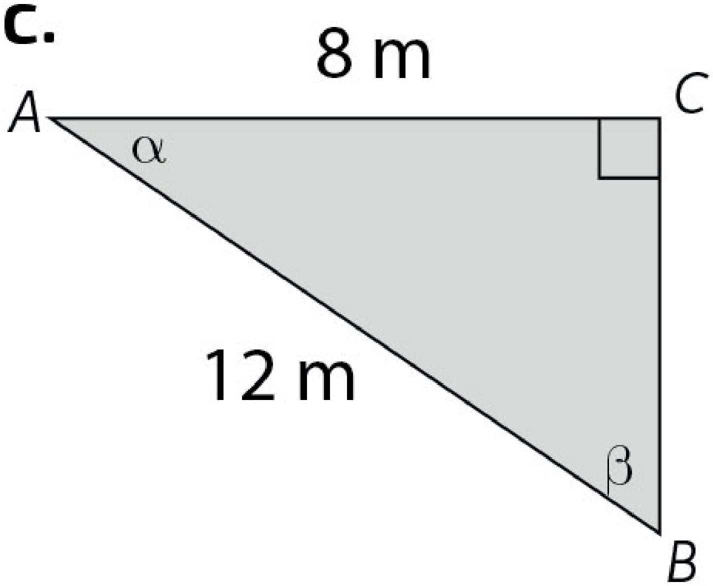
$$\tan(\alpha)=\frac{7}{13}\rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{7}{13}\right)=\alpha\rightarrow \alpha\approx 28{,}3°$$

Para ello utilizamos en la calculadora la tecla shift seguida de la función correspondiente y la razón.

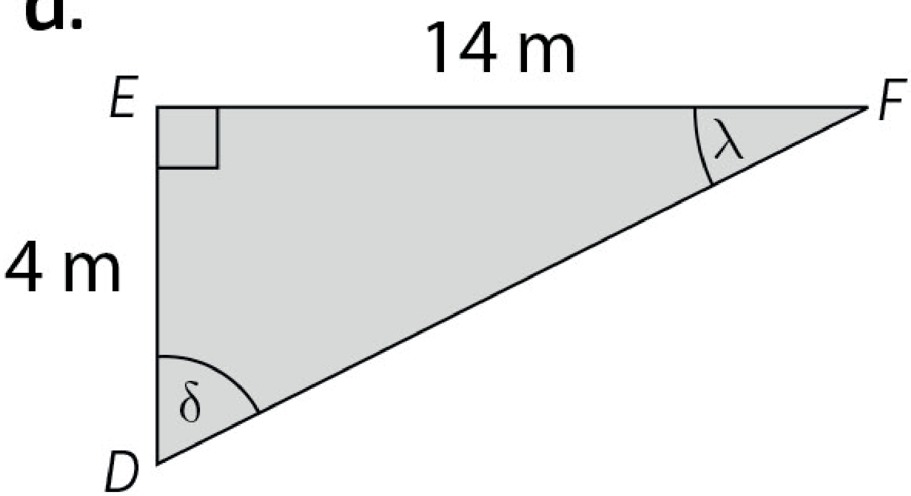
Recuerda configurar tu calculadora en grados sexagesimales.

Con ayuda de la calculadora, calcula la medida aproximada de los ángulos interiores de cada triángulo.

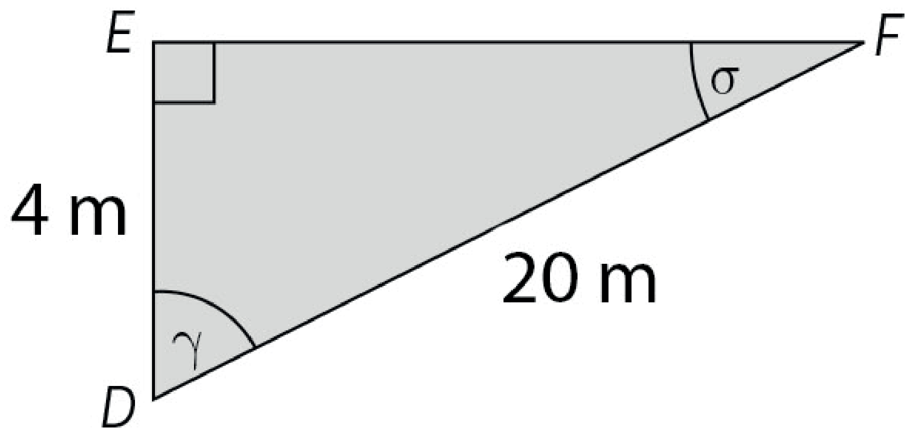
c.



d.



e.



▶ Para concluir

a. Explica con tus palabras: ¿por qué se cumple sen(40°)=cos(50°)? Justifica.

b. Si sen(β) = 0,342 y cos(β)=0,94, ¿qué valor tiene tg(β)?

c. Si el coseno de un ángulo es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ¿cuál es la medida de dicho ángulo? Explica tu procedimiento y compártelo con un compañero.

Aplicaciones de las razones trigonométricas

¿Qué es un problema de aplicación? ¿Qué rol tiene el modelado en matemática?

¿Es importante resolver problemas aplicados en matemática?

¿Por qué?

Objetivos: Resolver problemas aplicando las razones trigonométricas.

1. Analiza el siguiente contexto. Luego, realiza las actividades.

Según la normativa chilena, la razón entre la altura que alcanza una rampa y la distancia horizontal de esta debe ser como máximo 0,12.

En un edificio se quiere construir una rampa para subir el desnivel de la entrada cuya altura es de 30 cm. ¿Cuál debe ser la longitud de la base de dicha rampa?

Paso 1: Identifica los datos que se entregan en el problema y lo que debes encontrar.

Los datos del problema son:

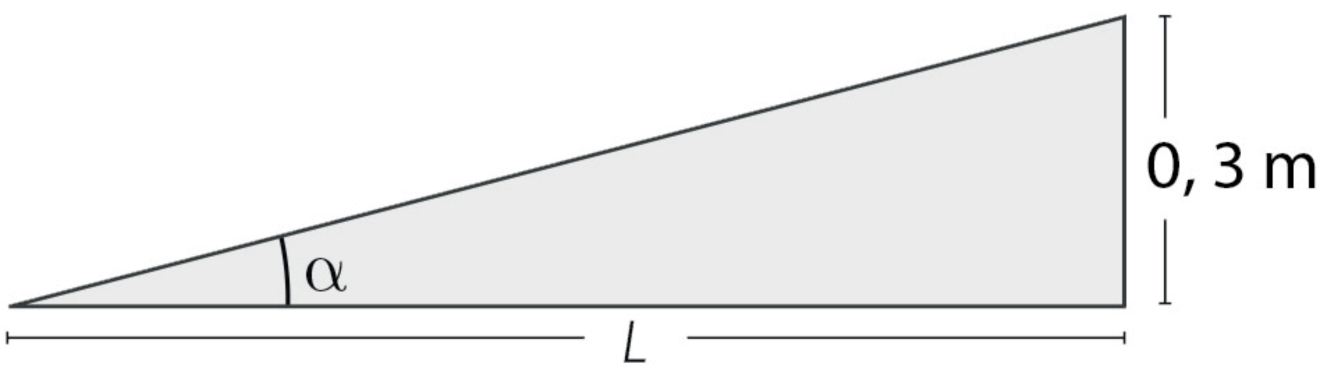
Altura: 30 cm

Razón entre altura y distancia horizontal: 0,12

a. ¿Cuál es el dato faltante para construir la rampa? ¿Cómo se relaciona con los datos entregados en el problema?

Paso 2: Representa la situación a través de un dibujo.

Dibujamos un esquema para ilustrar la situación y anotamos las medidas:



La razón entre la altura (cateto opuesto) y la distancia horizontal (cateto adyacente) es 0,12.

b. ¿Qué razón trigonométrica relaciona la altura y la distancia horizontal?

Paso 3: Aplica el teorema de Pitágoras y/o las razones trigonométricas.

Planteamos la ecuación:

$$\text{tg}(\alpha)= \frac{0{,}3}{L} \rightarrow 0{,}12 = \frac{0{,}3}{L}$$

c. Calcula el resultado de la ecuación anterior.

Paso 4: Responde la pregunta del problema y verifica tu respuesta.

d. Plantea la respuesta. No olvides utilizar las unidades correspondientes.

¿Cuál crees que es la importancia de que las rampas cumplan con estas condiciones? ¿Por qué crees que no puede ser mayor el ángulo?

Utilizaremos el término ángulo de elevación o depresión para hacer referencia al ángulo que forma la línea de visión del objeto y la horizontal.

Las razones trigonométricas, junto con el teorema de Pitágoras, nos permiten resolver problemas que involucran triángulos rectángulos.

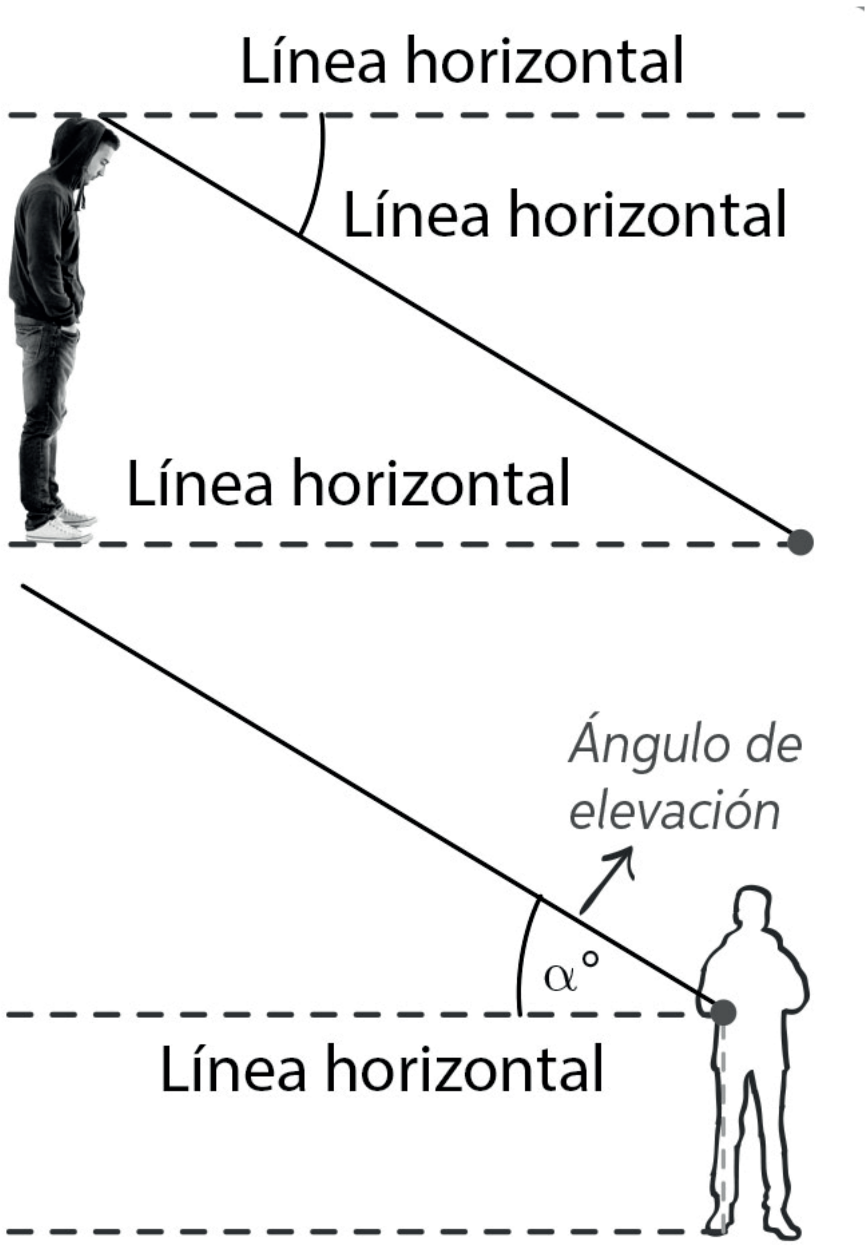
Para resolver puedes guiarte por los siguientes pasos:

Paso 1: Identifica los datos que se entregan en el problema y lo que debes encontrar.

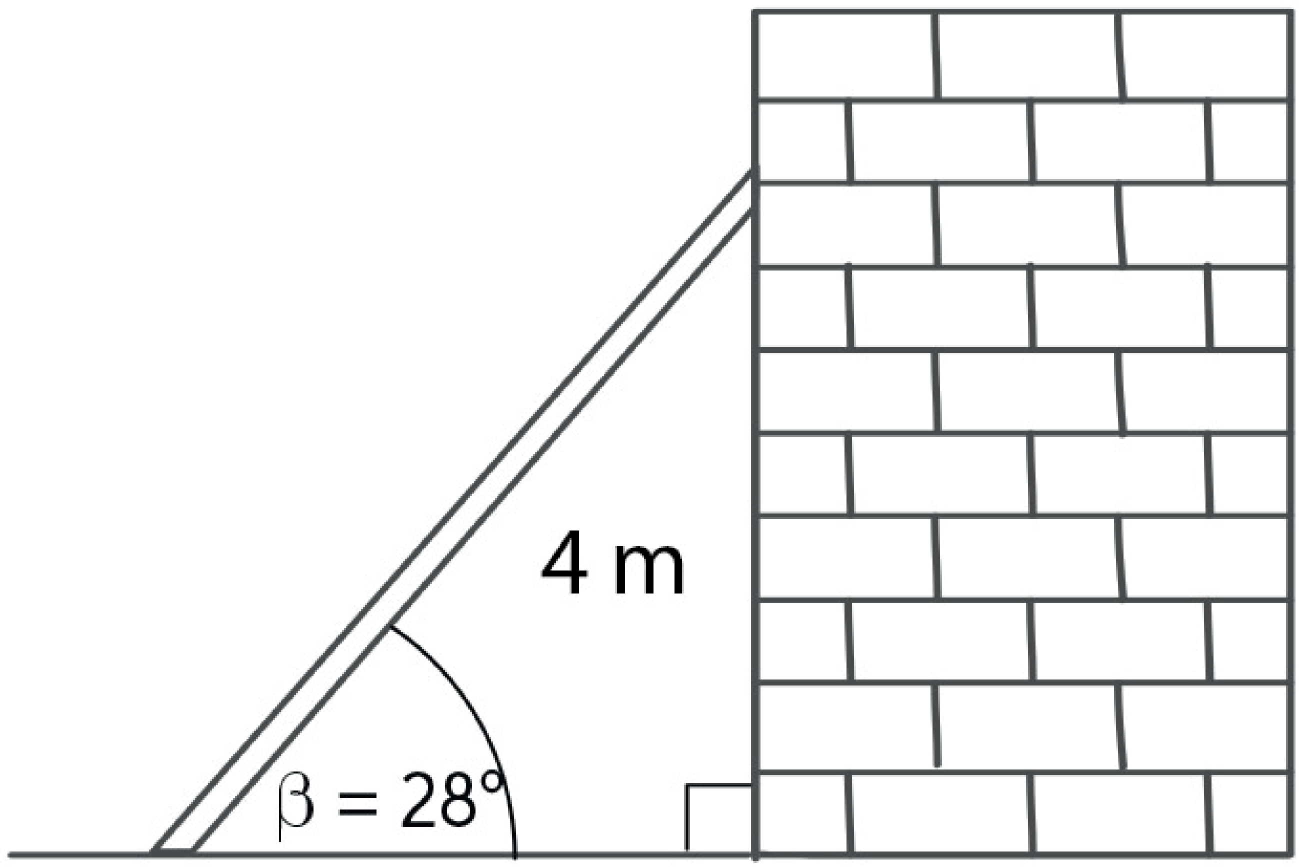
Paso 2: Representa la situación a través de un dibujo.

Paso 3: Aplica el teorema de Pitágoras y/o las razones trigonométricas.

Paso 4: Responde la pregunta del problema y verifica tu respuesta.



2. Una viga apoyada en un muro forma un ángulo de 28° con la horizontal. El punto donde la viga toca en la pared está a 4 m de altura. Se necesita conocer el largo de la viga y la distancia entre el extremo inferior de la viga y el muro.



a. ¿Qué datos entrega el problema? ¿Cuáles se desconocen?

b. ¿Cuál es el largo de la viga?

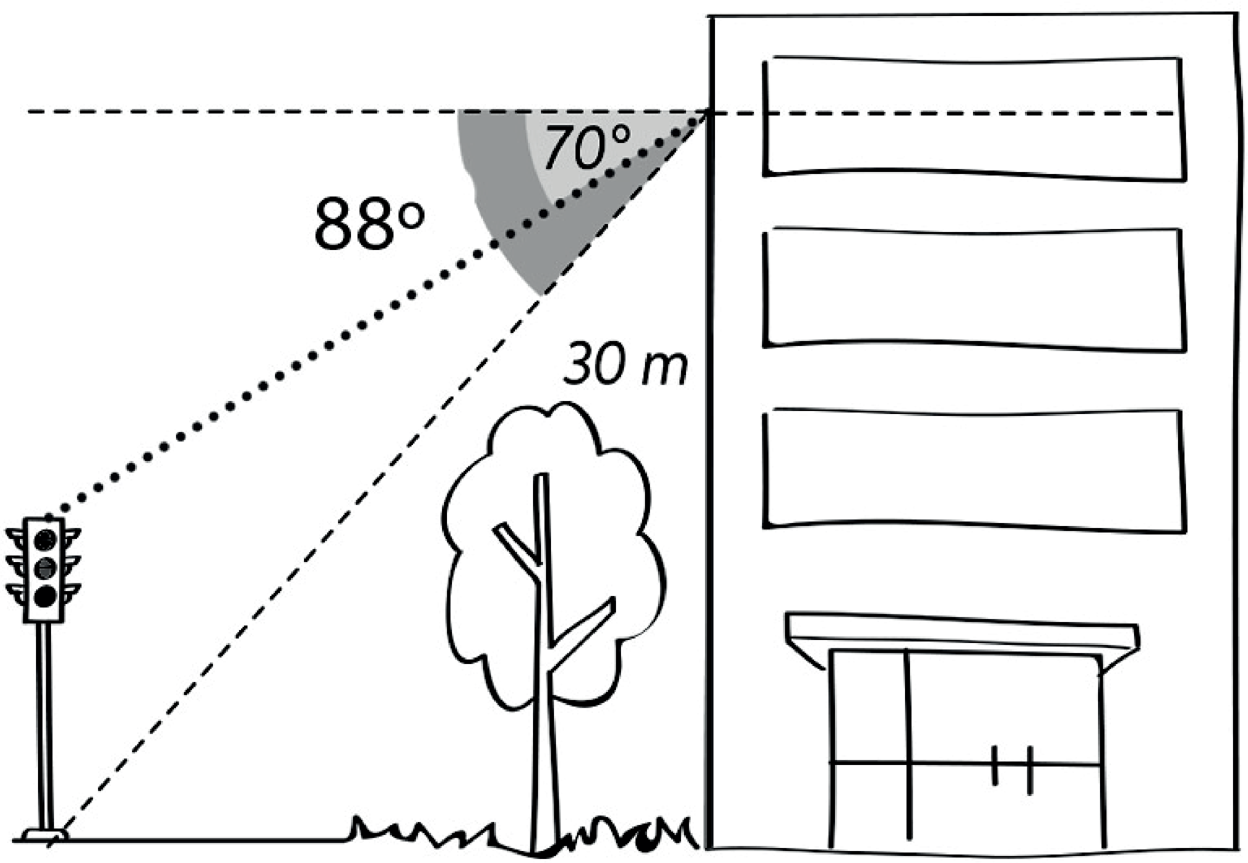
c. ¿Cuál es la distancia entre el extremo inferior de la viga y el muro?

3. Dos objetos separados por 20 m se encuentran en la misma dirección respecto de la base de una torre. El más cercano a ella está a 17,5 m. ¿Cuáles son los ángulos de depresión desde la torre si esta mide 10 m?

4. Una escalera de 3 m de longitud está apoyada en una pared de tal forma que su extremo inferior está a 1,5 m de la misma. Luego, el extremo superior de la escalera se desliza hacia abajo 1 m. ¿En cuántos grados disminuye el ángulo que forma con el suelo?

5. Se observa un semáforo desde la ventana de un edificio, a 30 m del suelo. El ángulo de depresión para observar la parte superior del semáforo es de 70°, mientras que el ángulo de depresión para observar su base mide 88°.

¿Cuál es la altura del semáforo?



6. Desde la parte superior de un acantilado, se observa un barco y un submarino que están en el mar. Los ángulos de depresión son de 45° y 60° respectivamente. Ambos objetos están separados por una distancia de 110 m. ¿Cuál es la altura del acantilado?

7. En parejas, construyan la siguiente herramienta. Luego, realicen la actividad.

Materiales:

- Transportador
- Tuerca (o cualquier objeto con peso)
- Objeto cilíndrico que sirva como visor (puede ser el cuerpo de un lápiz pasta o una bombilla)
- Hilo (o lana delgada).

Construcción.

Paso 1: Unan con cinta adhesiva la bombilla al transportador de manera que quede alineada en la parte recta (es decir, a los 0 y 180 grados).

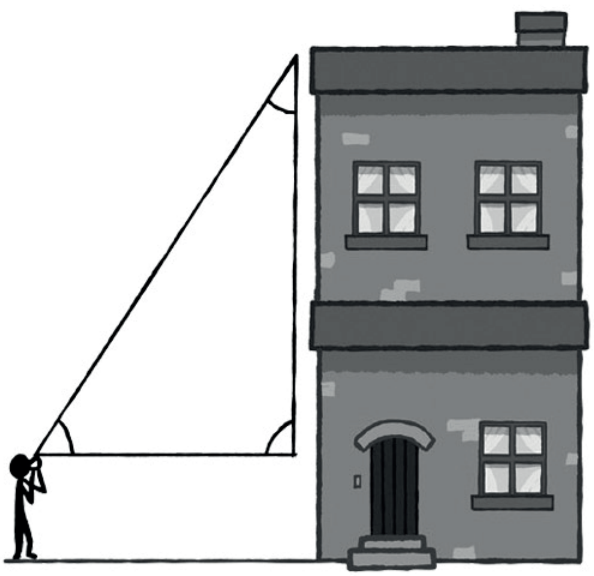
Paso 2: Aten un peso (como una tuerca o una tapa de lápiz) al hilo y luego el otro extremo al centro del transportador. Dejen unos 10 cm de largo para que se pueda mover y se pueda medir el ángulo.

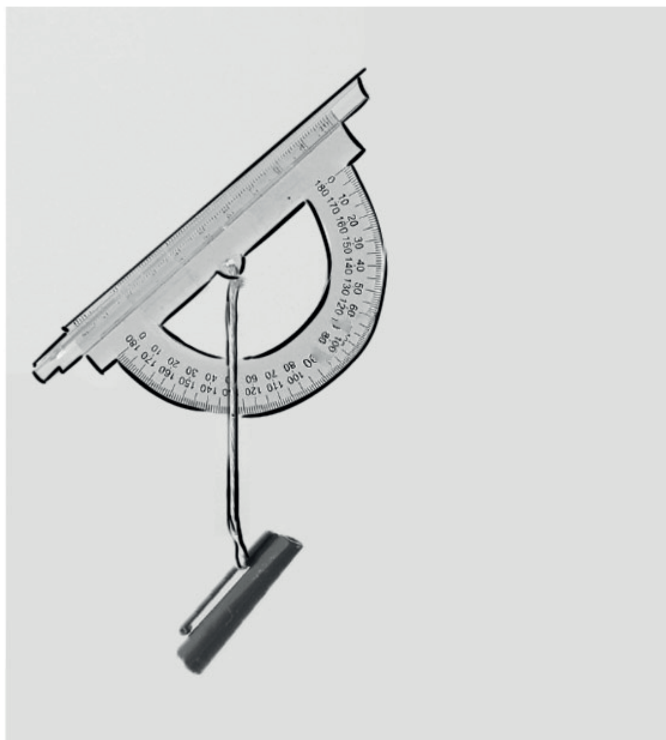
Instrucciones de uso

Con este artefacto, pueden determinar el ángulo de elevación de una torre o algún edificio. Para ello, deben mirar por la bombilla el extremo superior del edificio y observar la posición de la cuerda.

- **a.** ¿Qué ángulo es el que mide el instrumento dentro del esquema? ¿Cómo se relaciona con el ángulo de elevación?
- **b.** En parejas, elijan un objeto dentro del colegio y midan su ángulo de elevación.
- **c.** Midan la distancia hasta el objeto. Utilicen pasos de ser necesario.
- **d.** Calculen la altura del objeto escogido.
- **e.** Comparen la medida obtenida con la de sus compañeros. ¿Son similares? ¿A qué se debe esto?

f. Si es posible, averigüen la altura real del objeto. Luego, determinen el error entre los valores. ¿Quién tuvo el menor error? ¿Por qué sucedió esto?





▶ Para concluir

a. ¿Qué otras aplicaciones útiles pueden tener las razones trigonométricas?

b. ¿Qué ventajas tiene utilizar herramientas tecnológicas en el cálculo de razones trigonométricas? Comenta con tu curso.

Vectores y trigonometría

¿Qué es un vector? ¿Cuáles son sus componentes?

¿En qué se diferencian un punto en el plano cartesiano de un vector?

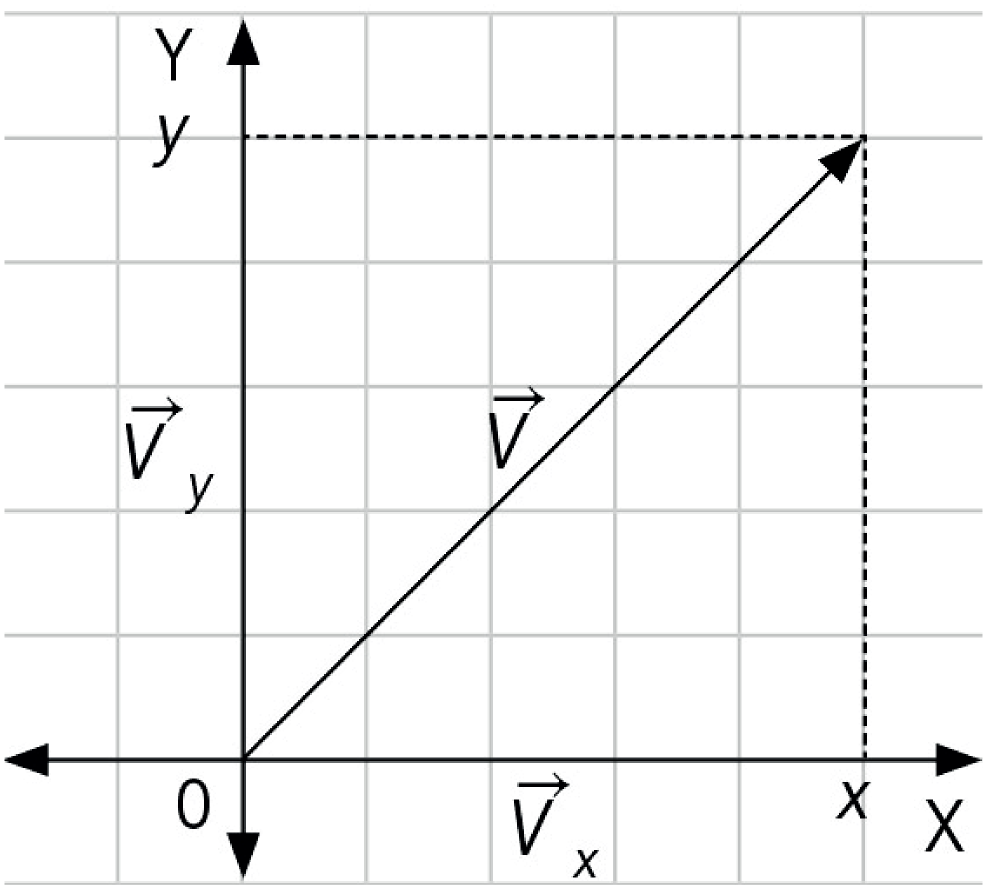
¿Cuáles son los cuadrantes de un plano cartesiano?

Objetivo: Representar vectores en el plano e identificar sus elementos utilizando razones trigonométricas.

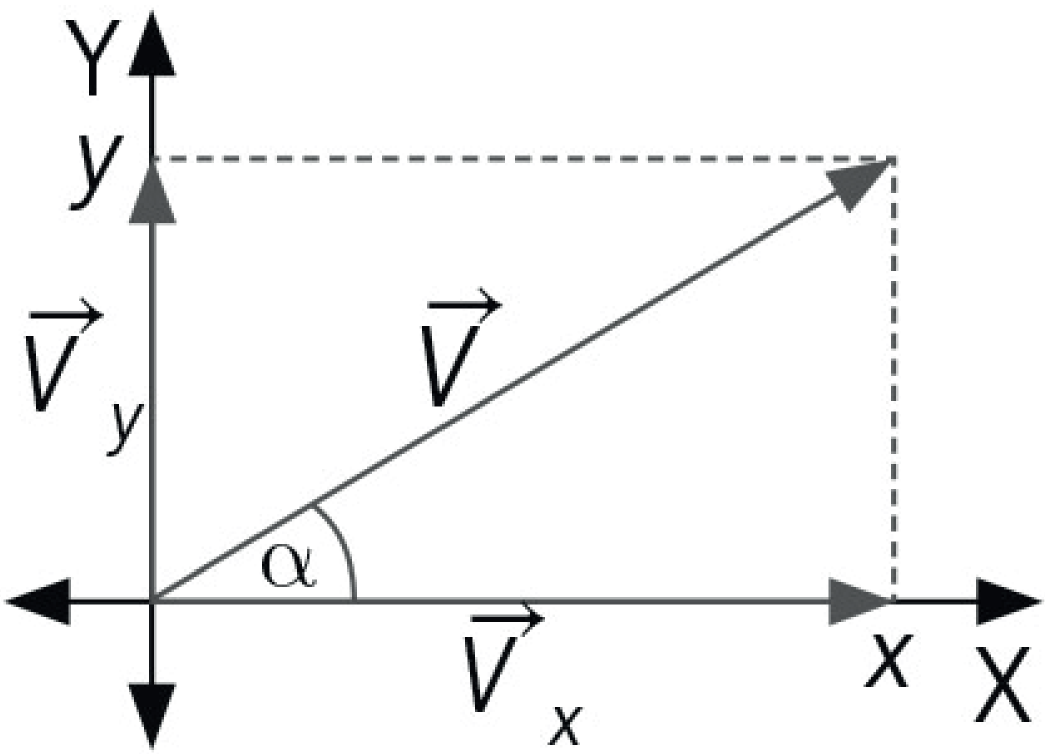
Los vectores $\vec{V}_x = (x,0)$ y $\vec{V}_y \rightarrow y = (0, y)$ corresponden a proyecciones del vector $\vec{V} = (x, y)$ sobre los ejes X e Y respectivamente. De esta forma, se tiene que:

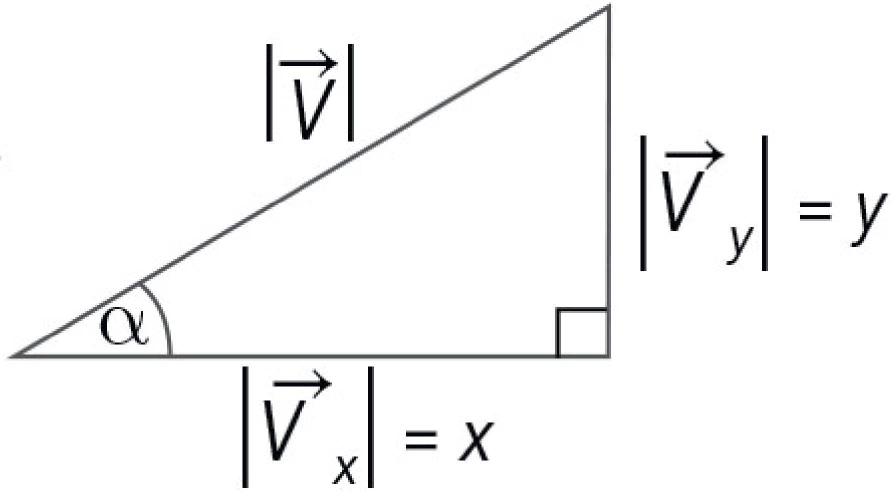
$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y = (x,0) + (0, y)$$

Donde x e y corresponden a las componentes del vector $\vec{V}$.



Un vector $\vec{V}$ se puede descomponer utilizando sus proyecciones sobre los ejes del sistema coordenado. Para ello, se pueden utilizar las razones trigonométricas del ángulo que forma con el eje X:





$$\left|\vec{V}_x\right| = \left|\vec{V}\right| \cdot \cos(\alpha) = x$$

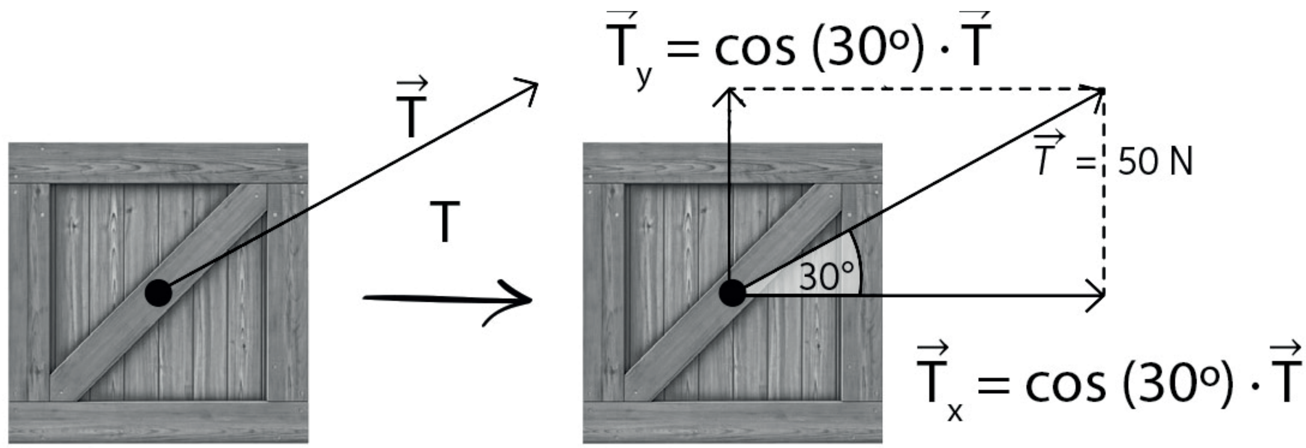
$$\left|\vec{V}_y\right| = \left|\vec{V}\right| \cdot \operatorname{sen}(\alpha) = y$$

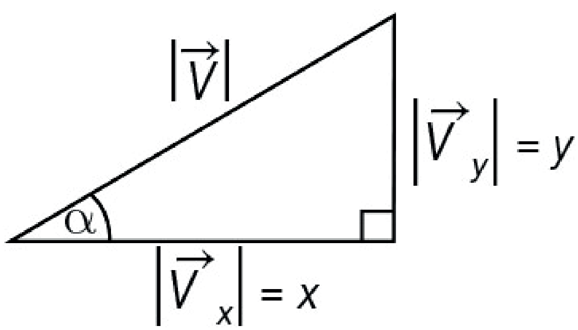
$$\left|\vec{V}\right|^2 = \left|\vec{V}_x\right|^2 + \left|\vec{V}_y\right|^2$$

1. Analiza la siguiente situación. Luego, realiza las actividades.

Una cuerda amarrada a una caja genera sobre esta una fuerza de tensión $\vec{T}$ de 50 N con un ángulo de inclinación respecto al plano horizontal es de 30°. ¿Cuánto mide la componente horizontal y vertical de dicho $\vec{T}$?

Para resolver, descomponemos el problema en dos tensiones, $\vec{T}_x$ *(tensión horizontal) y* $\vec{T}_y$ *(tensión vertical) utilizando razones trigonométricas:*





$$|\vec{V}_x| = |\vec{V}| \cdot \cos(\alpha) = x$$

$$|\vec{V}_y| = |\vec{V}| \cdot \operatorname{sen}(\alpha) = y$$

$$|\vec{V}|^2 = |\vec{V}_x|^2 + |\vec{V}_y|^2$$

a. Observa el triángulo rectángulo que se forma con las tensiones presentes en la caja. Explica las razones trigonométricas permiten calcular los módulos de $\vec{T}_x$ y $\vec{T}_y$.

El módulo es un número que corresponde a la magnitud de un vector.

b. Reemplaza los valores y calcula el módulo de cada vector.

c. Explica con tus palabras: ¿Por qué se cumple $\vec{T}_x^{\,2} + \vec{T}_y^{\,2} = \vec{T}_x$?

¿Cuál es la diferencia entre módulo y vector? Investiga y comenta con tus compañeros.

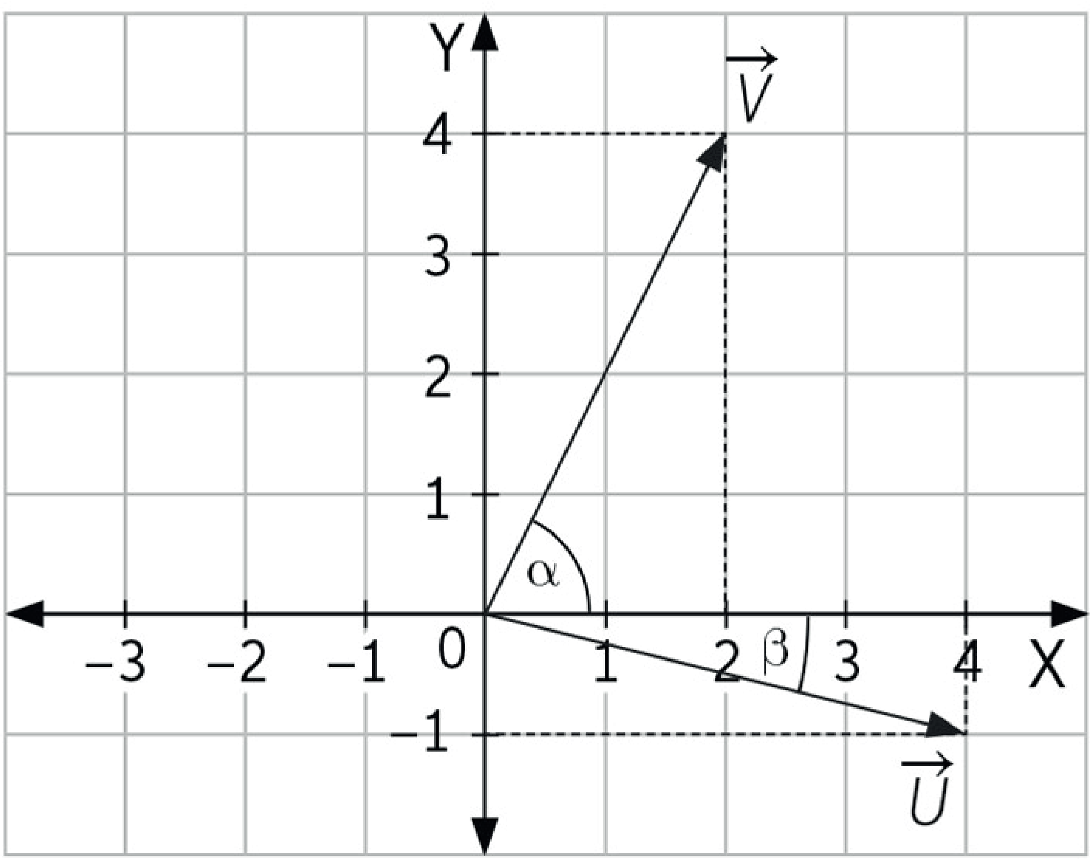
2. Considera los vectores $\vec{A} = (3, 4)$, $\vec{B} = (4, 3)$, $\vec{C} = (2, 1)$ y $\vec{D} = (4, 2)$.

a. Grafica los vectores en un plano cartesiano.

b. ¿Qué relación puedes establecer entre los ángulos que los vectores forman con el eje X? Justifica tu respuesta y discute con tus compañeros.

c. Calcula $|\vec{A}|$, $|\vec{B}|$, $|\vec{C}|$ y $|\vec{D}|$. ¿Qué relación estableces entre ellos?

3. Dado los vectores de la imagen.



a. Determina las componentes de los vectores.

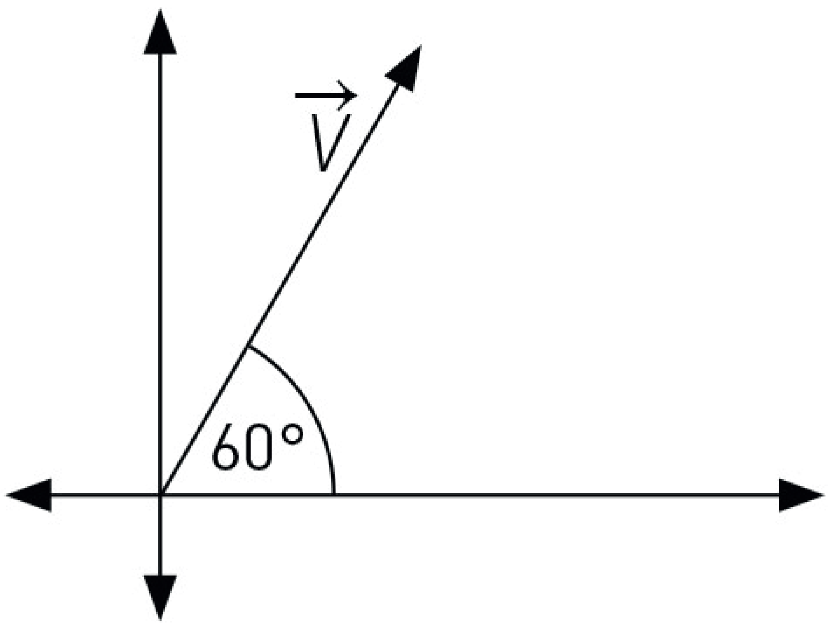
b. Determina la magnitud de ambos vectores.

c. Calcula la medida de α y β.

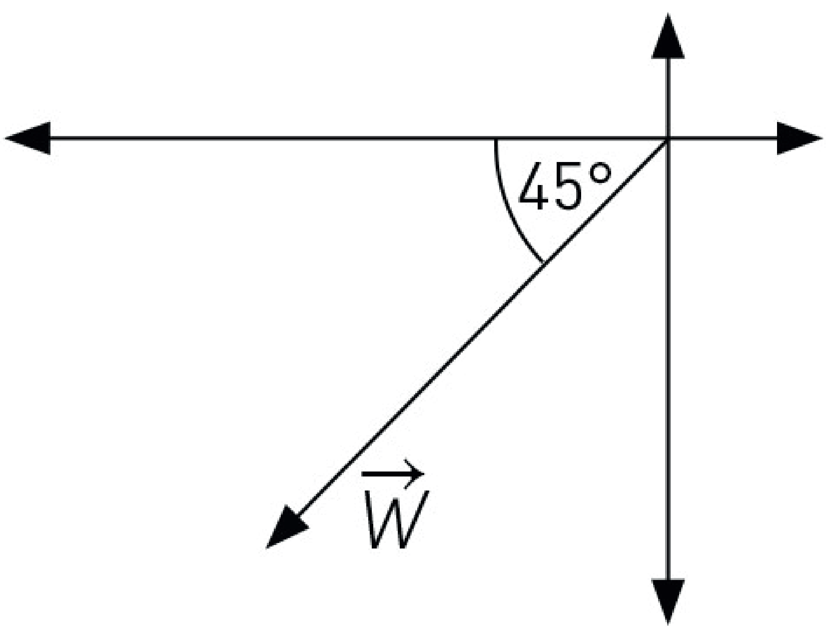
¿Qué diferencia existe en el resultado al utilizar la coordenada y con su signo y utilizarla sin su signo para calcular el ángulo β?

4. Aplica la descomposición a cada vector según la magnitud dada. Explica el signo de cada componente.

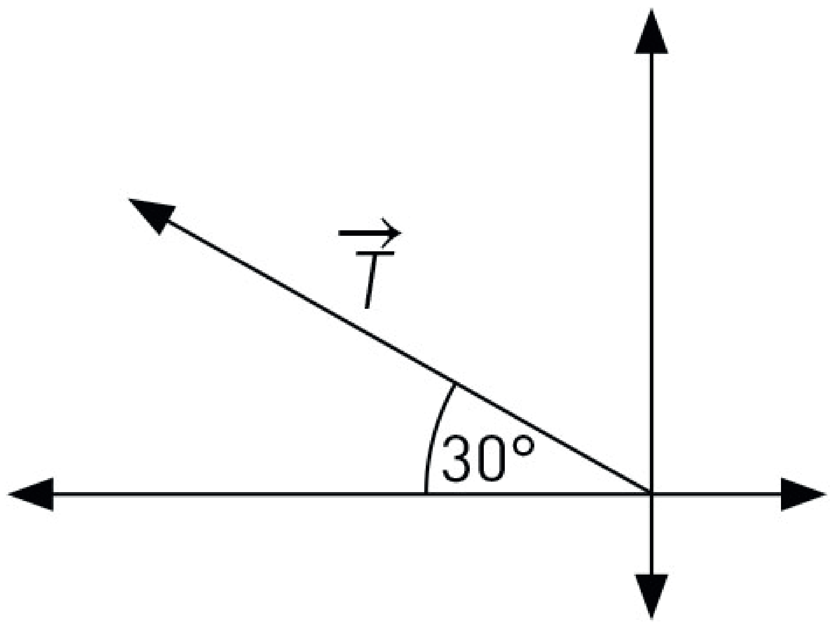
a. $|\overrightarrow{V}| = 200$



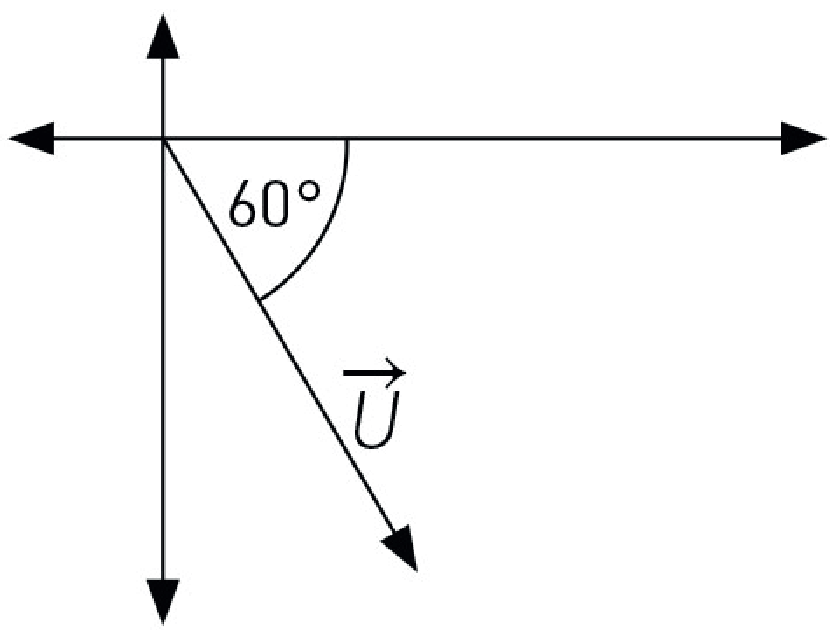
b. $|\overrightarrow{W}| = 18$



c. $\left|\overrightarrow{T}\right| = 85$

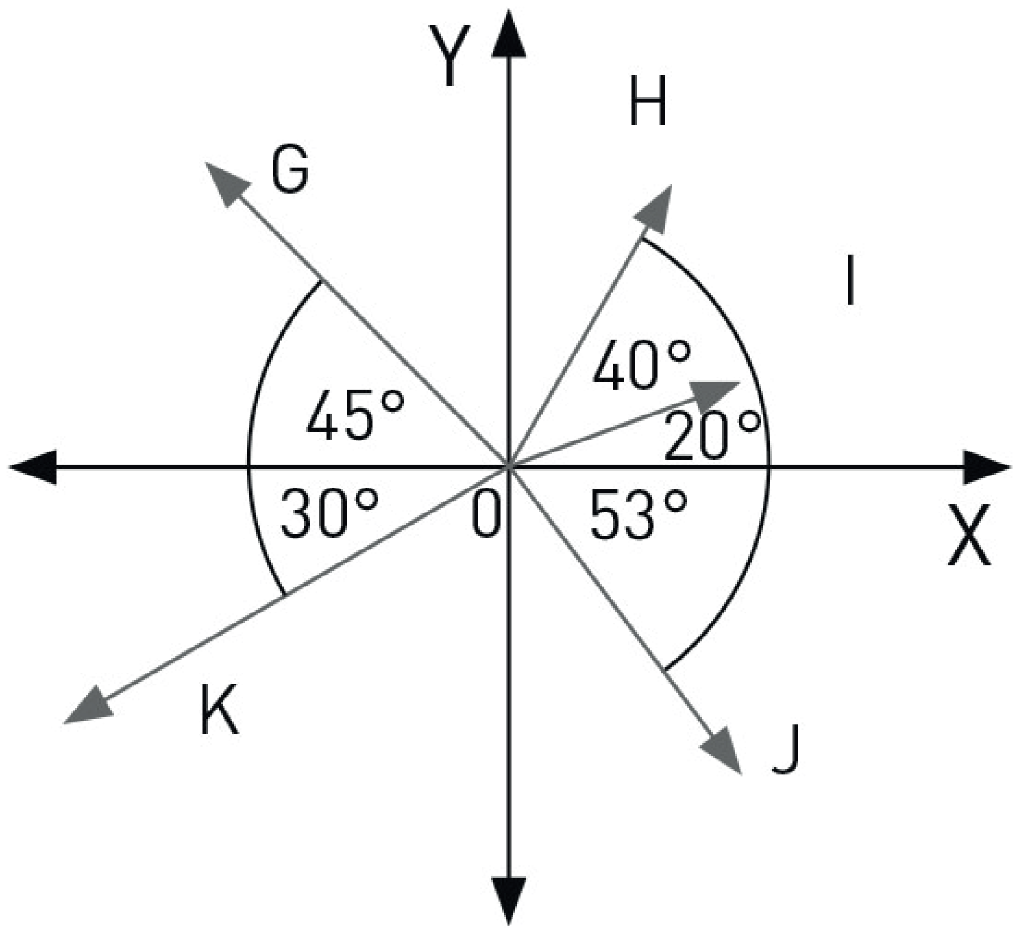


d. $\left|\overrightarrow{U}\right| = 90$

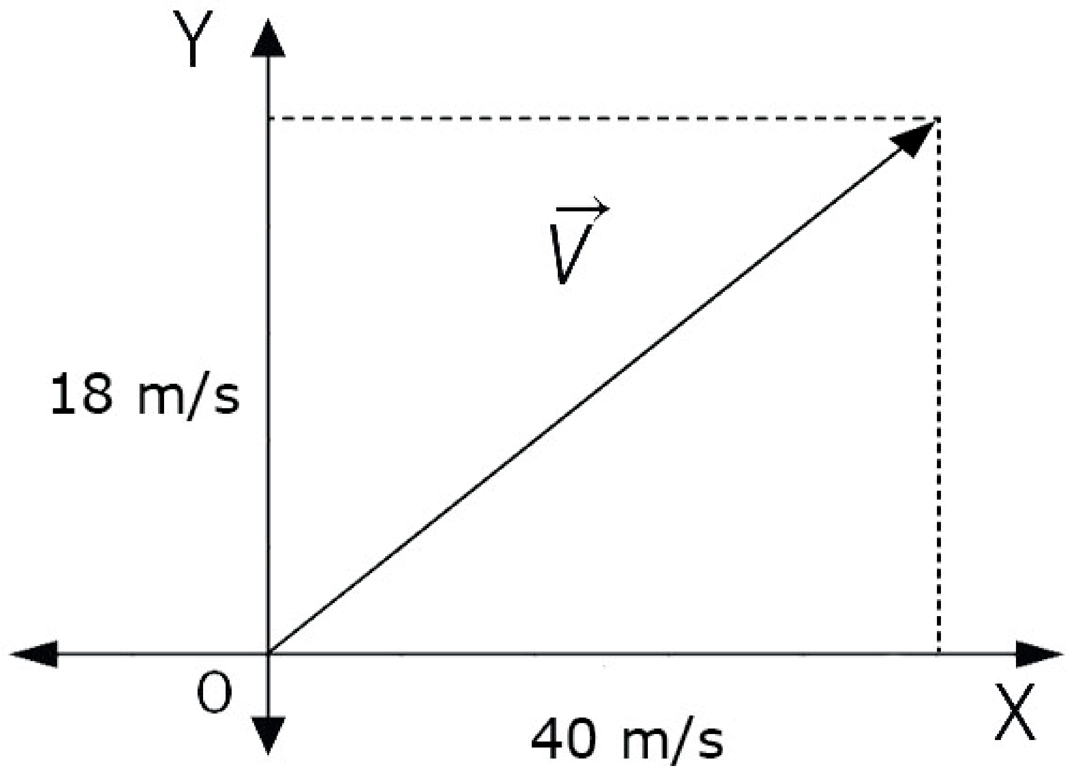


5. Utiliza una calculadora científica para completar la siguiente tabla en tu cuaderno.

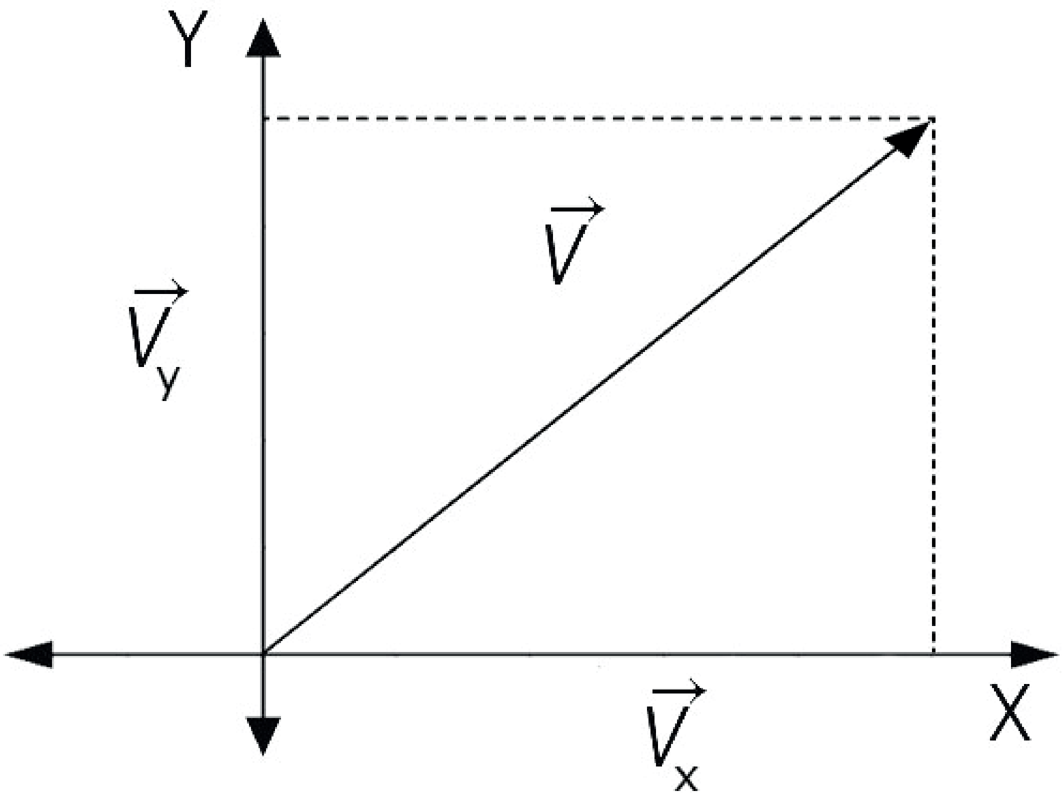
		Componentes	
Vector	Magnitud	X	Y
G	2,4 u		
H	1,6 u		
I	1,3 u		
J	2,1 u		
K	2,7 u		



6. Calcula el vector velocidad y su dirección para el ciclista en la siguiente imagen justo después de iniciar un salto. Considera las componentes según el sistema de referencia dado.



7. Un patinador profesional se lanza por una pista con un ángulo de elevación de 30° cómo se muestra en la siguiente imagen. Si su rapidez $\vec{V}$ en ese instante era 22 $\frac{m}{s}$, responde:



a. ¿Cuál es su vector velocidad al momento de lanzarse?

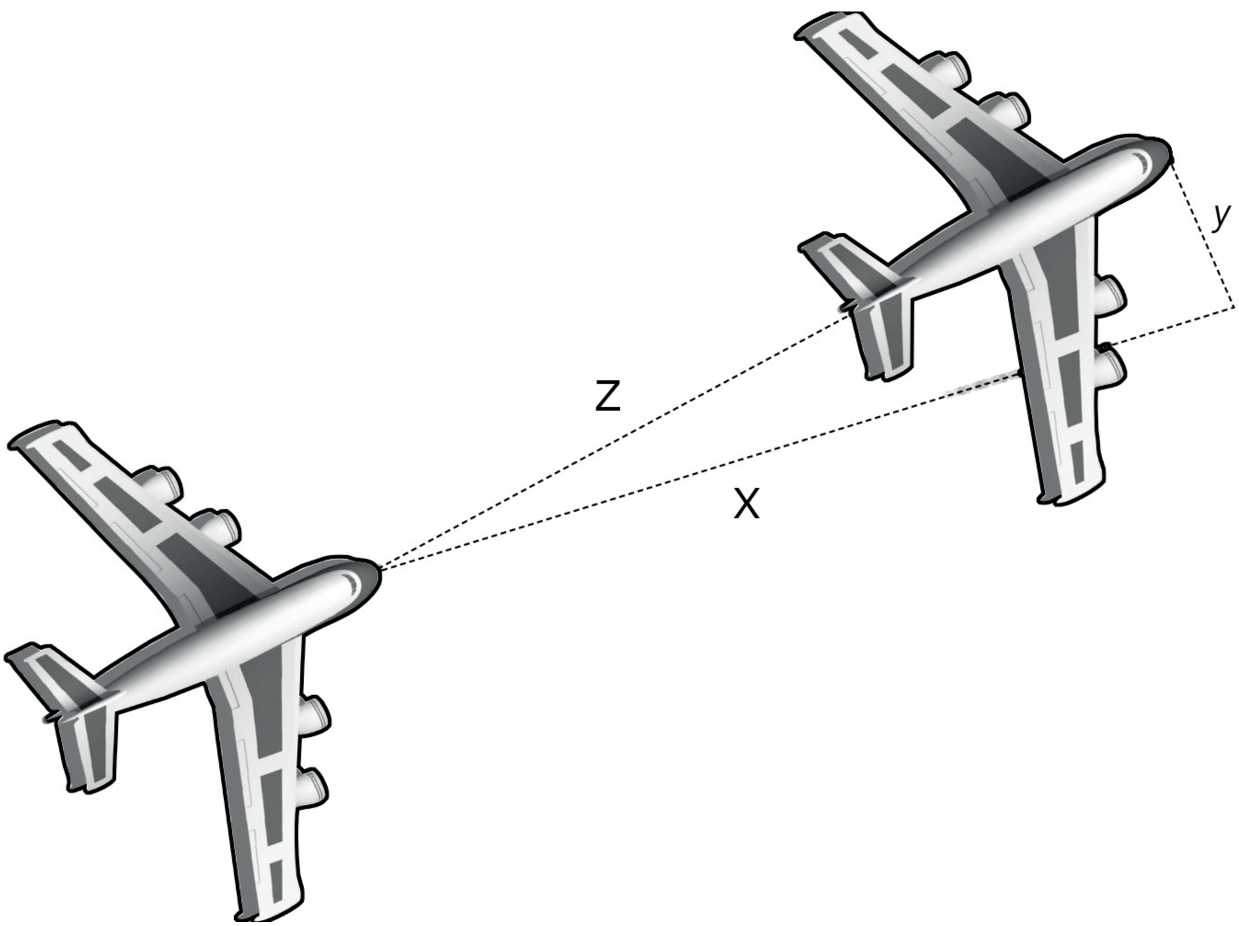
b. ¿Cuáles son los vectores de velocidad horizontal y vertical?

c. En un segundo salto, su vector velocidad está dado por $\vec{V} = (30,2)$. ¿Cuáles son sus vectores de velocidad horizontal y vertical?

h. ¿Cuál es su rapidez en ese instante?

i. ¿Con qué ángulo de elevación se lanzó?

8. Un avión vuela a la rapidez constante $x = 150$ km/h. Por un viento cruzado (y) que viene perpendicular con respecto a la velocidad, el avión se desvía por un ángulo de 6°, cómo se muestra en la siguiente imagen. Observa el esquema y usa razones trigonométricas para resolver.



La velocidad se denota por $\vec{V}$ y corresponde a la relación entre el cambio de posición y el tiempo.

a. Determina la velocidad y del viento cruzado.

b. Calcula la velocidad total z.

c. Verifica la velocidad total z aplicando el teorema de Pitágoras.

9. Un objeto se desplaza a una rapidez de 17 $\frac{m}{s}$ de modo que forma un ángulo de 60° con respecto a la horizontal.

a. Realiza un esquema que ilustre la situación.

b. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de su velocidad?

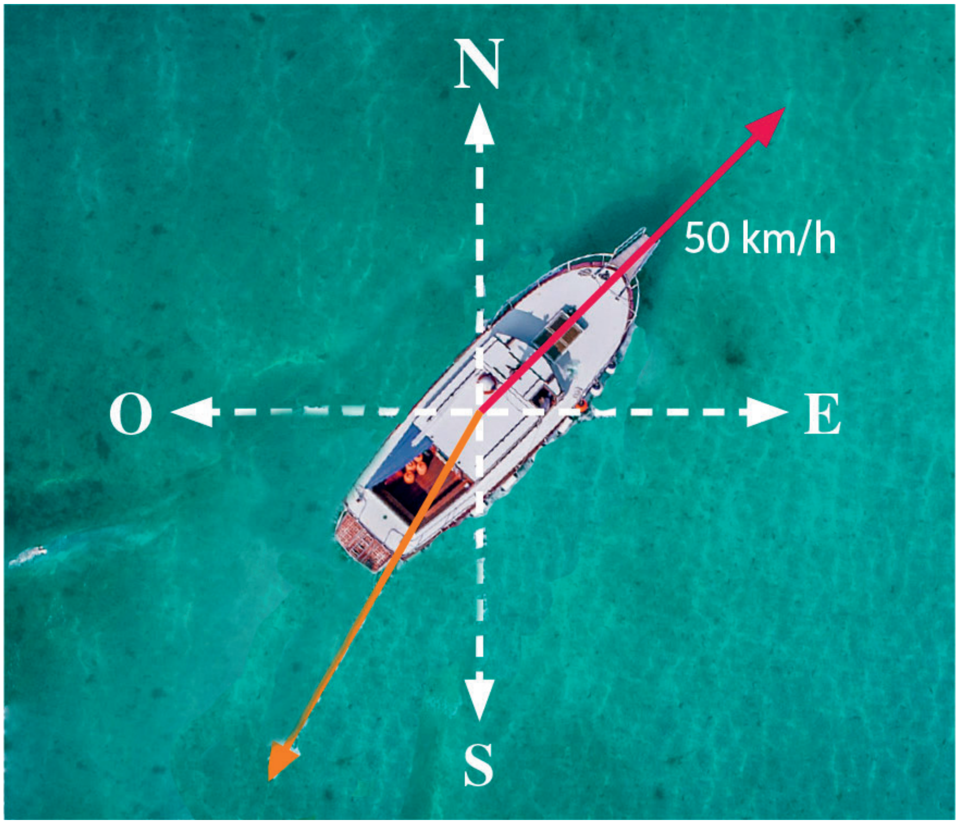
10. Un dron despega desde un punto hacia la cima de un observatorio astronómico. Su rapidez es 20 m/s y forma un ángulo de elevación de 53°.

a. Realiza un esquema que ilustre la situación.

b. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de su velocidad?

Para comprobar.
gbit.cl/T21M2MP116A

11. Un barco navega formando un ángulo de 45° con la vertical que indica el norte, tal como muestra el vector rojo en la imagen.



a. ¿Qué rapidez tiene en la dirección sur-norte?

b. ¿Qué rapidez tiene en la dirección oeste-este?

c. La corriente marina (en amarillo) empuja el barco en dirección sur-oeste con un ángulo de 30° respecto al sur. ¿Cuáles son las componentes de la corriente marina?

d. ¿Cuál es el vector resultante del movimiento del barco?

▶ Actividades de profundización

12. Un auto de masa 1.000 kg sube una pendiente con un ángulo de elevación de $\alpha = 10°$. El peso es una fuerza perpendicular a la horizontal. Su magnitud se calcula mediante la fórmula $P = m \cdot g$, donde g corresponde a la aceleración de gravedad ($g \approx 9{,}8\ m/s^2$).

a. En parejas: ¿Qué condiciones debe cumplir la fuerza mínima generada por el motor del auto para compensar la fuerza que tira el auto hacia abajo en dirección de la pendiente?

b. Determina la fuerza mínima que debe generar el motor para moverse para contrarrestar el peso del auto.

c. Determina la fuerza mínima que debe generar el motor para moverse para contrarrestar el peso del auto para $\alpha = 30°$.

▶ Para concluir

a. ¿Qué elementos son necesarios para determinar las componentes de un vector? ¿Existe solo una manera de determinarlos?

b. ¿Por qué fue importante simplificar los modelos a triángulos rectángulos durante el desarrollo de este tema?

Antes de continuar: Evaluación intermedia

Vectores que se anulan

Materiales:

- Cartón o cartulina.
- Lápices de colores.
- Papel milimetrado u hojas cuadriculadas de cuaderno.
- Tijeras.
- Pegamento.
- Dados

Gracias a las funciones trigonométricas, puedes descomponer cualquier vector en componentes horizontales y verticales.

Este método convierte la suma/resta de vectores en una operación entre componentes.

Para este juego de vectores realizarán la competencia en parejas.

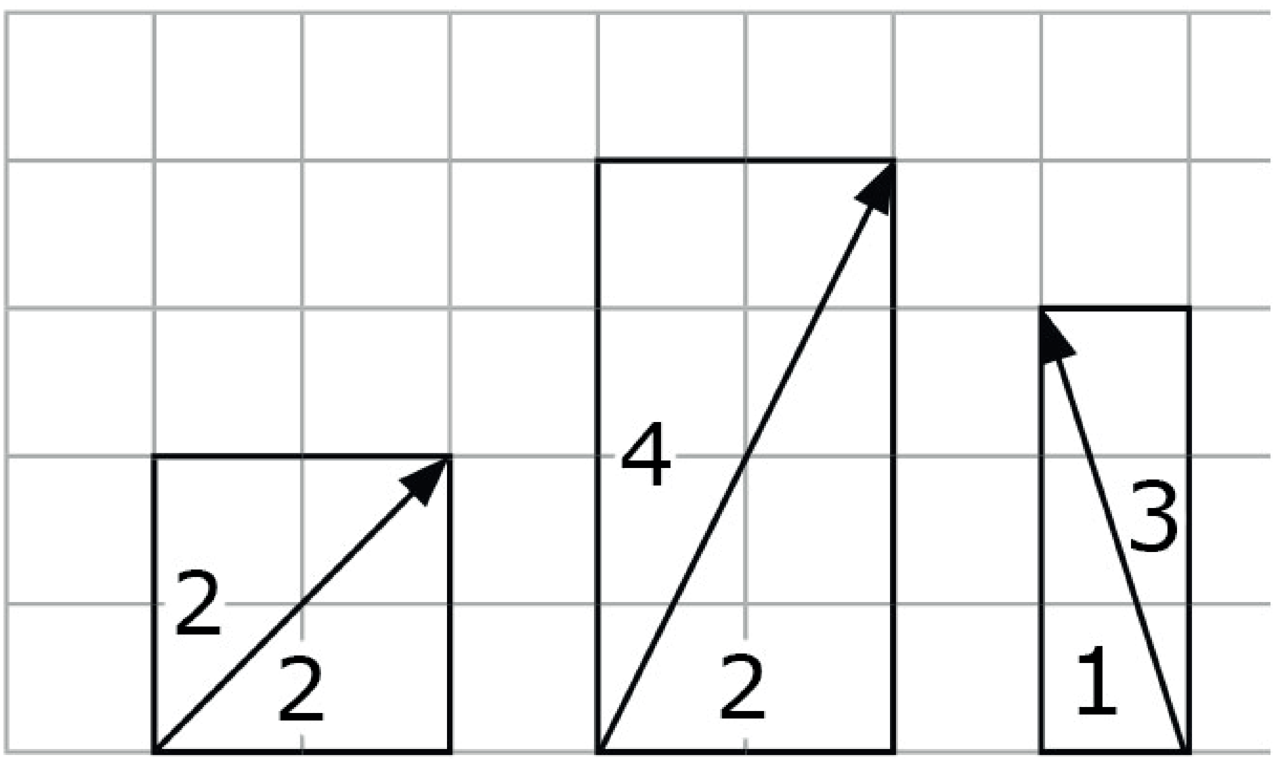
Instrucciones del juego:

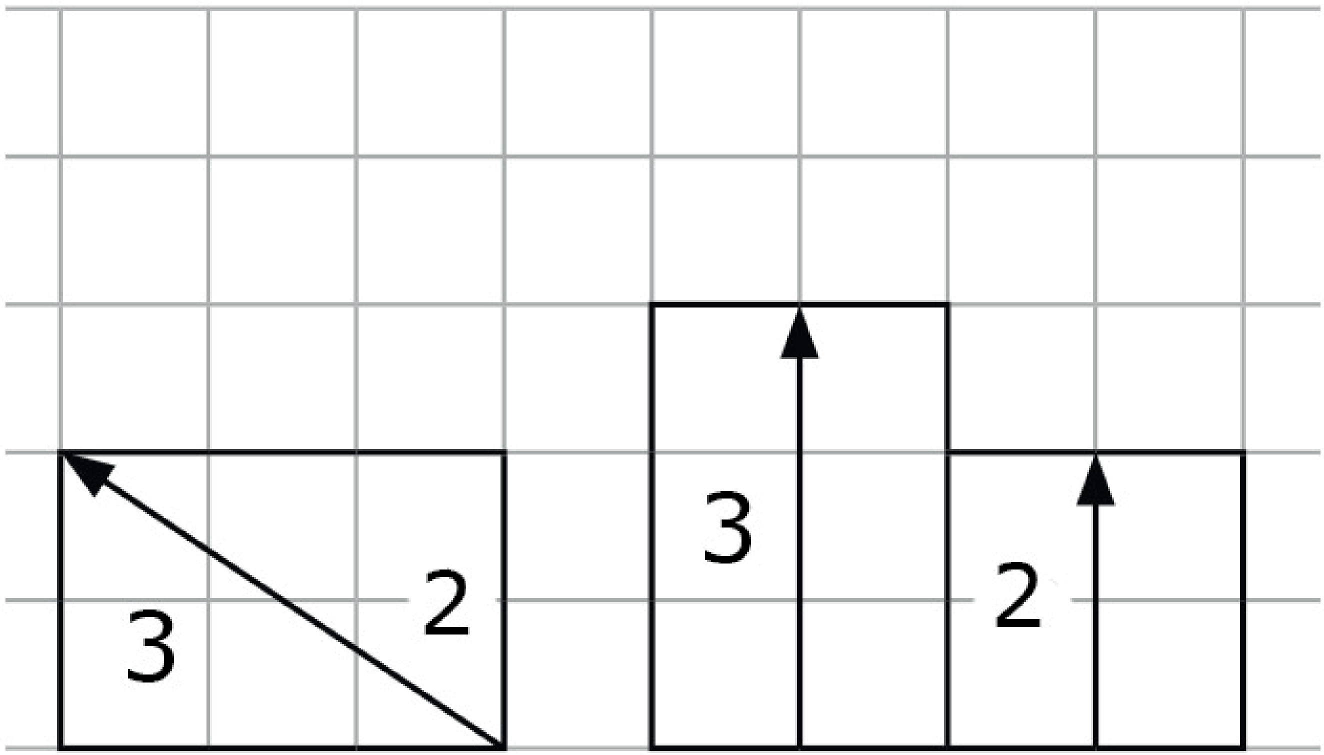
Para comenzar cada pareja lanza el dado y comienza la partida aquella que obtuvo el número mayor. La pareja coloca en la mesa una ficha cualquiera. Luego, la otra pareja continúa poniendo una ficha al lado. Cada vez que se pone una ficha, se suman los vectores. Gana la partida la pareja que logre anular el vector inicial.

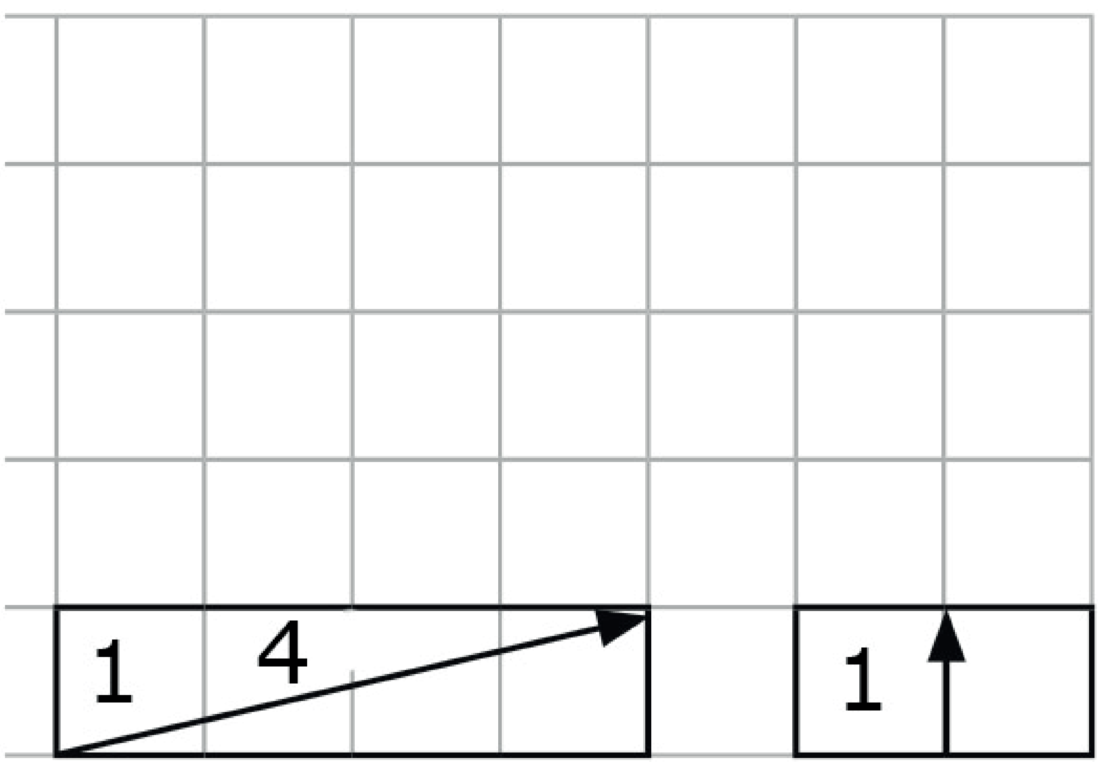
Se realizarán 10 partidas del juego para determinar a la pareja ganadora.

Elaborando las fichas:

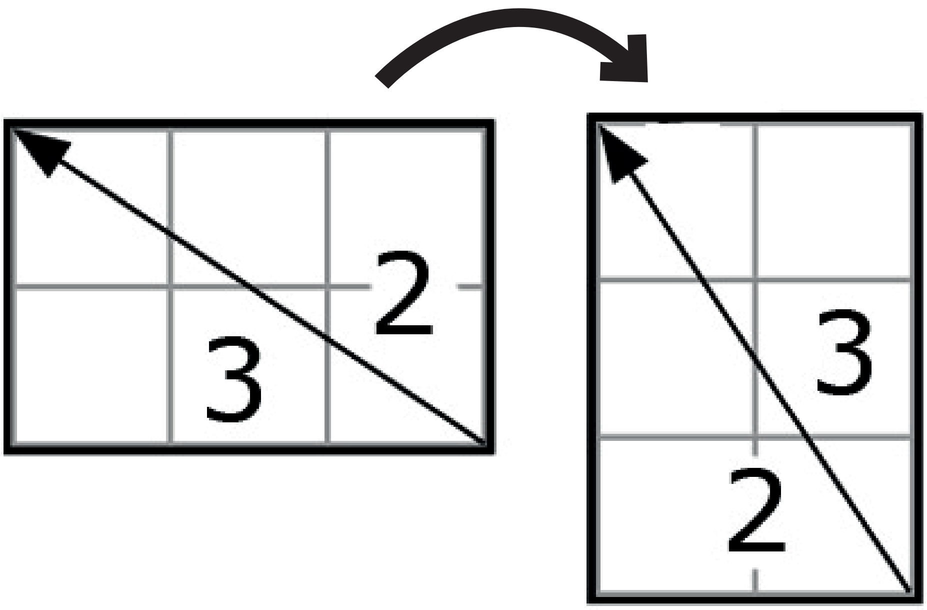
Paso 1: En una hoja cuadriculada dibujen los siguientes vectores. Escriban sus componentes en el mismo dibujo.




3
2
3
2


1
4
1

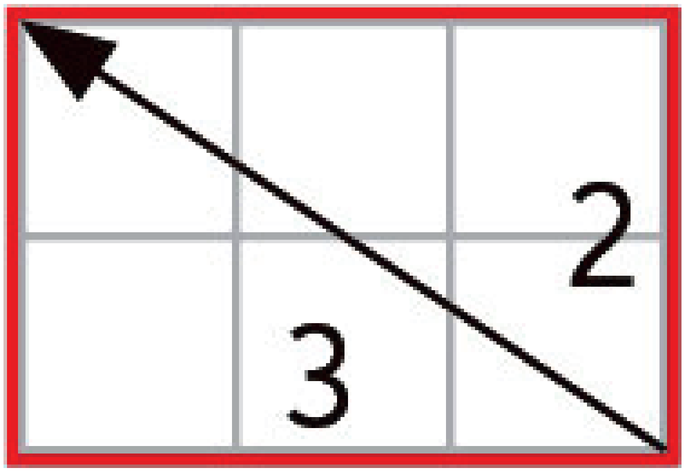
Paso 2: Recorten cada ficha y peguen en cartulina o cartón. Observen cómo, dependiendo la posición de la carta, las componentes indicadas pueden ser verticales u horizontales.



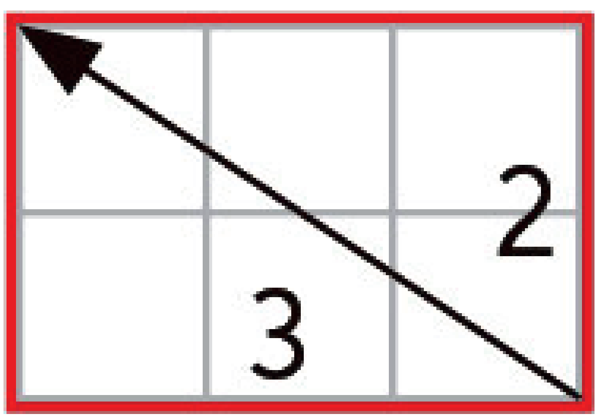
¿De cuántas formas diferentes es posible utilizar cada ficha?

Un ejemplo de juego:

Turno 1: (–3,2)

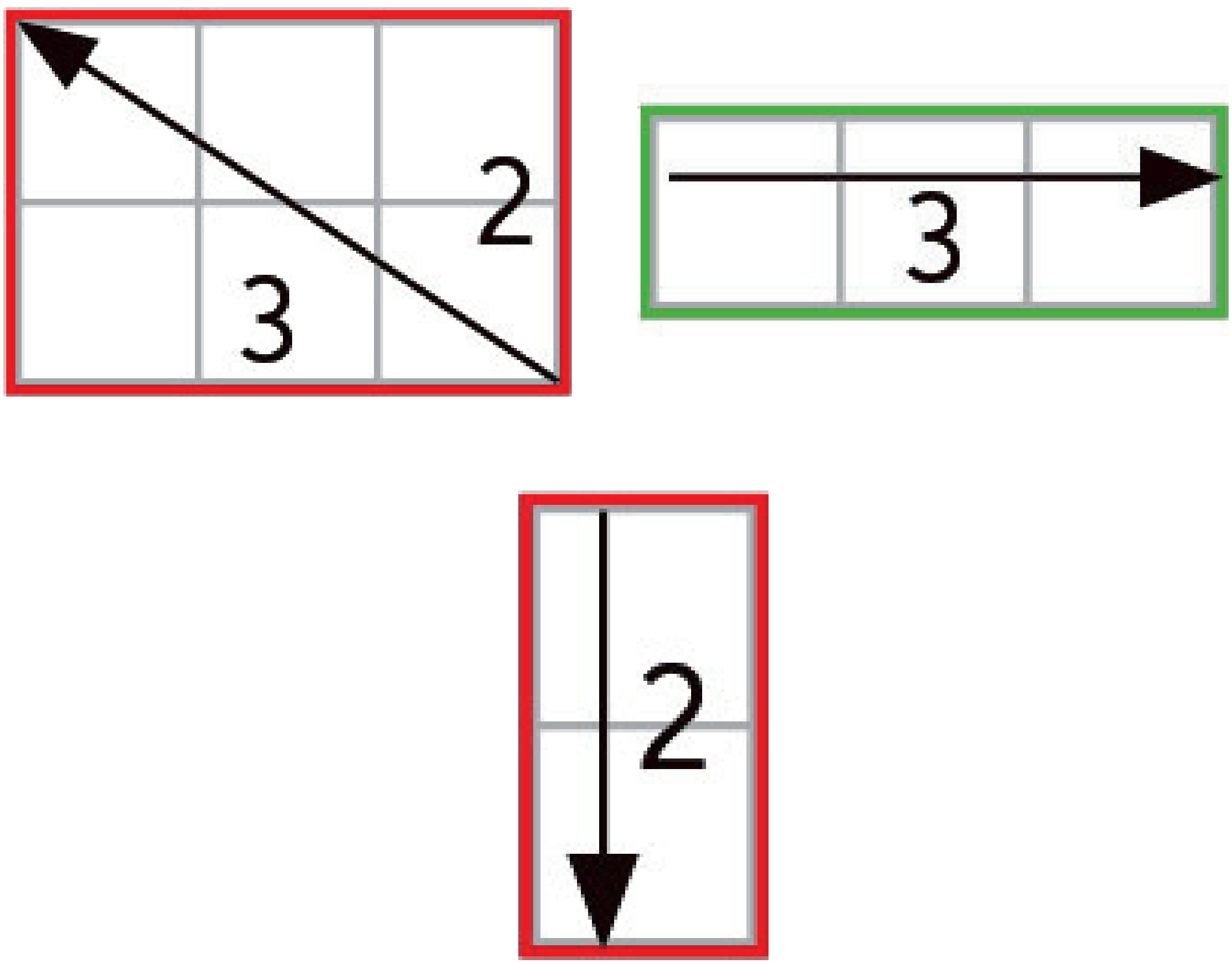


Turno 2: (–3, 2) + (3, 0) = (0, 2)



Turno 3:

(0, 2) + (0, −2) = (0, 0)



Paso 1: Comienza el equipo rojo colocando la ficha (-3,2)

Paso 2: Sigue el equipo verde colocando la ficha (3,0). Sumas las fichas y da como resultado el vector (0,2), por lo tanto, continúan la partida.

Paso 3: El equipo rojo coloca la ficha (0,–2). Al sumar los vectores, se obtiene (0,0). Por lo tanto, el equipo rojo gana la partida.

▶ Reflexiono

a. ¿Podría ocurrir que no se anule el vector resultante? Argumenta y da ejemplos.

b. ¿Crees que este juego te sirvió para reforzar el contenido de vectores? Explica.

c. ¿Qué importancia tiene para tu aprendizaje realizar este tipo de actividades?

¿Qué aprendí?

Evalúa los conocimientos adquiridos a lo largo de la Unidad realizando las siguientes actividades.

Sabemos que nuestro planeta no es una esfera perfecta. Sin embargo, podemos interpretarla como tal para calcular distancias con bastante precisión.

Por ejemplo, si recorremos cierta distancia sobre la línea ecuatorial, podemos calcular el ángulo recorrido con respecto al centro de la Tierra.

También podemos medir el área total de la superficie del planeta y, con ello, estimar su radio. Finalmente, a partir de ese último valor, podemos calcular un aproximado del volumen total de la Tierra.

▶ **Responde.**

1. Asumiendo que la Tierra posee la forma de una esfera perfecta, cuyo radio es de aproximadamente 6.300 km, determina:

a. ¿Cuál es el largo aproximado de la línea ecuatorial?

b. Sabemos que el agua cubre $\frac{3}{4}$ de la superficie terrestre. ¿A cuántos km^2

equivale su área total? ¿Cuántos km^2 corresponden a tierra firme?

c. La corteza terrestre mide un ancho promedio de 25 km. ¿Cuál es su volumen? ¿Cuál es el volumen del resto de nuestro planeta?

2. Analiza y resuelve los siguientes problemas:

a. Un modelo esférico de la Tierra tiene un radio de 4 m. Calcula la longitud de su línea del ecuador (circunferencia máxima) y el área de su superficie.

b. El radio de la base de un tarro cilíndrico de metal son 76 cm y su altura es el triple de su diámetro basal. Calcula el volumen máximo que podría tener una esfera para estar dentro de ese tarro.

c. Se tiene una esfera de 5 cm de radio y un cono con el mismo radio y altura 10 cm. ¿Cuál es la suma de sus volúmenes?

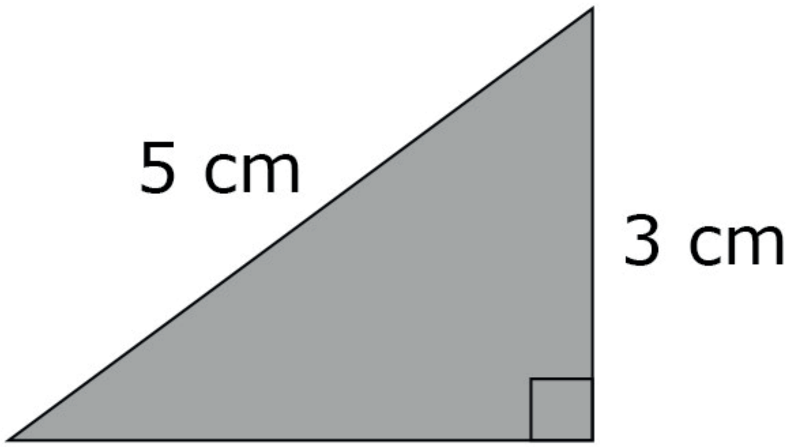
3. Un depósito de diésel tiene forma esférica y un radio de 2,5 metros. Indica su volumen en litros y el costo de llenarlo si el litro de diésel costara $600.

4. Se caminan 120 metros por una autopista recta. La depresión con respecto a la posición original es de 10 metros. Calcula el ángulo de inclinación de la carretera.

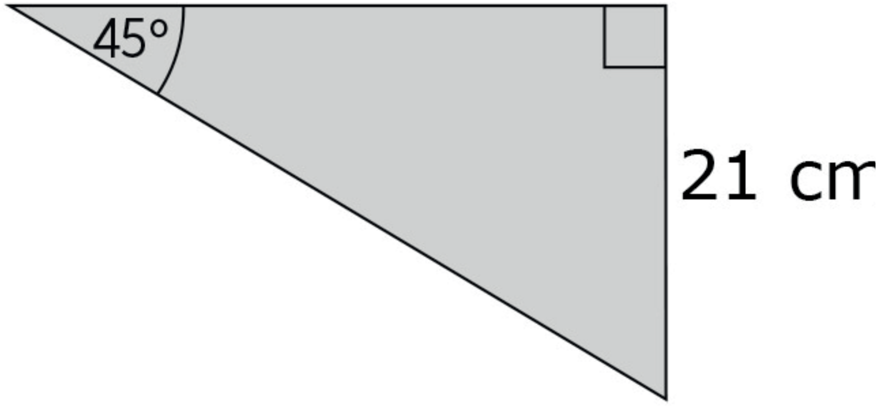
5. Un poste de 3 metros proyecta en el suelo una sombra de 1,2 metros. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de los rayos solares?

6. Completa los siguientes triángulos rectángulos. Indica los lados y ángulos que faltan en cada caso. Aproxima los valores a la décima:

a.

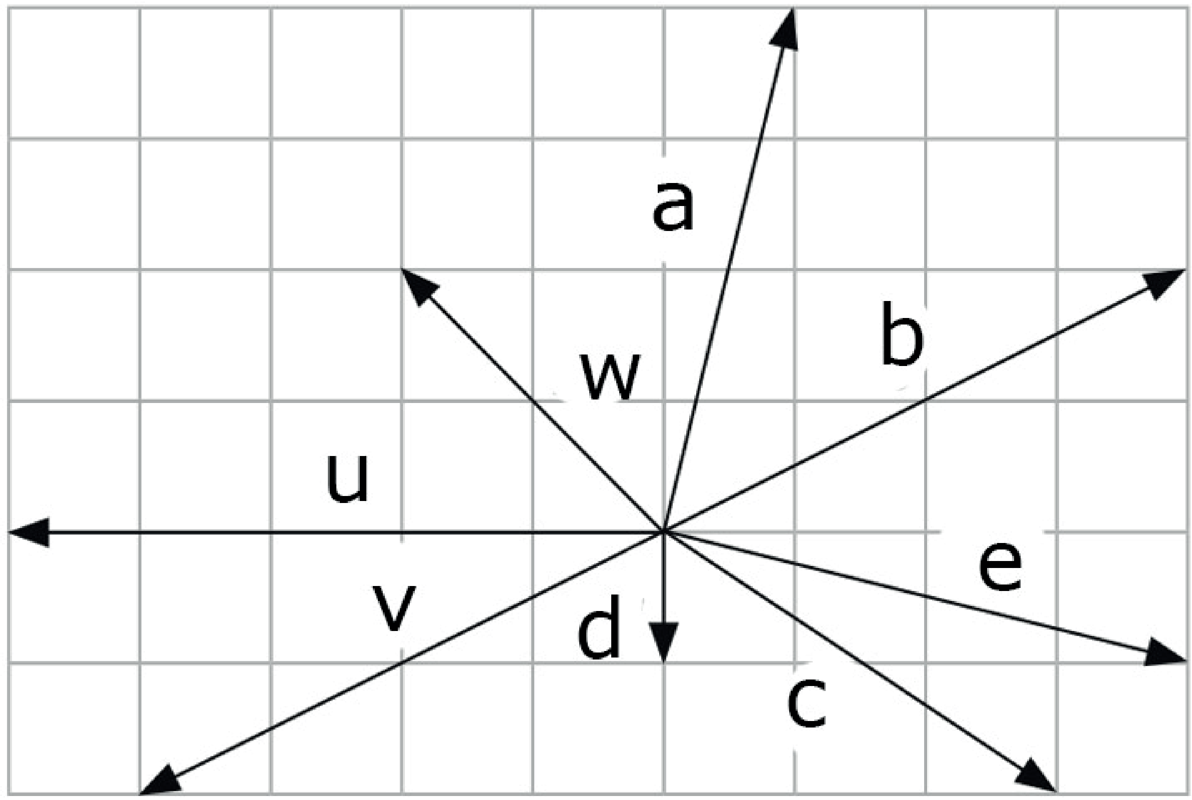


b.



c. Triángulo rectángulo cuyo cateto mide 12,5 cm y su hipotenusa, 19 cm.

7. Observa el siguiente grupo de vectores sobre el plano cartesiano.

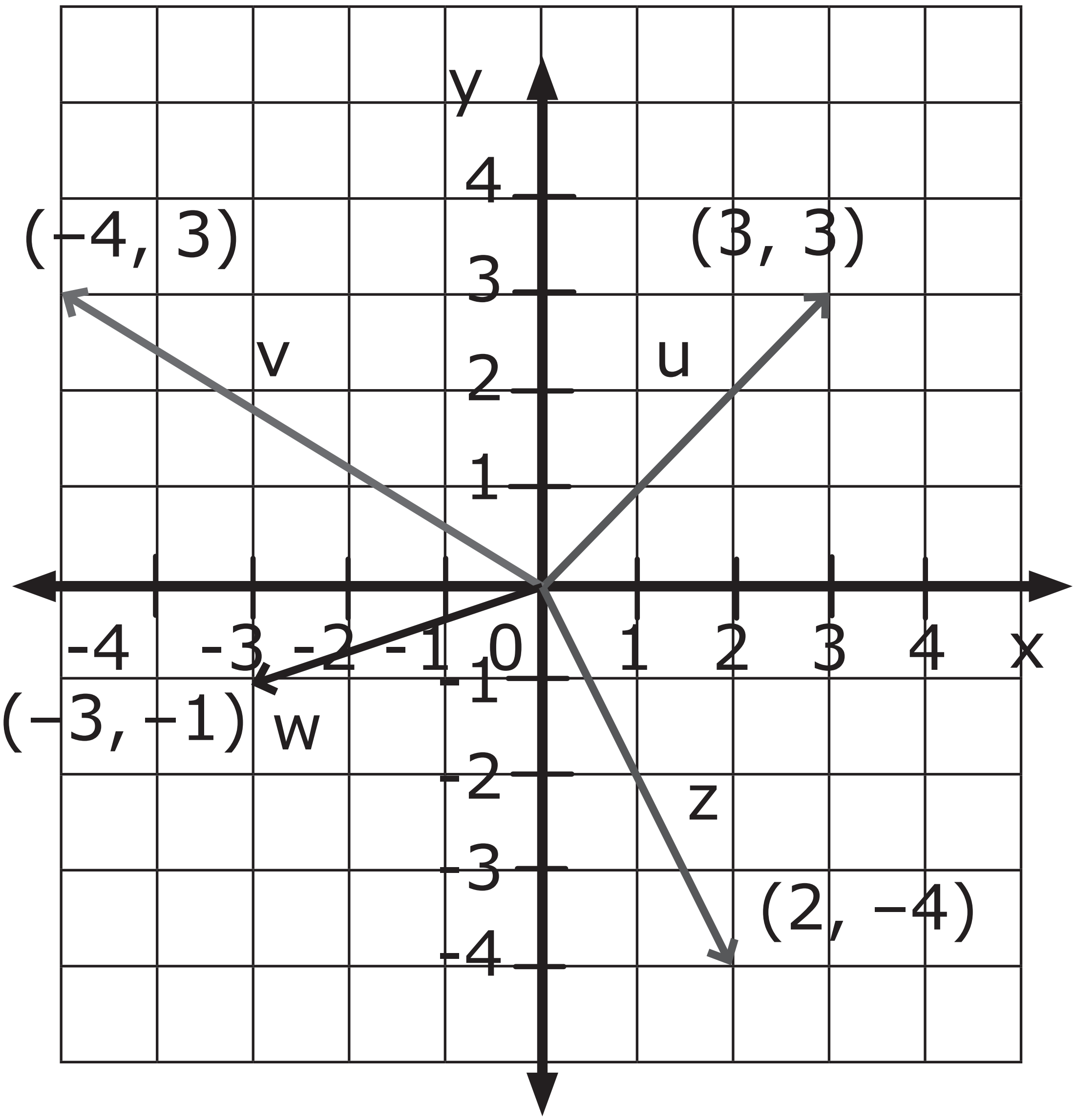


a. Indica sus componentes verticales y horizontales.

b. Con la relación trigonométrica adecuada, indica el ángulo de cada vector con respecto al eje horizontal.

c. Calcula el vector resultante de la suma de todos los vectores de la figura.

8. Determina las proyecciones de cada vector según la información entregada en la imagen.



▶ Reflexiono

- ¿Qué conocimientos de circunferencia utilizaste para determinar las medidas de una esfera?
- ¿Qué te resultó más difícil en esta evaluación? ¿Cómo podrías mejorar?

Unidad 3: Síntesis

Geometría

¿Qué es un sólido de revolución?

Es una figura sólida obtenida como consecuencia de hacer rotar una región plana alrededor de una recta.

¿Qué es una esfera?

Un cuerpo geométrico generado al girar una semicircunferencia alrededor de su diámetro.

¿Cómo se calcula el volumen de una esfera y el área de su superficie?

$V_{esfera} = \pi r^3$

$A_{superficie} = 4\pi r^2$

¿Qué son las razones trigonométricas?

Son relaciones que se establecen entre los lados de un triángulo rectángulo.

¿Cómo se calculan las razones trigonométricas en unos triángulos rectángulos?

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$$

¿Qué es un vector?

Es un segmento de recta orientado que tiene módulo, dirección y sentido.

¿Qué es el módulo de un vector y cómo se calcula?

Es la longitud de un vector $|\vec{V}| = (x,y)$ y se calcula $|\vec{V}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

¿Cómo se calculan las proyecciones de un vector?

$V_x = |\vec{V}|\cos(\alpha)$

$V_y = |\vec{V}|\text{sen}(\alpha)$

UNIDAD CUATRO

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

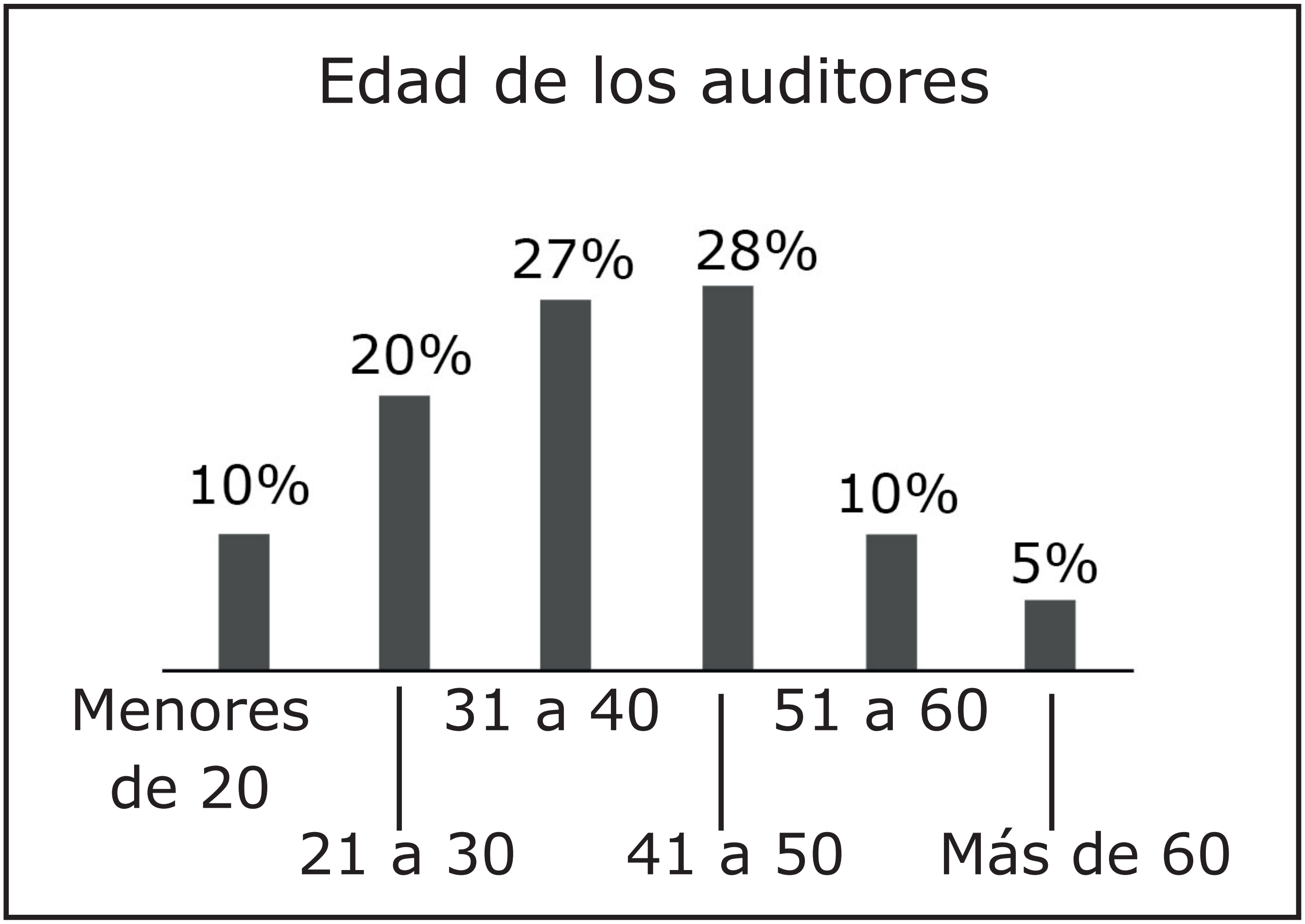
En esta Unidad aprenderás técnicas de conteos. También aprenderás el uso de variable aleatoria y la estadística en los medios de comunicación.

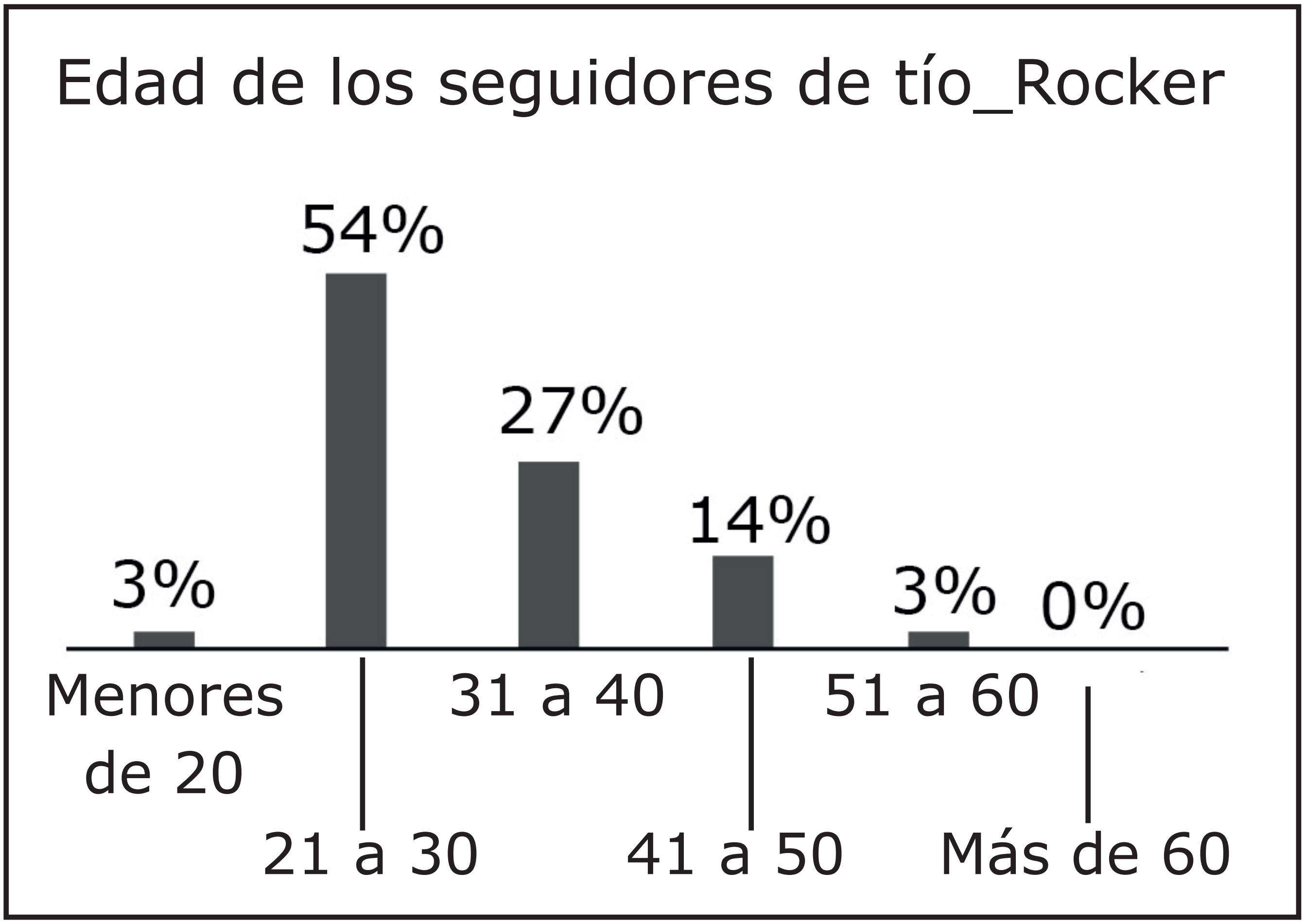
Instagram cuenta con más de 900 millones de usuarios activos. Una radio decide incluir al tio_rocker, instagrammer con 500.000 seguidores, como parte permanente de su nueva programación.

1. ¿Qué otras estrategias conoces para hacer que los clientes de una marca se sientan "más cercanos"? Ejemplifica.

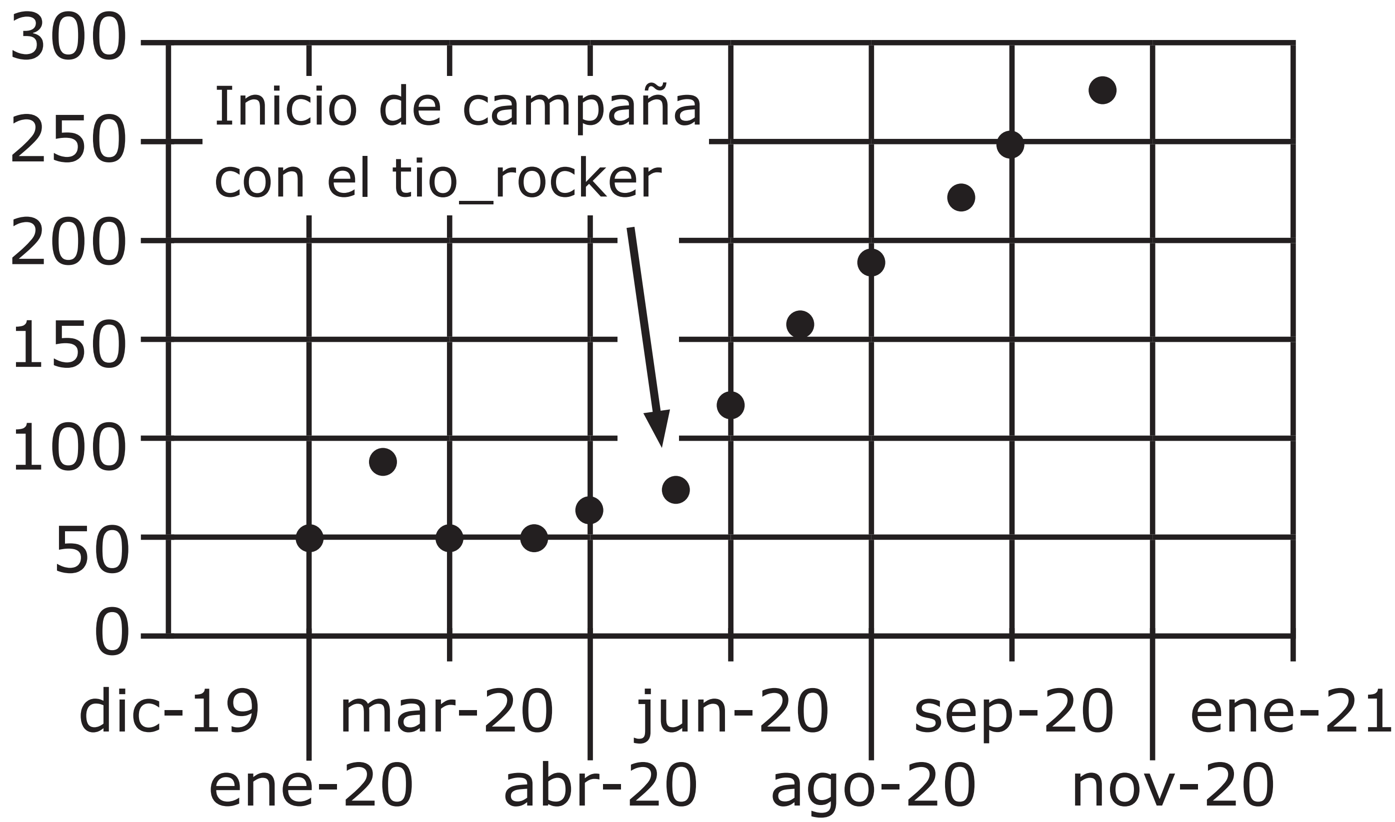
2. ¿Qué variables miden los gráficos? ¿Cuáles pueden ser sus valores?

3. ¿Qué gráfico(s) utilizarías para evaluar si el tio_rocker fue una buena estrategia para promocionar la radio? Discute con tu curso.




Edad de los seguidores de tío_Rocker
54%
27%
14%
3%
3%
0%
Menores de 20
21 a 30
31 a 40
41 a 50
51 a 60
Más de 60

Interacciones con la radio en redes sociales (en miles)



El engagement (palabra inglesa que significa compromiso) es un término utilizado en publicidad. Con él se describe la cercanía entre una marca y las personas que la siguen en el mundo digital.

Existen muchas maneras de medirlo. Algunas son las veces que un cliente realiza una compra, las de las visitas al sitio web, las interacciones de las redes sociales (como los "me gusta") y la cantidad de comentarios en las publicaciones.

4. Se premia a un auditor elegido al azar y a un seguidor del tio_rocker. ¿Es posible que ambos seleccionados tengan entre 21 a 30 años? ¿Y qué ambos tengan más de 60 años?

5. ¿Qué otras variables, que no se encuentren en los gráficos, podrías utilizar para evaluar el efecto del tio_rocker en la promoción de la radio? Da 3 ejemplos.

Activo lo que sé: Evaluación diagnóstica

1. Define con tus palabras los siguientes conceptos.

a. Espacio muestral

b. Experimento aleatorio

c. Probabilidad

d. Principio multiplicativo

e. Diagrama de árbol.

2. Determina el espacio muestral y la cardinalidad que asociamos a los siguientes experimentos aleatorios.

Por ejemplo:

Lanzar dos monedas tenemos cara (c) y sello (s)

$$\Omega = \{\{c, c\}; \{c, s\}; \{s, c\}; \{s, s\}\}$$

a. Lanzar dos monedas y un dado.

b. Sacar una bolita de una caja que contiene 3 bolitas de color rojo,1 azul y 2 amarillas. Luego lanzar al aire una moneda.

3. Gabriel necesita escoger su vestimenta para una fiesta. En su clóset tiene 5 camisas, 3 jeans, 2 pantalones de tela, 4 zapatos y 7 cinturones. ¿Cuántas tenidas diferentes tiene para escoger? Realiza un diagrama de árbol como ayuda.

4. En una urna hay bolitas numeradas del 5 al 30. Si se saca una bolita al azar, calcula las siguientes probabilidades.

a. Obtener un número multiplo de 5.

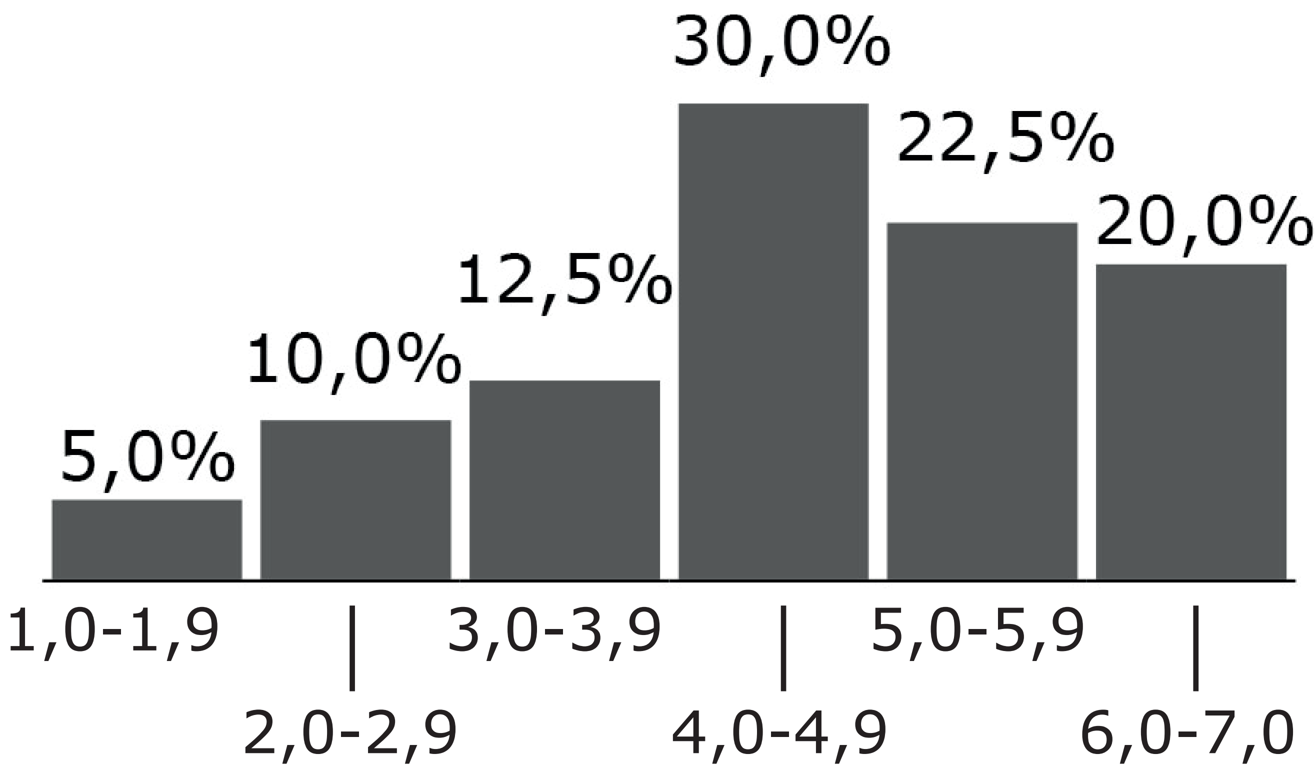
b. Obtener un número primo.

c. Obtener un número par y mayor que 20.

d. Obtener un número mayor que 15 o divisor de 30.

5. El siguiente gráfico muestra la distribución de notas de 40 estudiantes de un curso.

Notas finales



Al respecto:

a. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron nota azul?

b. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron nota inferior a 6,0?

c. Supón que esta gráfica representa la probabilidad de obtener una nota. ¿Cuál es la probabilidad de que, en un curso de 30 personas, alguien obtenga nota entre 6 y 7?

6. Resuelve los siguientes desafíos:

a. Calcula la probabilidad de que, al elegir una carta al azar de un naipe inglés, el número sea mayor a 10.

b. Los tomos de un diccionario están numerados del 1 al 5. ¿De cuántas formas diferentes se los puede ordenar en la misma repisa?

c. Se lanza un dado de seis caras numeradas. ¿Cuál es la probabilidad de que el número obtenido sea par o menor que 3?

d. Se lanzan dos monedas. ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera se obtenga cara y en la segunda sello?

▶ Reflexiono

¿Hay alguna actividad que te generó dificultades? ¿Por qué?

¿Te sientes preparado para comenzar esta Unidad?

¿Qué conceptos es necesario reforzar?

Lección 10: Técnicas de conteo

Principios básicos de conteo.

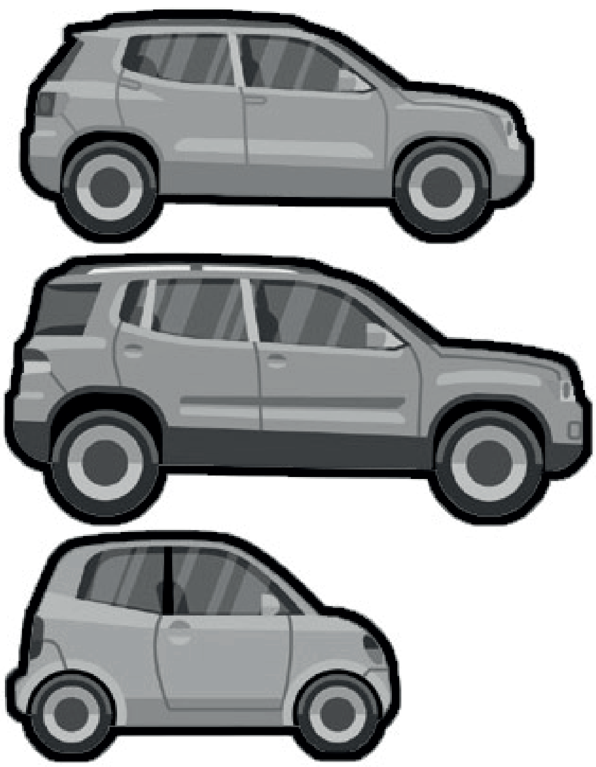
¿En qué consiste un experimento aleatorio?

¿Cómo se determina el espacio muestral de un experimento aleatorio?

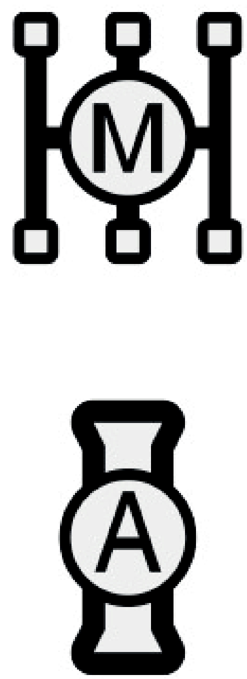
Objetivo: Aplicar el principio aditivo y multiplicativo para resolver problemas.

1. Analiza la siguiente situación y realiza las actividades.

En una automotora se tienen las siguientes opciones para la compra de un automóvil.



Modelo de automóvil



Tipo de transmisión

a. Realiza un diagrama de árbol que represente las posibilidades que tiene un cliente para elegir un automóvil.

b. ¿Cuántas opciones de automóvil tiene un cliente para elegir?

c. ¿Qué operación crees que se debería realizar para obtener el número de opciones de automóvil que existen? Elabora una conjetura y discútela con tu curso.

Durante la última semana, la automotora se ha provisto de más automóviles. Ahora da la posibilidad de que los clientes pueden elegir diferentes colores de automóvil. Estos son: rojo, plata, blanco, azul y dorado.

d. Realiza un diagrama de árbol que represente la cantidad de posibilidades que tiene un cliente para elegir su automóvil.

e. ¿Cuántas opciones de automóvil tiene un cliente para elegir?

Contar la cantidad de elementos de conjuntos, relacionarlos todos entre sí o formar subgrupos respondiendo a determinadas características permite conocer de antemano el número de elementos muestrales en dicho experimento.

Las técnicas de conteo que estudiarás en esta lección permiten determinar el número de elementos de un espacio muestral en un experimento aleatorio, teniendo en cuenta el orden y la repetición de los elementos.

Algunas son: el principio de multiplicación, la permutación y la combinación; las cuales se pueden complementar con diagramas de árbol.

En el caso anterior, ¿se verifica la conjetura que hiciste en la actividad anterior?

El principio multiplicativo establece que, si un procedimiento se compone de dos etapas, que tienen respectivamente m y n posibilidades, entonces dicho procedimiento tiene $m \cdot n$ casos posibles en total. Si luego se agrega una nueva etapa, que tenga p posibilidades, el procedimiento tendrá $m \cdot n \cdot p$ casos posibles. Es decir, siempre se multiplica por la cantidad de posibilidades de cada etapa.

Por ejemplo, para el lanzamiento de un dado y una moneda, se tiene que el espacio muestral del dado es 6 y la moneda 2. Luego la cantidad total de posibilidades son $6 \cdot 2 = 12$.

2. En un experimento se extrae una bolita de la urna como la que se muestra en la imagen.

a. ¿Cómo expresarías el producto que permite calcular los resultados posibles de una extracción de 3 pelotitas con reposición?

b. ¿Cuántos resultados posibles tiene el experimento?

c. La extracción de las tres pelotitas se realiza sin reposición. ¿Cómo se expresa el producto que permite calcular los resultados posibles del experimento? ¿Cuántos resultados posibles tiene este experimento?

Observa los resultados de a y c. ¿Cómo influye en el resultado el tipo de extracción que se realizó?

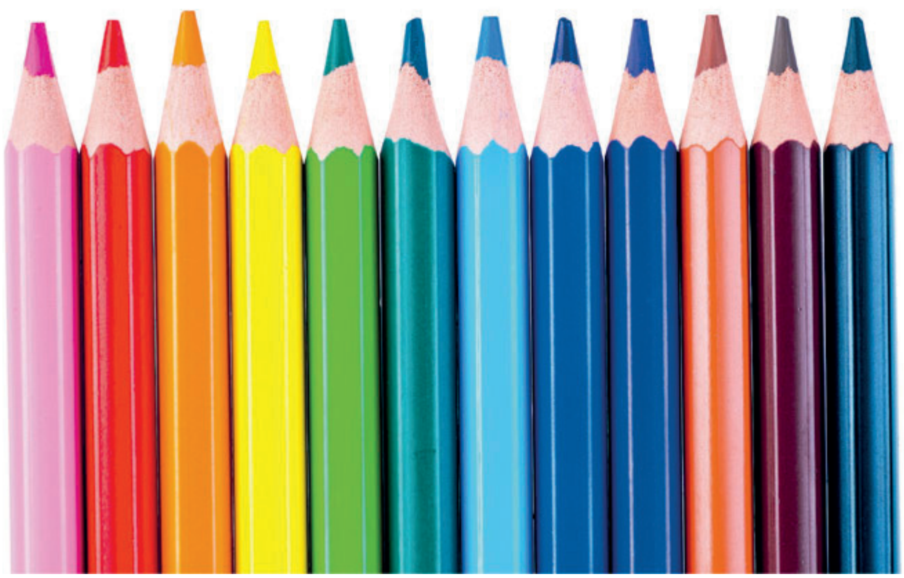
3. En una competencia de atletismo, participan Hugo, Marcelo, Emilio y Rubén. Las marcas que ellos obtengan determinarán los cuatro lugares de la competencia.

a. ¿Cuáles son todos resultados posibles? Escriban todas las posibilidades.

b. El entrenador cree que Marcelo ganará la competencia y que Hugo resultará último. Si así fuera, ¿cuántos son los resultados posibles?

c. Si se agrega un quinto competidor, ¿cuántos serían los resultados posibles en total?

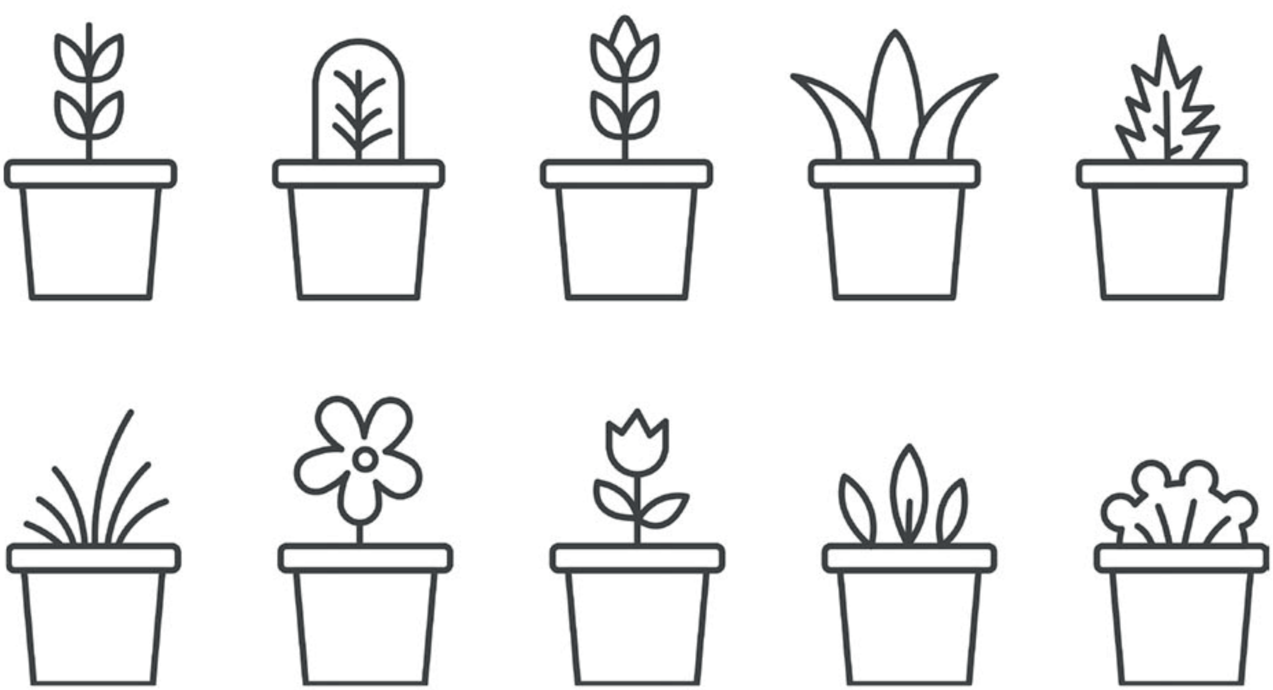
4. Martina decide pintar el siguiente dibujo con los lápices que se muestran en la figura. Ha decidido pintar cada maceta de un color diferente.



a. ¿Cuántas opciones tiene Martina para pintar los maceteros del dibujo? Exprésalo como la multiplicación de factores.

b. Si Martina decidiera pintar los dos primeros maceteros del mismo color, luego los dos siguientes de otro color, y así sucesivamente. ¿Cómo expresarías la multiplicación que permite obtener el resultado?

c. ¿Cuántas combinaciones posibles hay el caso anterior?



5. La familia Tapia tiene diferentes alternativas para viajar en sus próximas vacaciones. Para decidir, han definido las siguientes categorías acerca de las que deben decidir.

Lugar geográfico	Destino turístico	Transporte	Tipo de alojamiento
Norte	Playa	Bus	Hotel
Sur	Campo	Automóvil	Cabañas
	Montaña	Avión	Camping
	Lago		

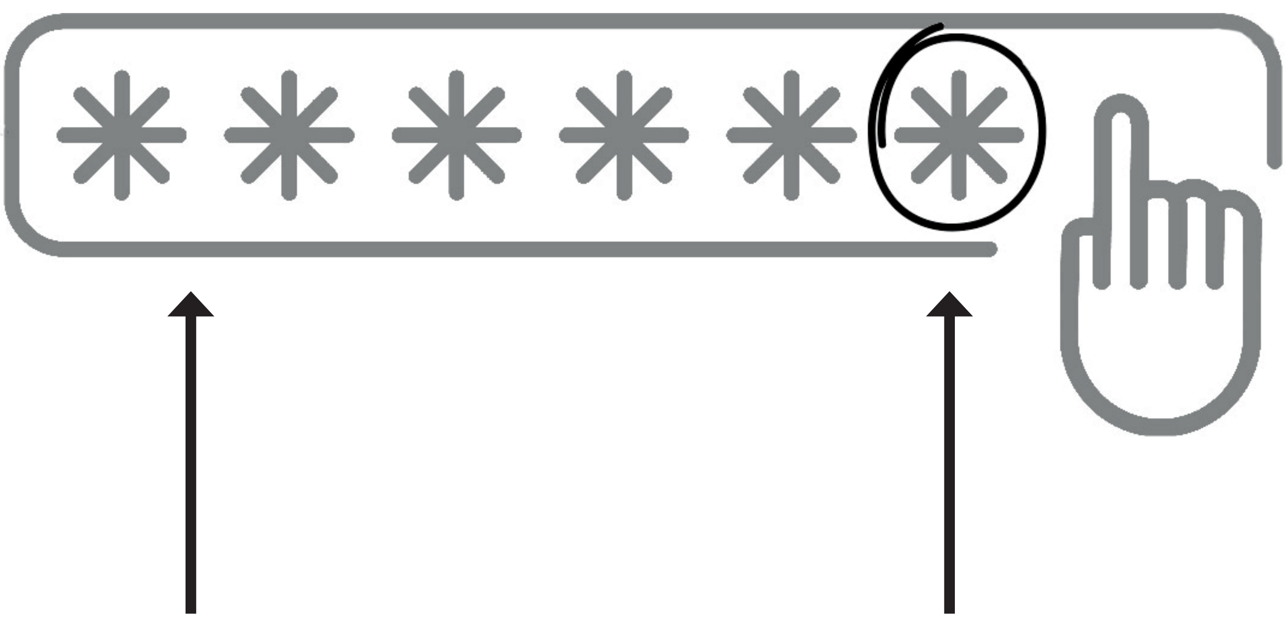
a. ¿Cuántas opciones tienen en total los Tapia para sus vacaciones?

b. Supón que viajan en bus. ¿Cuántas opciones tienen para vacacionar?

606

c. Imagina que deciden no viajar en avión ni ir al campo. ¿Cuántas opciones tienen para vacacionar?

6. Por seguridad, una empresa solicita a sus trabajadores que creen una clave para sus cuentas institucionales. La clave debe ser:



6 caracteres en total

Dígito (del 0 al 9) o letra (A – Z, sin la Ñ)

Por ejemplo, el total de claves con 6 dígitos son:

Con repetición: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000.000$ claves distintas

Sin repetición: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151.480$ claves distintas

a. ¿Cuántas opciones distintas se puede poner en cada carácter?

b. ¿Cuántas claves pueden crearse si la secuencia debe ser dígito – dígito – letra – letra – dígito – letra, y no pueden repetirse ni letras ni dígitos?

c. ¿Cuántas claves pueden crearse si la secuencia debe ser letra – dígito – dígito – letra – dígito – letra, y no pueden repetirse los dígitos?

d. Se incluye, además, la diferenciación entre mayúsculas y minúsculas. ¿Cuántas combinaciones más se agregan para cada carácter? ¿Las consideras más seguras?

▶ Para concluir

a. ¿Cuál es la utilidad de un diagrama de árbol y en qué casos se puede utilizar?

b. Inventa un problema en el cual se utilice el principio multiplicativo y resuélvelo.

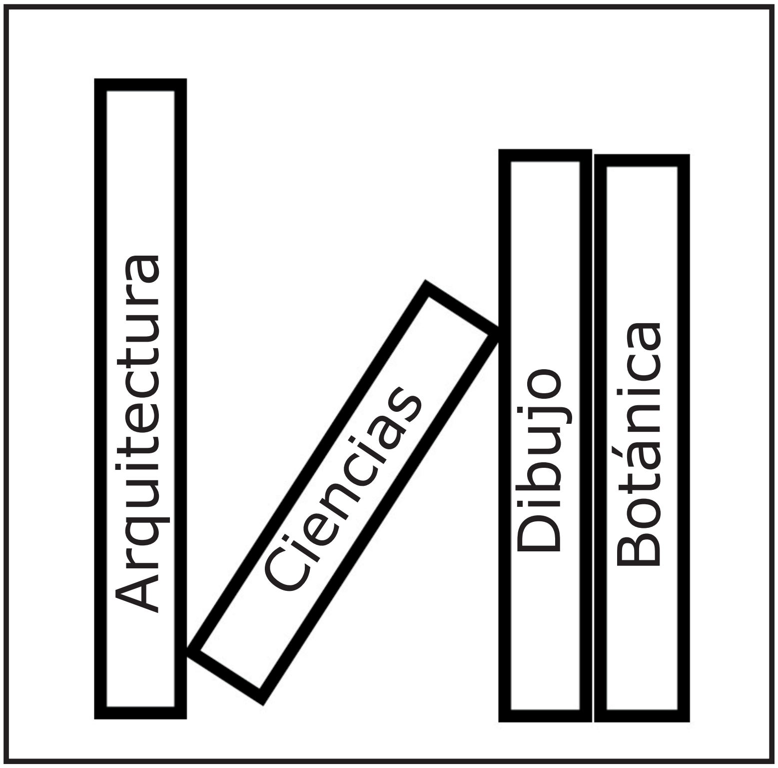
Permutaciones

¿De cuántas formas posibles se pueden ordenar las letras de la palabra UNO?

¿En qué casos utilizarías el principio multiplicativo?, ¿en cuáles no?

Objetivo: Aplicar permutaciones para calcular probabilidades y resolver problemas.

1. Antonia quiere saber de cuántas maneras puede colocar en el estante de su casa los libros que se muestran en la imagen.



a. En parejas, anoten todas las posibles formas en las que se puede ordenar los libros.

b. ¿Cuántas formas distintas hay de ordenar los libros? Compara tu respuesta con otra pareja.

c. Si el primer libro de izquierda a derecha es el de Ciencias, ¿en cuántas de ellos el segundo libro es Arquitectura? ¿Es la misma cantidad para aquellos casos en que el segundo libro es otro?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que, al ordenar al azar sus libros, el primer libro sea el de Ciencias?

Describe el procedimiento utilizado para hacer la lista de todas las posibles formas de ordenar el estante.

Una permutación de un conjunto de n elementos corresponde a la ordenación de estos. El número total de permutaciones entre n elementos distintos se denota como Pn y está dado por:

$$Pn = n!$$

Donde n! se llama n factorial y corresponde al producto:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Además, se considera $0! = 1$

Por ejemplo:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Para calcular el total de permutaciones de n elementos, de los cuales uno de ellos se repite p veces, otra q veces, otro r veces, y así sucesivamente, puedes aplicar la siguiente expresión:

$$P^{n}_{p,q,r} = \frac{n!}{p! \cdot r! \cdot q!}$$

Por ejemplo:

¿Cuántos números distintos de tres cifras diferentes se pueden escribir con los dígitos 1, 2 y 3? Identificamos las características del problema:

- Se consideran todos los elementos
- No se repiten
- El orden importa

Anotamos los números:

123	213	321
132	231	312

$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Si un elemento o más se repiten, ¿aumenta o disminuye la cantidad de órdenes posibles? Justifica.

2. Calcula:

a. P_3

b. P_7

c. P_9

d. $P_5 \cdot P_2$

e. $P_7 : P_5$

f. $P_{12} : P_3$

3. Identifica a qué tipo de permutación (con o sin repetición) corresponden los siguientes casos:

a. Las formas en que se pueden ordenar los puestos de trabajo de 10.

b. Las formas en que se pueden ordenar las letras de la palabra EXTERIOR.

c. El orden en que se que puede reproducir una lista de 15 canciones.

d. Las formas en que se pueden ordenar los dígitos 01255797.

4. En una fila hay 6 sillas. Estas son para Daniel, Elías, Andrea, Carmen, Isabel, Laura.

a. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar las 6 personas en las sillas?

b. Se decide que los dos hombres deben quedar en los extremos de la fila. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar las personas?

c. ¿Qué técnica empleaste para resolver el caso anterior? Coméntala junto a tu curso.

5. Diego quiere formar una clave para su candado que contenga los números 2, 2, 5, 8.

a. ¿Cuántas claves diferentes puede formar? Anótalas.

b. ¿Qué similitudes y diferencias encuentras entre esta situación y la actividad anterior?

6. Se tienen los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

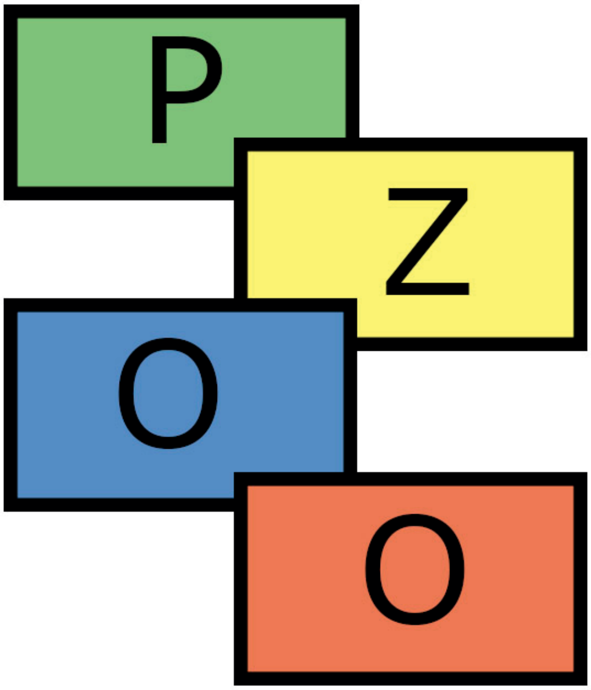
a. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar los dígitos si el 5 y el 1 deben quedar en los extremos?

b. ¿Qué estrategia utilizaste para calcular el caso anterior?

c. Se quiere que el 3 y el 7 queden en los extremos y el 4 en el centro. ¿De cuántas maneras cuántas maneras diferentes se pueden ordenar los dígitos?

¿Qué estrategia utilizaste para calcular el caso anterior? Compárala con tu curso.

7. Un concurso consiste en extraer 4 sobres de la tómbola que se muestra en la imagen. Si un concursante logra extraer los sobres con letras en el orden POZO, recibe un premio. ¿Cuál es la probabilidad de que un concursante gane el premio?



▶ Para concluir

a. ¿En qué consiste una permutación? ¿Qué tipos de permutación conoces?

b. ¿Qué representación del experimento te ayudó a entender las permutaciones y su relación con el número factorial?

620

Variaciones

¿Qué características tienen las permutaciones?

¿En qué casos se aplican las permutaciones?

Objetivo: Aplicar variaciones para calcular probabilidades y resolver problemas.

1. Analiza la siguiente situación y realiza las actividades.

En una carrera de ciclismo se tienen cuatro competidores. De ellos, serán premiados los tres primeros lugares con las medallas de oro, plata y bronce.

Los competidores son: José, Jaime, Rodrigo y Francisco.

a. ¿Es importante el orden en el que cada ciclista finalice la carrera?, ¿por qué? Justifica.

b. ¿De cuántas formas posibles se pueden entregar las medallas de oro, plata y bronce? Anota las posibilidades.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que Francisco obtenga el primer lugar?

Se llama variación de k elementos escogidos entre n y se denomina a la cantidad de ordenamientos posibles de k elementos, escogidos entre n.

- Una variación sin repetición se calcula como:

$$V_k^n = \frac{n!}{(n - k)!}$$

- Una variación con repetición se calcula como:
  $Vr_{k}^{n} = n^{k}$

Por ejemplo:

Calcular cuántos números de dos dígitos se pueden formar utilizando las tarjetas: 4, 5 y 7.

- Sin repetición:

Los números que se pueden formar son: 45 – 47 – 54 – 57 – 74 – 75

El resultado anterior se puede comprobar mediante la fórmula. En este caso, n = 3 y m = 2, y además los números no se pueden repetir, se obtiene:

$$V_{2}^{3} = \frac{3!}{(3 - 2)!} = 3! = 6$$

- Con repetición:

Los números que se pueden formar son: 44 – 45 – 47 – 54 – 55 – 57 – 74 – 75 – 77

El resultado anterior se puede comprobar mediante la fórmula. En este caso, n=3 y m=2, y además los números no se pueden repetir, se obtiene: $V^3_2 = 3^2 = 9$

¿En qué atributos de una situación te fijarías para distinguir si una situación corresponde a una permutación o a una variación?

2. Si a la carrera de ciclismo se suma otro competidor, Alejandro. Responde:

a. ¿A qué tipo de variación corresponde esta situación?

b. ¿Cuántos participantes quedarán sin premio?

c. ¿Cuáles son los valores de n y k en esta nueva variación?

d. Calcula el número de combinaciones posibles para la obtención de las medallas de oro, plata y bronce.

e. ¿Cuál es la probabilidad de que Alejandro obtenga el primer lugar?

f. ¿En cuántas combinaciones Alejandro obtiene el primer lugar y Jaime obtiene el segundo lugar? Expresa tu resultado como una variación.

¿Qué estrategia utilizaste para resolver la actividad anterior? Explica.

3. Calcula:

a. V^{7}_{2} **b.** V^{10}_{4} **c.** V^{23}_{5}

d. Vr^{8}_{2} **e.** Vr^{6}_{4} **f.** Vr^{15}_{6}

4. Determina el valor de n o k según corresponda:

a. $Vr^{n}_{3} = 216$ **d.** $Vr^{n}_{3} = 125$

b. $Vr^{8}_{k} = 512$ **e.** $Vr^{2}_{k} = 32$

c. $Vr^{n}_{2} = 121$ **f.** $Vr^{n}_{4} = 1.296$

5. Resuelve los siguientes problemas:

a. ¿Cuántas palabras, con o sin sentido, de 5 letras no repetidas se pueden formar con las letras de la palabra SECTOR?

b. Cinco estudiantes se presentan de candidatos para la directiva del curso. Se debe escoger a tres de ellos para ocupar los cargos de presidente, secretario y tesorero. ¿Cuántas son las directivas posibles?

c. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden construir utilizando los dígitos 2, 4, 6 y 8?

d. En cierto país, las patentes vehiculares están formadas solo por 4 letras del abecedario distintas (incluyendo la ñ). ¿Cuántas patentes se pueden formar con esa condición?

e. La contraseña de cierto tipo de cuenta consiste en un número de 4 dígitos cuyas cifras se pueden repetir. A esto, le siguen 3 vocales que no se pueden repetir. ¿Cuántas contraseñas se pueden crear siguiendo dichas condiciones?

6. Cada uno de los profesores de Matemática, Física y Química elegirá secretamente a un estudiante de 9 posibles para participar en un seminario.

a. Para este caso, ¿cuál es el tipo de variación?

b. ¿Cuántas ternas de estudiantes se pueden formar?

7. Se lanza un dado de 12 caras tres veces.

a. ¿Cuántos son los resultados posibles?

b. Si se lanza el mismo dado una vez más, ¿en cuánto aumentan la cantidad de resultados?

▶ Para concluir.

a. ¿Qué tuviste dificultades para resolver las actividades del tema?

b. ¿En qué aspectos de una situación te fijarías para determinar que se debe utilizar una variación?

Combinaciones

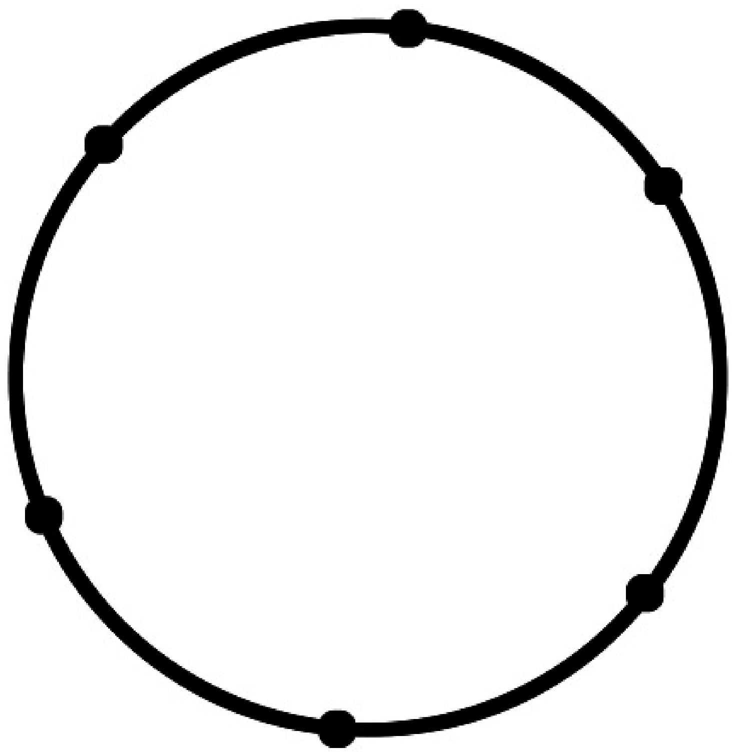
¿Cómo se calcula una variación sin repetición?

¿Importa el orden dentro de una variación?

Objetivo: Aplicar las combinaciones para calcular probabilidades y resolver problemas.

1. Analiza la siguiente situación y realiza las actividades.

En una circunferencia, se han trazado 6 puntos, como se muestra en la figura.



a. Se quiere formar triángulos distintos utilizando los triángulos. Si la consideramos una variación sin repetición, ¿cuáles serían los valores de n y k?

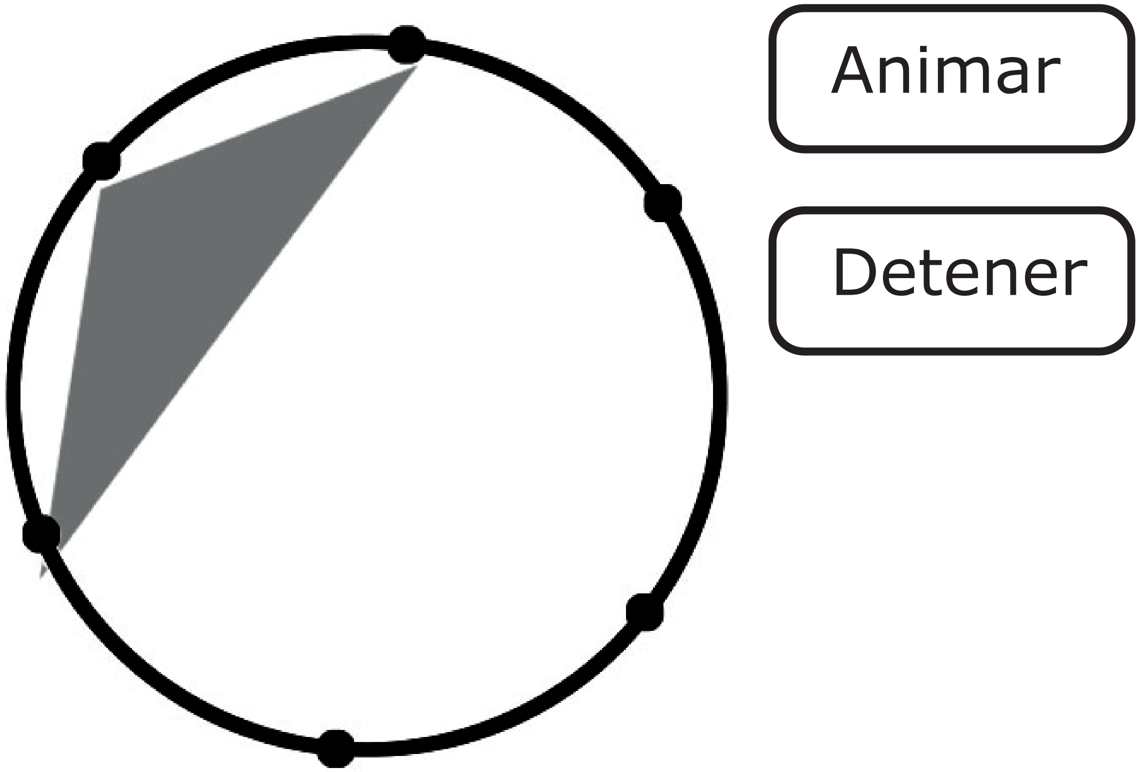
b. ¿Cuántos órdenes posibles determinaste para el caso anterior?

c. Considera un triángulo cualquiera. ¿Cuántos órdenes posibles de sus vértices denotan el mismo triángulo? ¿Qué técnica de conteo te permite realizar ese cálculo?

d. Consideremos que un mismo triángulo tiene más de una forma de escribirse y el orden de los vértices no importa. ¿Podríamos seguir aplicando una variación?

e. En el recurso GeoGebra, selecciona "animar" para observar cuántos triángulos se pueden formar con los puntos dados. ¿Cuántos triángulos diferentes hay?

f. Calcula el cociente entre los resultados que obtuviste en b y c. ¿Qué observaste?



Para comprobar.
gbit.cl/T21M2MP130A

Se llama combinación de k elementos escogidos entre n a la cantidad de posibilidades que hay de escoger k elementos distintos de un total de n, sin que importe el orden en que son escogidos. Para el caso sin reposición, la cantidad total de combinaciones se escribe como , y se puede calcular como:

$$C_k^n = \frac{\dfrac{n!}{(n - k)!}}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Cuando una combinación se realiza con reposición de elementos, se debe utilizar la expresión:

$$Cr_k^n = \frac{(n + k - 1)!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Por ejemplo, en un taller de tejidos, hay 4 colores de lana: blanco (B), azul (A), rosado (R) y verde (V). Si cada asistente debe elegir 3 colores diferentes para confeccionar una bufanda, ¿cuántas elecciones puede realizar? Identificamos los datos, n = 4 (4 opciones posibles), k = 3 (3 son seleccionadas) y que cada asistente debe escoger colores diferentes (sin repetición), al reemplazar en la expresión, se obtiene:

$$C_3^4 = \frac{4!}{(3 - 4)! \cdot 3!} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{24}{6}$$

La expresión $\frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$ suele escribirse como $\binom{n}{k}$ —que se lee "n sobre k"— y recibe el nombre de número combinatorio. Algunas propiedades de los números combinatorios son:

- Cualquier número sobre 0 es igual a 1
- Todo número sobre sí mismo es igual a 1.

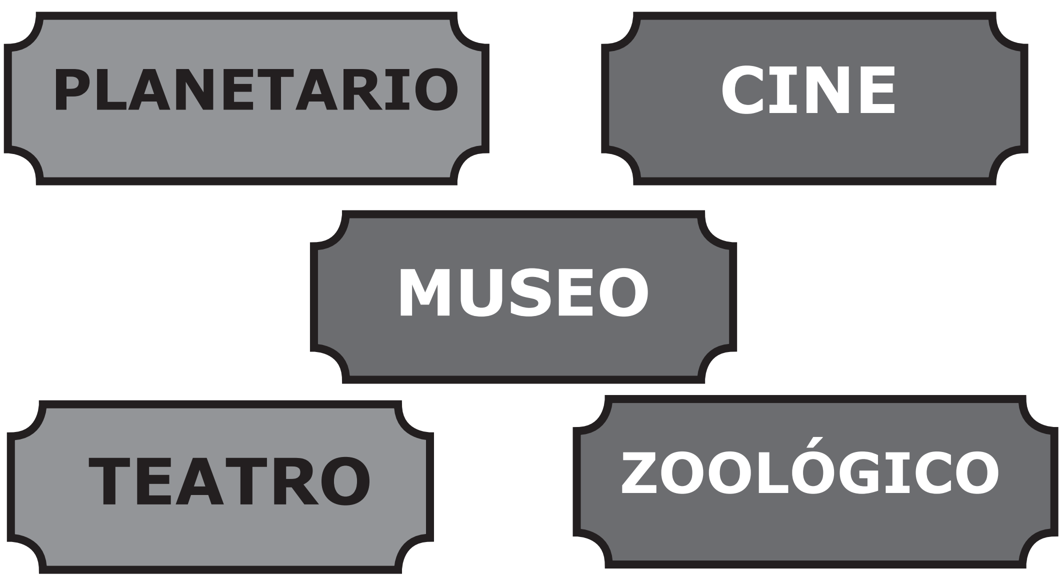
- Un número sobre 1 siempre es igual al número.

2. Calcula:

a. C_{4}^{8} **c.** C_{5}^{10} **e.** Cr_{8}^{10}

b. C_{3}^{6} **d.** Cr_{5}^{13} **f.** Cr_{5}^{7}

3. Matilde debe elegir mensualmente 4 de los siguientes tickets.



a. El orden de la elección de los tickets no importa. ¿Cuántas elecciones distintas podría hacer Matilde?

b. Se agregan las opciones Estadio y Concierto, pero se reduce la elección de tickets a 3. ¿Cuántas elecciones distintas podría hacer Matilde?

4. Resuelve los siguientes problemas:

a. En un juego de azar, se deben acertar 6 de 36 números en sorteo, mientras que, en otro, se debe acertar en 10 de 20. ¿Cuál de los dos juegos tiene la mayor cantidad de resultados posibles?

b. En un curso de 35 estudiantes, se deben elegir a 4 de ellos para formar parte de la patrulla ecológica del colegio. ¿Cuántos grupos distintos se podrían formar?

c. Para un paseo familiar, Nicolás debe comprar tres bebidas en un supermercado que ofrece 6 tipos distintos. ¿Cuántos grupos distintos de bebidas podría comprar si solo puede llevar dos o tres del mismo tipo?

d. ¿Cuántos equipos de futbolito de 7 jugadores se pueden formar con un grupo de 10 jugadores?

5. De un grupo de 13 atletas compuesto por 8 hombres y 5 mujeres, se debe escoger a 6 para una competencia.

a. ¿Cuántas son las combinaciones que se pueden elegir?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que los 6 competidores escogidos sean hombres?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que, entre los 6 escogidos, al menos haya 3 mujeres?

▶ Para concluir

a. ¿En qué consiste una combinación? Explícaselo con un ejemplo a tus compañeros.

b. ¿En qué se diferencian la combinatoria de la variación y la permutación? Comenta con tu curso

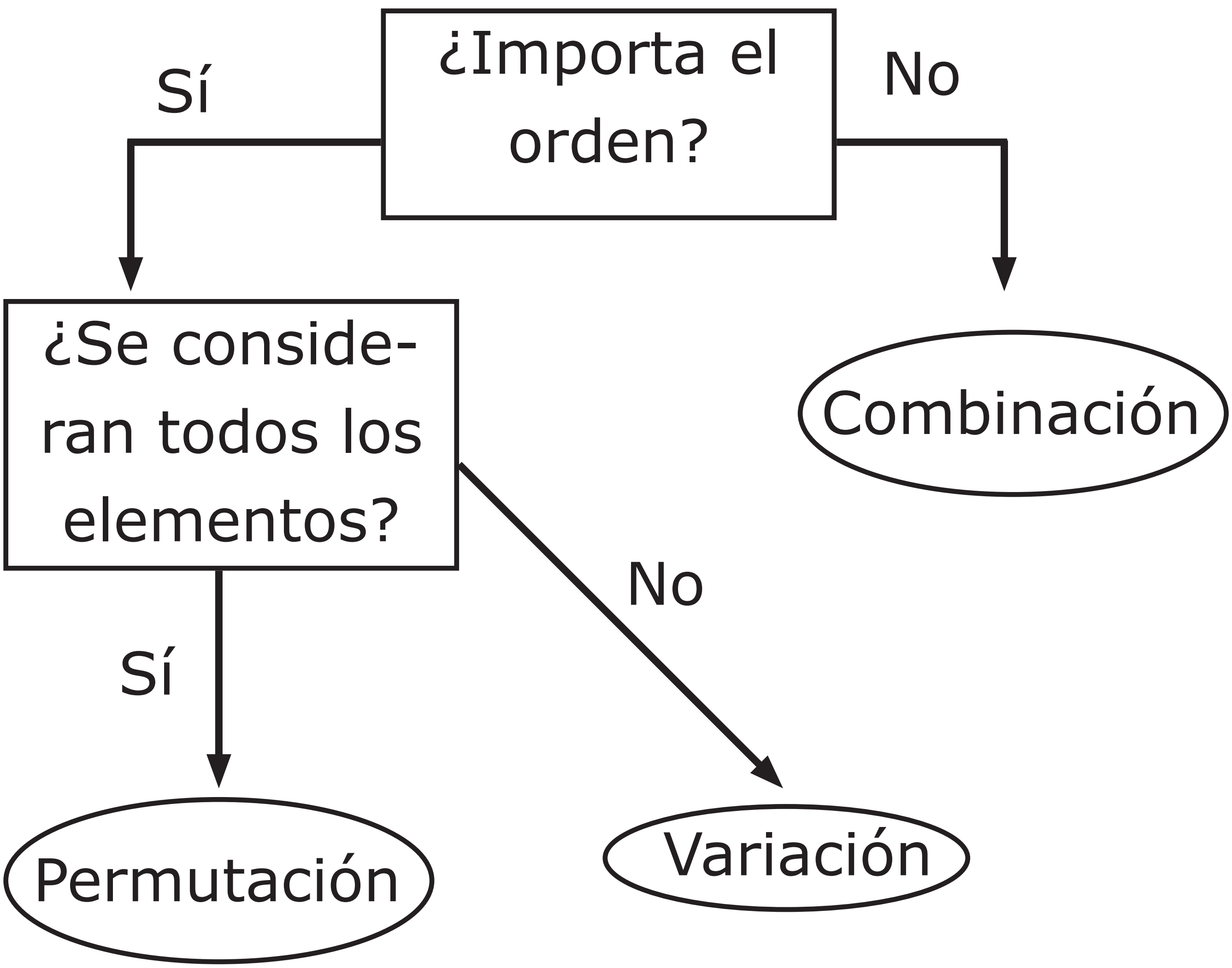
Aplicaciones

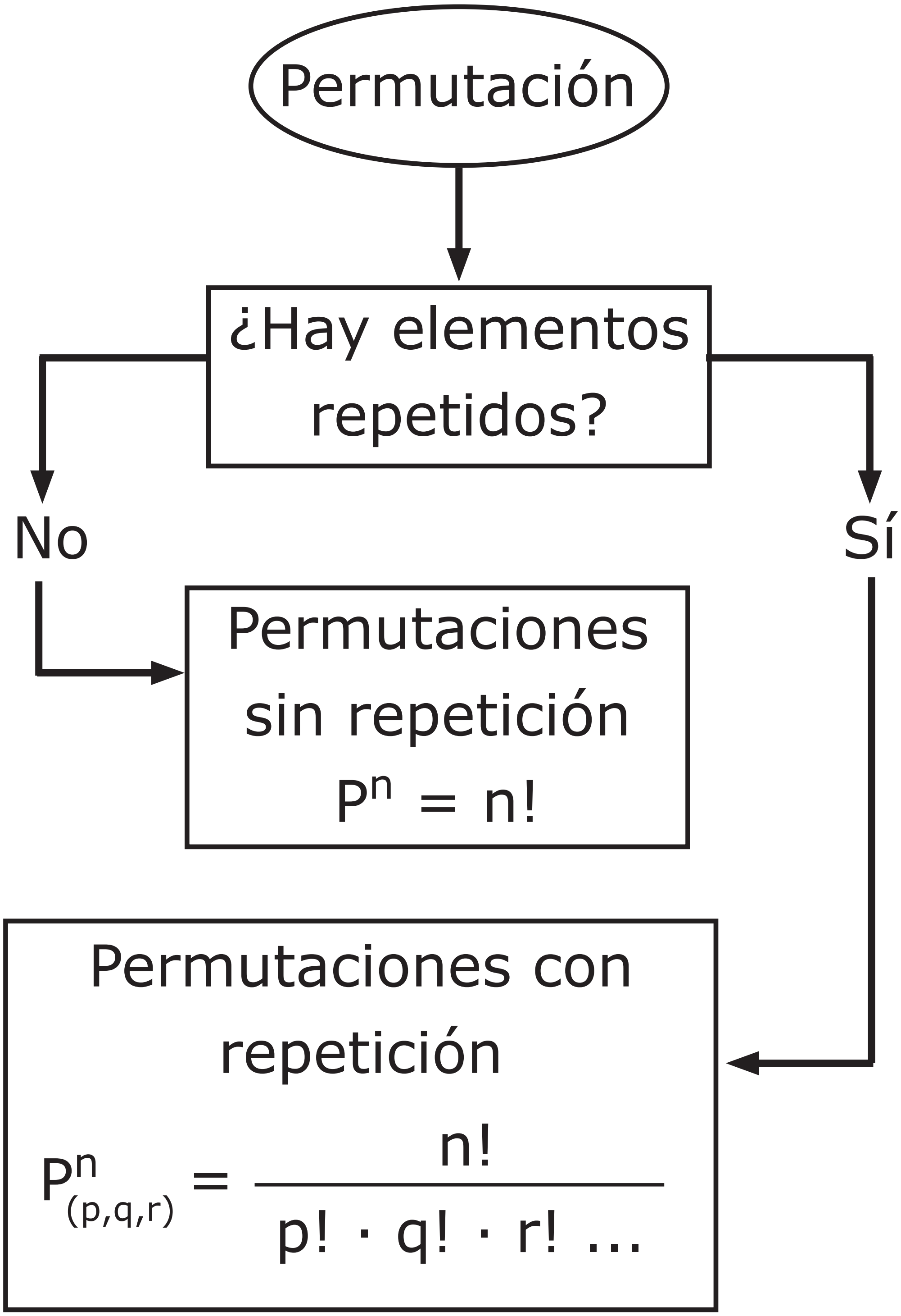
¿En qué se diferencian las técnicas de conteo que conoces?

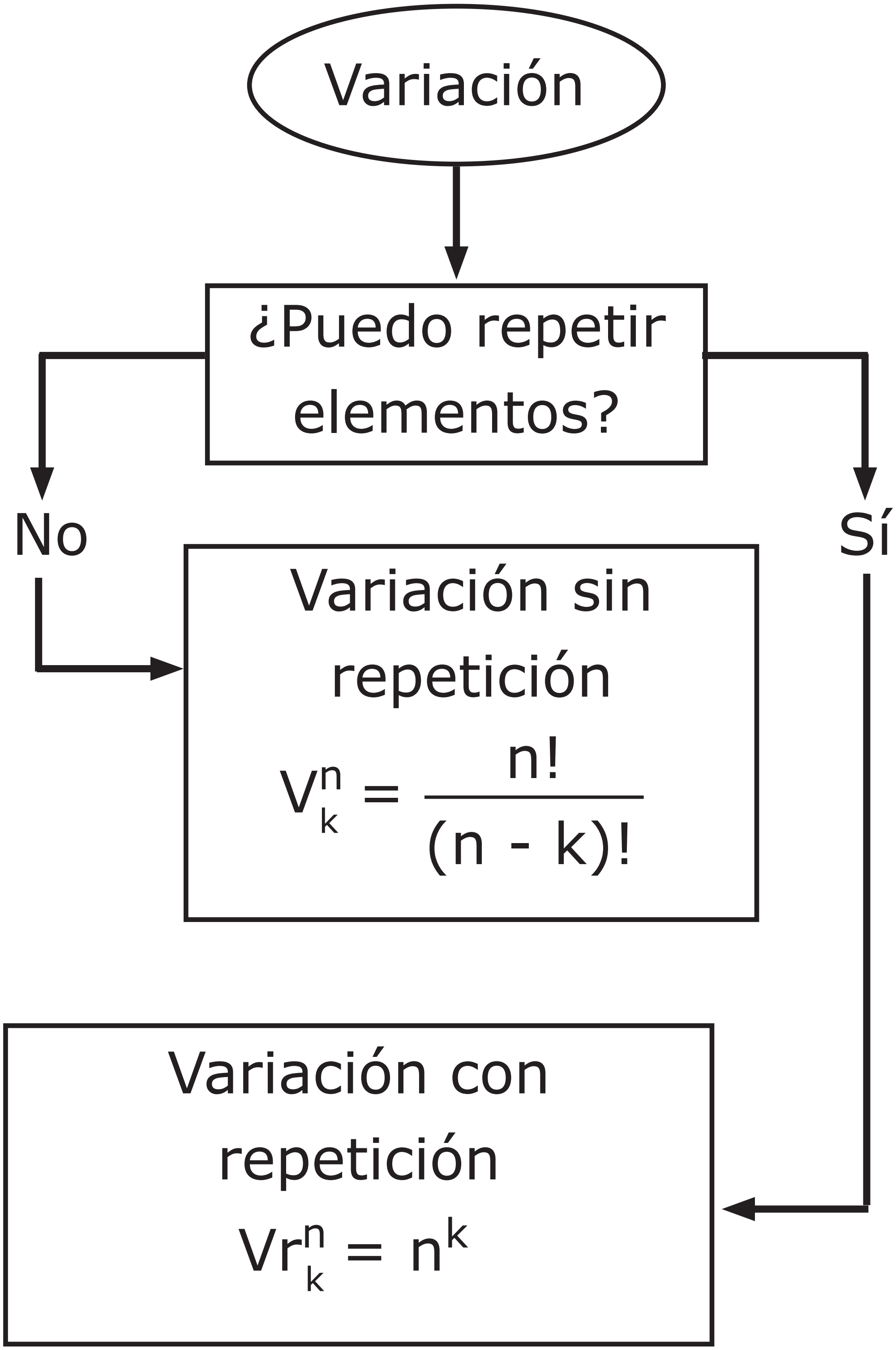
¿Cuándo aplicas cada una?

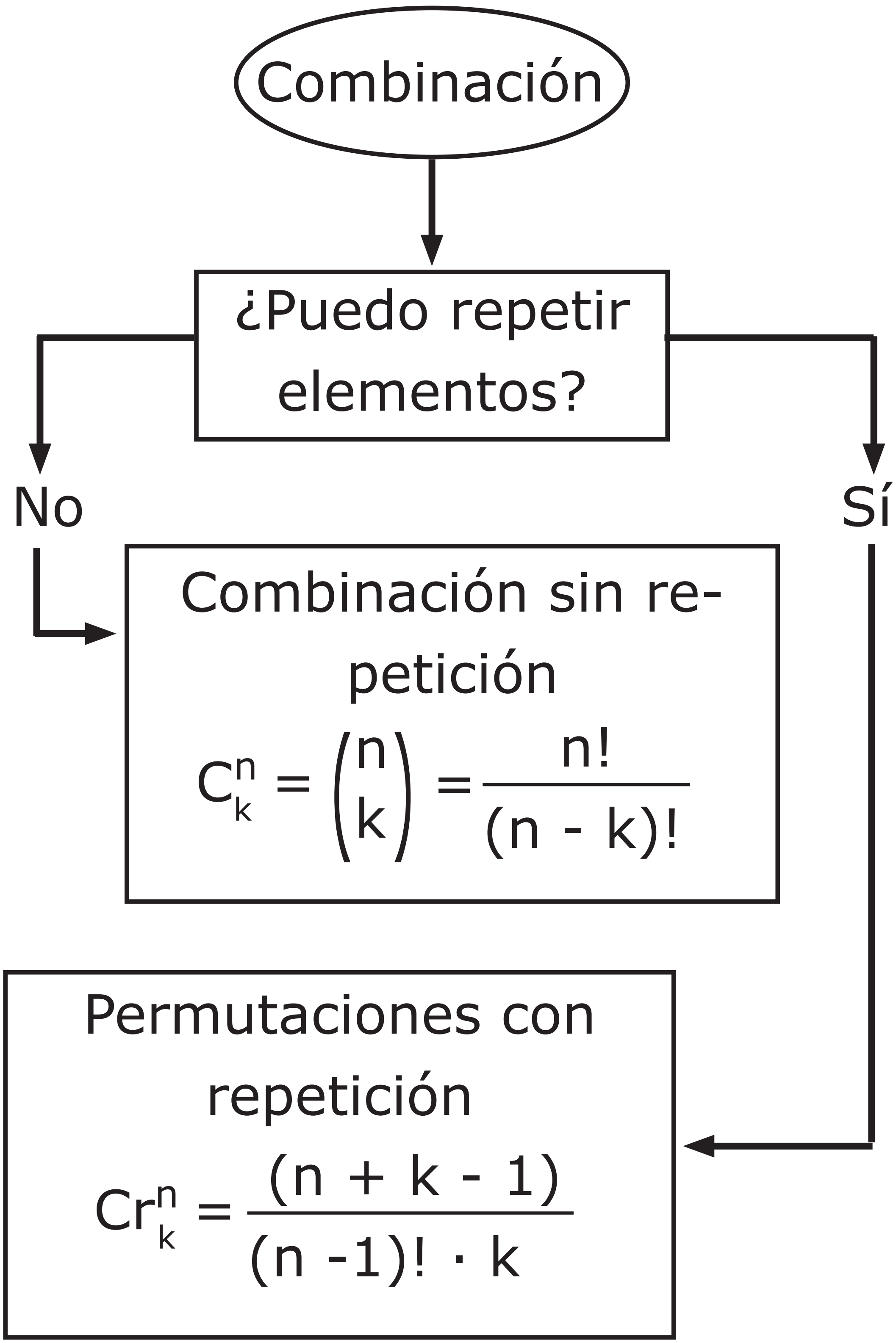
Objetivo: Modelar situaciones aplicando el principio multiplicativo, variaciones, permutaciones y combinaciones para resolver problemas y calcular probabilidades.

De acuerdo con las características de un problema, puedes saber si corresponde a un caso de permutaciones, variaciones o combinaciones, utilizando el siguiente esquema:




Permutación
¿Hay elementos repetidos?
No
Sí
Permutaciones sin repetición
$P^n = n!$
Permutaciones con repetición
$P^n_{(p,q,r)} = \dfrac{n!}{p! \cdot q! \cdot r! \ldots}$


Variación
¿Puedo repetir elementos?
No
Sí
Variación sin repetición
$V_k^n = \frac{n!}{(n - k)!}$
Variación con repetición
$Vr_k^n = n^k$


Combinación
¿Puedo repetir elementos?
No
Sí
Combinación sin repetición
$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n - k)!}$
Permutaciones con repetición
$Cr_k^n = \frac{(n + k - 1)}{(n - 1)! \cdot k}$

1. Determina a qué tipo de técnica de conteo corresponde cada situación:

a. El número de palabras con o sin sentido que se pueden formar con las letras de la palabra LIBRO.

b. Los números de dos cifras que se pueden formar mezclando los dígitos 3, 5 y 7.

c. Los rankings de 3 estudiantes, hechos a partir de 6 de ellos.

d. El número de chalecos de dos colores (elegibles entre rojo, verde, gris y negro) que se pueden repetir, sin importar el orden.

e. Los votos de 15 estudiantes para elegir al presidente de curso entre 4 candidatos.

f. Los números de uno, dos y tres cifras que se pueden formar usando los dígitos 1, 2 y 3.

2. Para un matrimonio que tiene tres hijos:

a. Realiza un diagrama de árbol que muestre las posibilidades de sexo para cada hijo. Considera equiprobable hombre y mujer.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres hijos sean mujeres?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que dos hijos sean hombres, sin importar el orden?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos primeros hijos sean hombres?

3. Para los anillos que se muestran en la figura, resuelve:

a. ¿De cuántas formas distintas se pueden colocar los tres anillos en una mano si es posible poner más de un anillo en el mismo dedo?

b. Para el caso anterior, ¿importa el orden en que sean colocados los anillos en el mismo dedo?

c. Imagina que solo se puede colocar un anillo en cada dedo. ¿Cuántas formas-posibles hay de colocar los tres anillos en la mano?

4. Se tiene un número de tres cifras seleccionado al azar:

a. ¿Cómo calcularías la cantidad de números de tres cifras que existen?

b. ¿Cuántos números de tres cifras distintas existen?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que, al seleccionar un número de tres cifras al azar, este contenga dígitos repetidos?

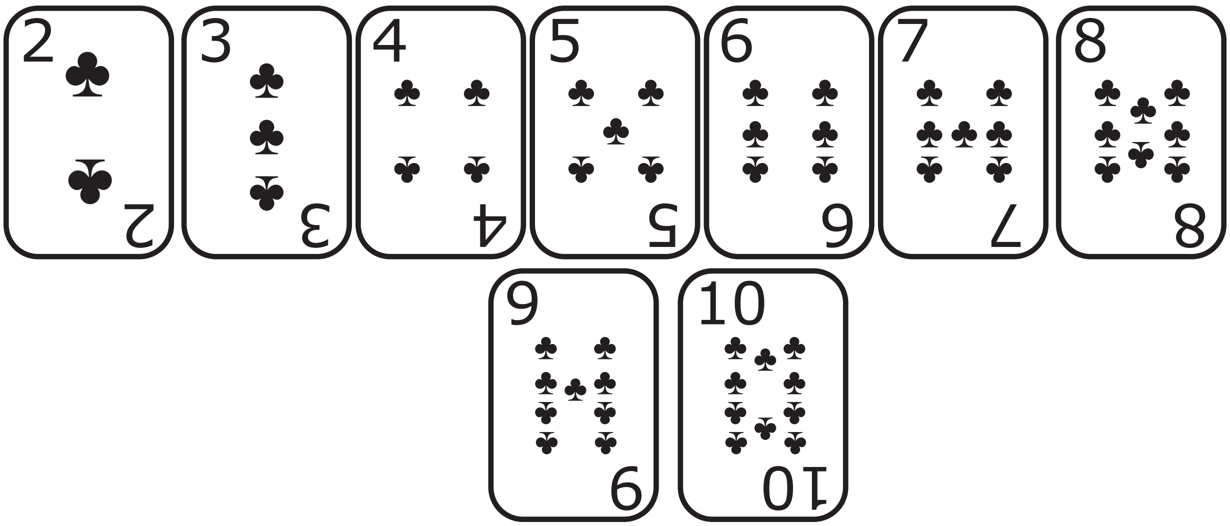
5. Una baraja inglesa contiene 52 cartas, las cuales se dividen en 4 pintas (picas, diamantes, tréboles y corazones). Cada una de ellas contiene 13 cartas (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K).

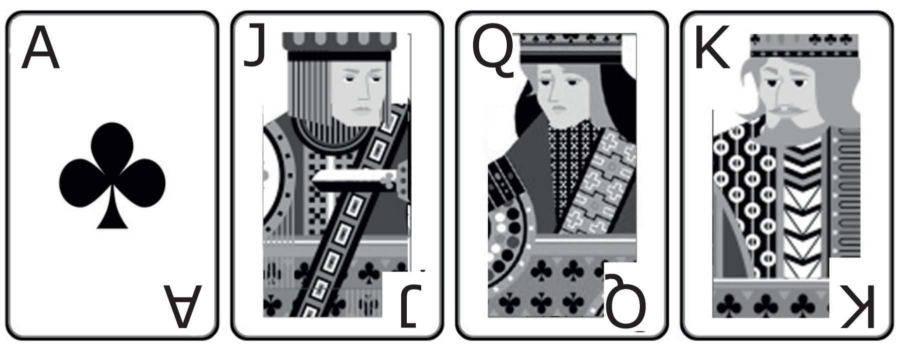
Recuerda que las pintas son:

♠, ♥, ♦ y ♣

Y que el naipe inglés se compone de las siguientes cartas:

9 cartas numeradas (del 2 al 10):





a. ¿De cuántas formas se pueden extraer 15 cartas, sin considerar el orden?

b. ¿Cuántos conjuntos de 15 cartas no contienen ninguna letra?

650

c. Si se extraen 15 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que contengan al menos una letra?

6. Marcos realiza un test de 10 preguntas. Cada una de ellas tiene 5 alternativas, de las cuales solo una es la correcta. Si responde al azar:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que Marcos acierte en todas las preguntas?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que Marcos acierte exactamente 6 preguntas?

7. En un matrimonio, 4 parejas quieren tomarse una foto en fila junto a los novios, de manera que cada persona esté junto a su pareja. ¿De cuántas formas pueden ordenarse para la foto si los novios deben quedar en el centro de la fila?

8. En todo campeonato de fútbol en el que todos los equipos juegan contra todos, importa saber en qué momento se enfrentarán los dos más populares. Por ello, al hacer la programación se intenta que jueguen en fechas centrales. Es decir, que no se enfrenten cuando el campeonato esté definido o que sea una final anticipada.

Se está organizando un campeonato de fútbol en el que participan 12 equipos:

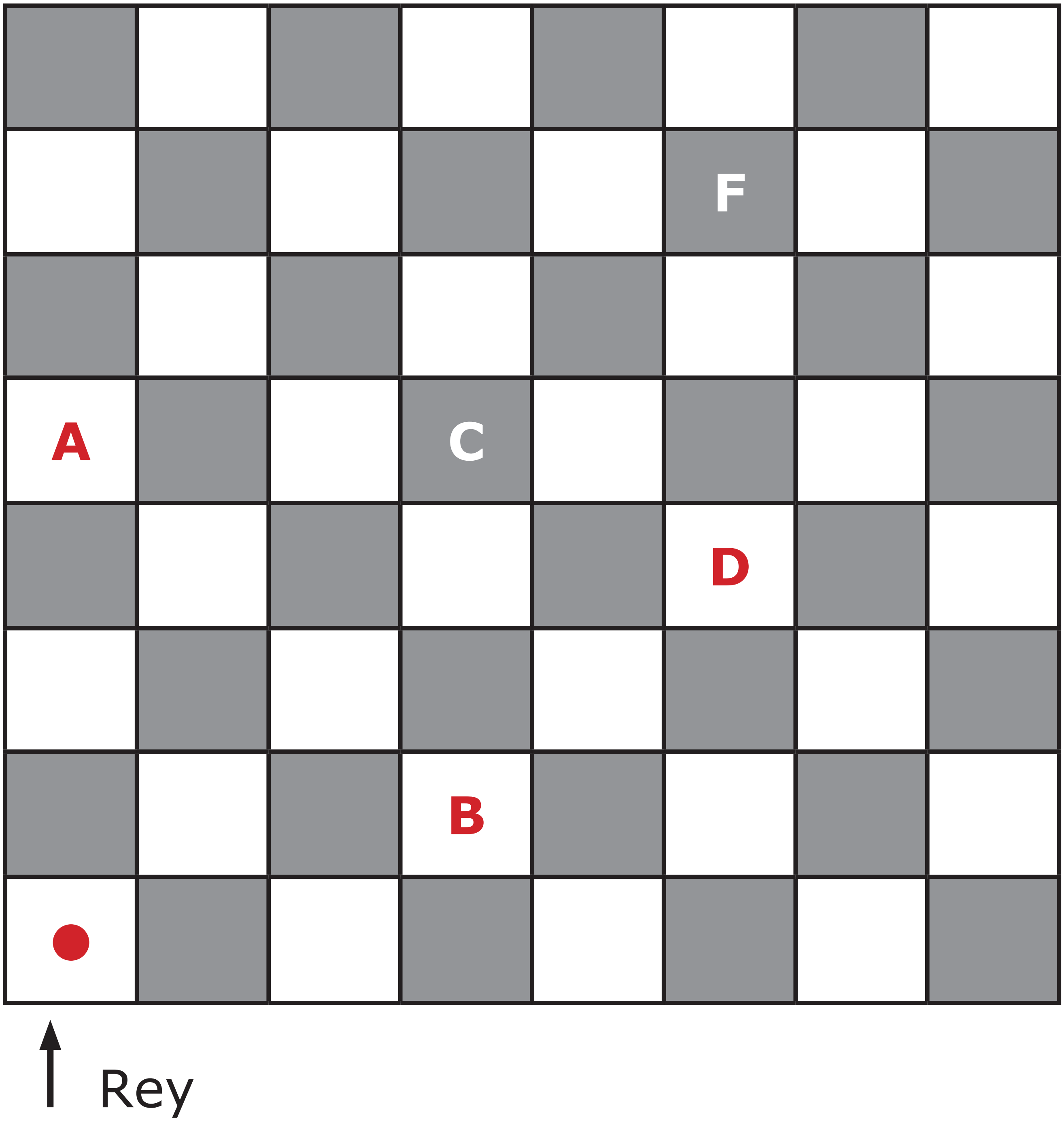
a. ¿Cuántos partidos se deben jugar en total?

b. ¿En cuántas fechas es posible completar el campeonato? ¿por qué?

c. En tu cuaderno, construye una tabla en la que se muestre el desarrollo del campeonato. Es decir, cuáles partidos se juegan en cada fecha. Considera que cada equipo juega solo un partido por fecha. Luego, organiza un orden posible para cada partido. ¿De cuántas maneras distintas se podrían ordenar? Explica.

d. Un miembro de la organización propone calendarizar al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el partido entre los dos equipos favoritos se juegue entre las fechas 7 y 9 (ambas inclusive)? Justifica tu respuesta.

9. Se ubica un rey en un tablero de ajedrez, como se muestra. El rey solo puede moverse siempre hacia la derecha o hacia arriba, haciendo un movimiento por vez.


F
A
C
D
B
Rey

a. ¿A qué experimento(s) se asemeja? Comenta.

b. ¿Cuántos movimientos se deben realizar para llegar a cada una de las posiciones indicadas por las letras en el tablero?

c. ¿De cuántas formas distintas se puede llegar a cada posición marcada?

▶ Para concluir

a. Inventa una situación que se pueda resolver aplicando una combinación con repetición.

b. ¿Qué diferencia existe entre una combinación con repetición y una variación con repetición?

c. ¿En qué situación de la vida real se aplican las permutaciones sin repetición?

Antes de continuar: Evaluación intermedia. El juego de Keeler

Materiales:

1. Carnet de identidad de cada integrante del grupo, pase escolar o tarjeta de identificación.

Este juego de combinaciones se realizará en grupos de 8 personas. Comienzan realizando la actividad seis personas, mientras las otras dos estarán registrando el proceso realizado.

El juego consiste en un intercambio de identificaciones según los pasos establecidos a continuación.

Paso 1: Los 6 participantes escogidos se ubican alrededor de una mesa. Ubican su carnet de identidad frente a ellos. Por turno, intercambian su identificación con un compañero.

a. ¿De cuantas formas posibles podrían haber realizado este intercambio?

Paso 2: Cuando ya nadie tenga su carnet, deberán intentar recuperarlo. Para esto, deben seguir solo una regla: "No pueden intercambiar nuevamente con quien ya lo hayan hecho".

b. ¿Fue posible para todos obtener de regreso su identificación?

c. ¿Con qué problemática se encontraron en el proceso de recuperación?

d. ¿Cuántos movimientos les fue posible realizar?

Paso 3: Se suman al juego las otras 2 personas que comienzan con su propio carnet. Comiencen el juego intercambiando las identidades hasta recuperar cada uno su carnet.

e. ¿Después de cuántos movimientos pudieron recuperar sus identificaciones?

f. Calcula todas las combinaciones posibles que podrían darse en tu grupo.

▶ Reflexiono

a. ¿Qué dificultades tuvieron durante la realización del juego? ¿Cómo las superaron?

b. Comenta con tu grupo:

- ¿Fue tu actitud la adecuada durante la actividad?
- ¿Cómo evaluarías tu participación en la actividad?
- ¿Cuál fue la importancia del trabajo grupal para llegar a las respuestas?

Lección 11: Variable aleatoria

Definición de variable aleatoria

¿Qué es el dominio y el recorrido de una función? Explica con tus palabras.

¿Qué es la probabilidad experimental? ¿Qué es la probabilidad teórica?

Objetivo: Definir y aplicar el concepto de variable aleatoria asociado a un experimento.

1. Analiza la siguiente situación:

En un minimercado existen tres cajas abiertas para atender a los clientes. Se realiza un experimento aleatorio que consiste en observar qué cajas están ocupadas.

a. ¿Qué técnica de conteo te permitirá saber el número de combinaciones de cajas disponibles?

b. ¿Cuántos son los posibles estados de disponibilidad de una sola caja? ¿Y de tres cajas?

c. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla con el número de combinaciones que determinaste anteriormente.

Combinación	1	2	...
Caja A	**D**	**D**	...
Caja B	**D**	**D**	...
Caja C	**D**	**X**	...
Nº de cajas ocupadas	0	1	...

X = Ocupada

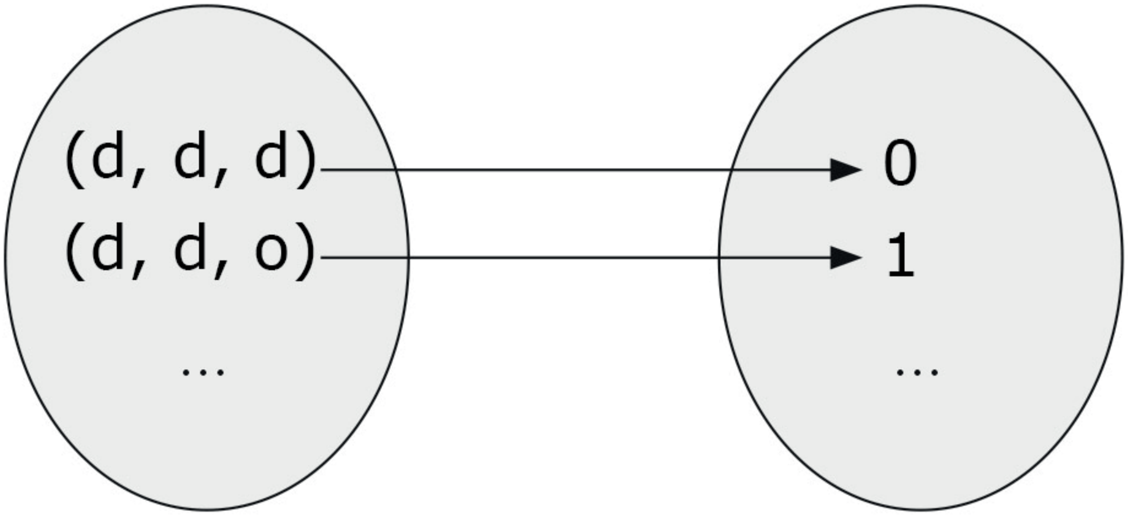
D = Desocupada

d. ¿Cuántas cajas, como mínimo, pueden encontrarse ocupadas? ¿Puede existir un número de 4 cajas ocupadas? ¿Por qué? Explica.

e. ¿Cuáles son todas las posibles cantidades de cajas ocupadas que se pueden encontrar en el supermercado?

f. En una observación se encontraron dos cajas ocupadas en total. ¿Se puede saber exactamente cuáles fueron esas cajas?

g. Completa el siguiente diagrama en tu cuaderno:



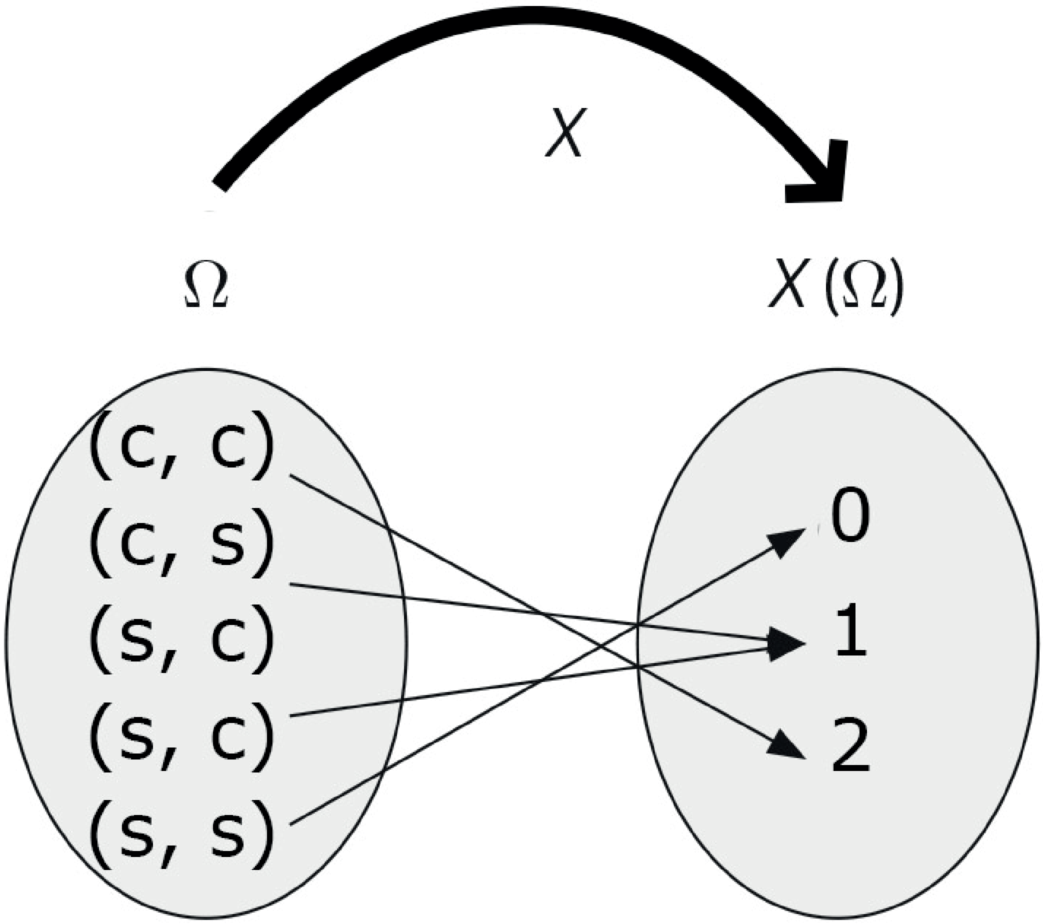
Si el diagrama representara una función, ¿cuáles serían los elementos del dominio? ¿Cuáles serían los elementos del recorrido de la función?

Llamamos variable aleatoria discreta a la función X que asigna un único número real a cada suceso del espacio muestral (Ω) de un experimento aleatorio. Es decir:

$$X: \Omega \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$$

La variable aleatoria nos permite centrar la atención en alguna característica común que tengan los elementos del espacio muestral que sea de nuestro interés, más que los resultados mismos del experimento aleatorio.

Por ejemplo, para el lanzamiento de dos monedas, el espacio muestral es Ω = {cc, cs, sc, ss} y la variable aleatoria X: cantidad de caras obtenidas en el experimento. Entonces:



Ω	X (Ω)
cc	2
cs	1
sc	1
ss	0

666

"Recuerda que el espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio"

El recorrido de la función X es Y = {0, 1, 2}. Estos elementos se denotan como x_i.

En la actividad 1, ¿cómo se define la variable aleatoria X? ¿Qué valores toma?

2. Un gimnasio realiza un estudio acerca de la variable Z: masa corporal (en kg) de sus socios.

a. ¿Qué valores podría tomar la variable aleatoria masa corporal de un socio del gimnasio?

b. ¿Qué diferencias hay entre esta variable y la variable definida en la actividad anterior?

c. ¿Crees que es posible contar los elementos que pertenecen al recorrido de la variable X? ¿Y los elementos del recorrido de la variable Z?

d. ¿Qué dificultades tienes al contar los elementos del recorrido de alguna de las dos variables? Explica.

¿A qué conjunto numérico pertenecen los elementos de la variable aleatoria?

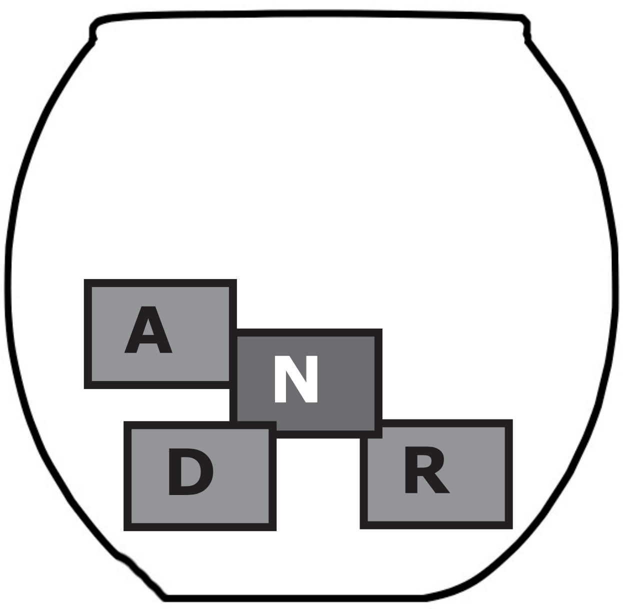
Una variable aleatoria discreta se puede clasificar de acuerdo con su recorrido. Si su cantidad de elementos es numerable y finita, se la llama variable aleatoria discreta finita. En caso contrario, corresponde a una variable aleatoria discreta infinita. Por otro lado, si su recorrido es un intervalo de números reales, la variable aleatoria es continua.

Por ejemplo, una variable finita es la cantidad de empleados que trabajan en una tienda, mientras que el tiempo de espera por un pedido es una variable continua.

3. Anota el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios. Luego, identifica la variable aleatoria involucrada y su recorrido.

a. Lanzar el dado y anotar la cantidad de divisores que tiene el número obtenido.

b. Extraer dos papeles simultáneamente y contar las consonantes obtenidas.

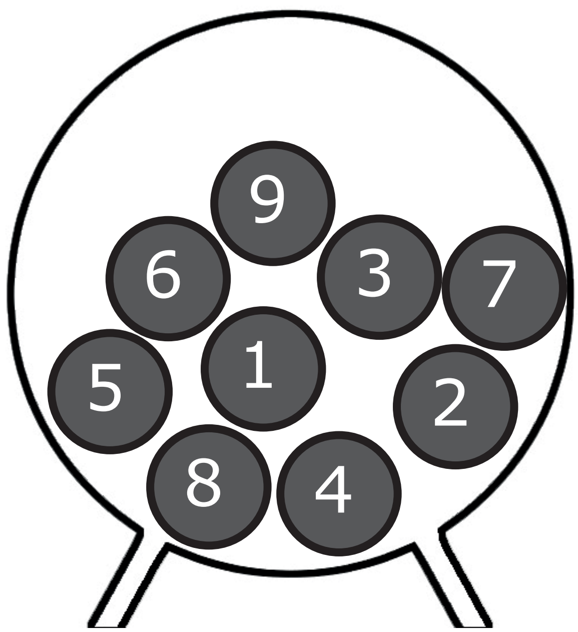


c. Lanzar las dos fichas de la imagen y anotar la suma de sus resultados.

Frente

Reverso

d. Extraer de la tómbola dos bolas de forma simultánea y anotar la suma entre los números obtenidos.



4. Clasifica las variables aleatorias de los siguientes experimentos según sea finita o infinita. Discutan sus respuestas en parejas.

a. Lanzar 6 monedas y anotar el número de caras obtenidas.

b. Lanzar un dado de doce caras y registrar los divisores del resultado obtenido.

c. Registrar el tiempo que demora un cliente en ser atendido en una bencinera.

d. Lanzar un dado de cuatro caras y anotar los múltiplos del resultado obtenido.

5. Observa el siguiente experimento aleatorio. Luego, responde las preguntas.

De una caja que contiene 2 monedas de \$100 y 2 de \$500, se seleccionan 3 de ellas al azar y sin reemplazo.

a. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?

b. Se define la variable aleatoria como X: monto total de las tres monedas. ¿Cuál es su recorrido?

c. Representa la función de la variable aleatoria X en un diagrama sagital.

▶ Para concluir.

a. ¿Qué diferencias hay entre una variable aleatoria y de una función algebraica?

b. ¿Qué estrategia utilizaste para determinar el número de elementos del espacio muestral para experimentos de extracción sin reemplazo?

Probabilidad de una variable aleatoria

¿Qué es una variable aleatoria discreta?

¿Cómo se calcula la probabilidad de un evento?

Objetivo: Calcular la probabilidad de una variable aleatoria discreta.

1. Analiza la siguiente situación y realiza las actividades.

Se realiza el experimento aleatorio de lanzar las siguientes 3 monedas al aire y se anotan los resultados de cara o sello:

a. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento aleatorio? ¿De cuántos elementos se compone?

Puedes ayudarte con un diagrama de árbol.

b. Se define la variable aleatoria X: número de sellos obtenidos. ¿Cuáles son los valores que puede asumir xi? Anótalos.

c. ¿Cuál es la cantidad de casos favorables que tiene cada valor del recorrido de la variable? Construye una tabla para ayudarte.

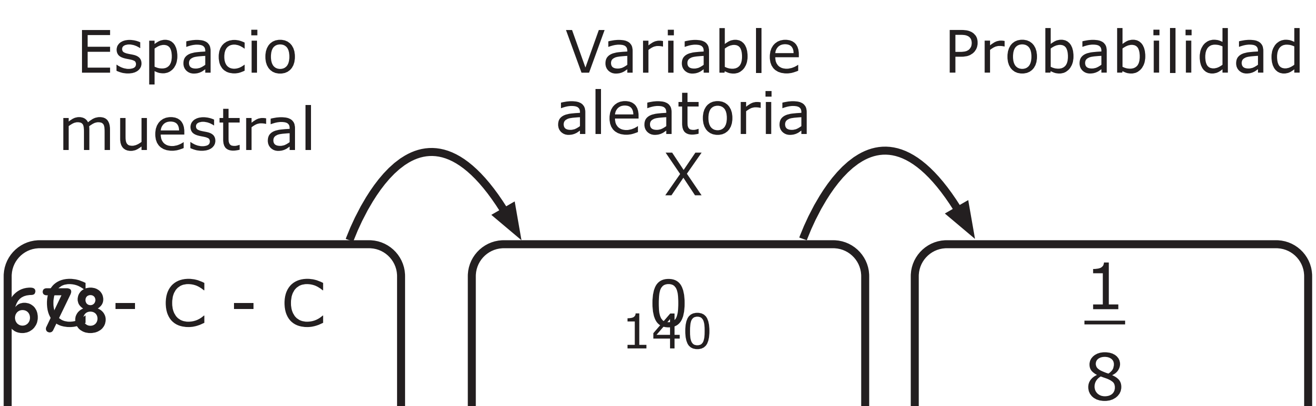
d. ¿Cómo calcularías la probabilidad de obtener cada elemento del recorrido de la variable? Explica.

e. Calcula la probabilidad de obtener cada elemento del recorrido de la variable.

f. ¿Existen valores de xi con la misma probabilidad? ¿Cómo lo explicarías?

g. ¿Cuál es el resultado de la suma de todas las probabilidades que calculaste anteriormente? ¿Cómo explicarías ese resultado?

h. Completa el diagrama sagital en tu cuaderno:



i. La relación que existe entre la variable aleatoria y las probabilidades obtenidas ¿es una función? Justifica tu respuesta.

Sea X una variable aleatoria discreta de recorrido x1, x2, ..., xn, se denomina función de probabilidad a:

$$f: X \rightarrow [0, 1]$$

$$x_i \rightarrow f(x_i) = P(X = x_i)$$

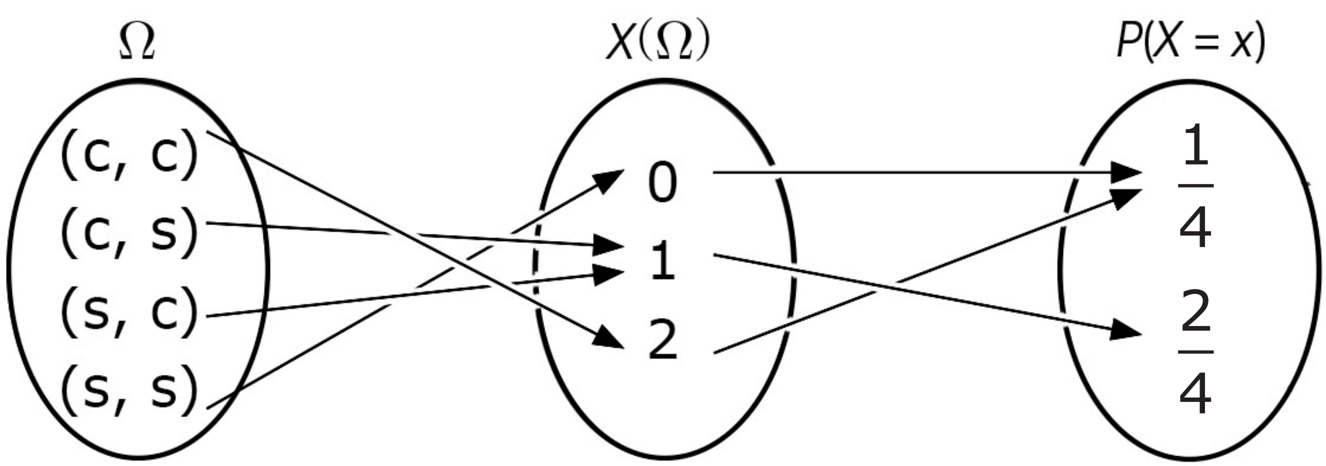
Esto quiere decir que a cada elemento de la variable aleatoria xi, f le asigna su probabilidad correspondiente f(xi), también anotada como P(X = xi). De esta manera se obtiene:

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_i) =$$

$$P(X = X_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_i) = 1$$

Por ejemplo:

Experimento: Lanzamiento de dos monedas.



$\frac{1}{4}$: Los casos donde se obtuvieron 0 o 2 caras (X=0 o X=2) corresponden a 1 caso de los 4 posibles del espacio muestral (Ω).

$\frac{2}{4}$: 2 casos de 4 en que el número de caras es 1.

Obteniendo así:

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{1}{4}$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{2}{4}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

Es importante recordar que la probabilidad de un suceso siempre es un número real comprendido entre 0 y 1, ambos incluidos.

¿De qué maneras expresaste la función de probabilidad en el ejercicio anterior?

2. Se realiza el lanzamiento de dos dados de seis caras. Se define la variable aleatoria X: cantidad de números primos obtenidos en los dos dados.

a. ¿Cuál es la cantidad de elementos que contiene el espacio muestral? Anota los posibles resultados del experimento en tu cuaderno.

b. ¿Cuál son los valores que toma xi?

c. Determina las probabilidades asociadas a cada elemento del recorrido de la variable.

3. Se escoge al azar un día de la semana.

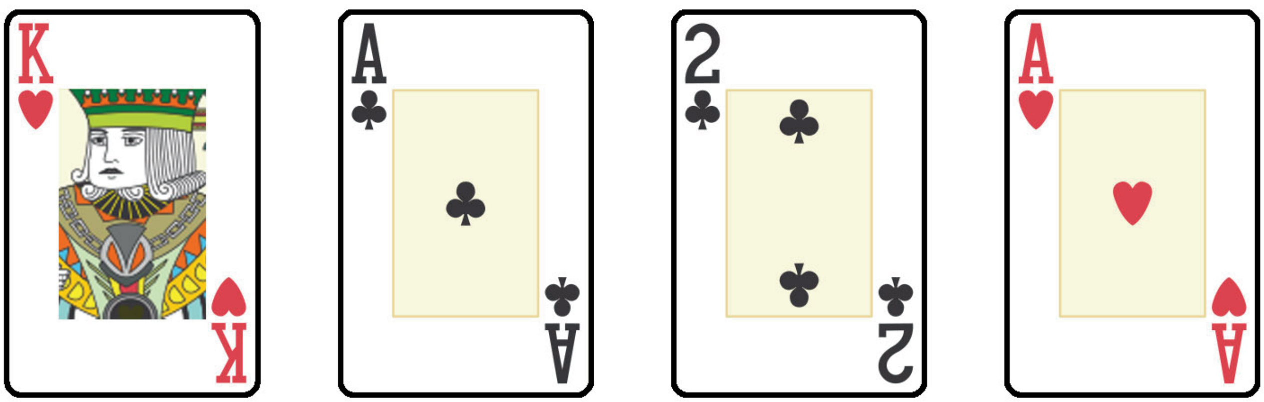
a. ¿Cuál es el espacio muestral asociado al experimento?

b. Se define la variable aleatoria X: cantidad de consonantes contenidas en el día de la semana elegida. Determina el recorrido de X.

c. Calcula las probabilidades para cada valor de xi

4. Define la función de probabilidad para cada situación y calcula su probabilidad. Guíate por el ejemplo. Experimento aleatorio:

Elegir al azar dos de las siguientes cartas y anotar el número de ases.



Paso 1: Escribe todos los elementos que conforman el espacio muestral.

Ω = {(K♥, A♥), (K♥, A♣), (K♥, 2♣), (2♣, A♥), (2♣, A♣), (A♥, A♣)}

Paso 2: Completa la tabla con los posibles resultados.

Ω	Cantidad de Ases
(K♥, A♥)	1
(K♥, A♣)	1
(K♥, 2♣)	0
(2♣, A♥)	1
(2♣, A♣)	1
(A♥, A♣)	2

Paso 3: Anota el recorrido de la variable.

$X = \{0, 1, 2\}$

Paso 4: Define la función de probabilidad para cada valor del recorrido de la variable.

$$P(X = 0) = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 1) = \frac{4}{6}$$

$$P(X = 2) = \frac{1}{6}$$

a. Lanzar un dado de 4 caras y uno de 6 caras y anotar la cantidad de números pares obtenidos.

b. Extraer tres bolitas simultáneamente de una urna que contiene 4 bolitas blancas, 3 rojas y 2 negras. Anotar la cantidad de bolitas rojas extraídas.

5. Se escoge al azar un mes del año.

a. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?

b. Crea una variable aleatoria Z para el experimento y determina la probabilidad de cada una.

6. Se define la variable aleatoria Y como la suma entre dos números enteros distintos seleccionados al azar entre el –4 y el 2 (ambos incluidos).

a. ¿Cuáles son los posibles valores de la variable aleatoria Y?

b. ¿Cuál es el valor de $P(Y = -3)$?, ¿y de que sea menor o igual a –5?

7. Se estudian la cantidad de atrasos de los estudiantes durante una semana.

Variable X: cantidad de atrasos durante una semana.

x_i	$P(X = x_i)$
0	0,2
1	0,25
2	0,05
3	k
4	0,15
5	0,1

a. ¿Cuál es el recorrido de la variable aleatoria X?

b. ¿Qué representa el valor 0,1?

c. ¿Cuál es el valor de k? ¿Por qué? Comparen sus respuestas en parejas.

d. Se escoge al azar a un estudiante. ¿Qué valores de xi se deben considerar para calcular la probabilidad que este haya tenidos a lo más 3 atrasos?

e. ¿Cuál es el valor de $P(X \leq 3)$?

8. Se extrae 3 veces sin reposición una bolita de una tómbola con bolitas numeradas del 1 al 10. Se define la variable X: cantidad de veces que se selecciona un número par.

a. ¿Cuál es el recorrido de la variable?

b. ¿Cuál es la probabilidad de extraer al menos una bolita con número par?

c. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla con los valores correspondientes:

xi	$P(X = x_i)$
x_1	$P(X = x_1)$
...	...
x_n	$P(X = x_n)$

▶ Actividades de profundización

9. Considera las siguientes variables aleatorias asociadas a experimentos diferentes.

$$P(X = x_i) = \begin{cases} a\ ;\ \text{si } x_i = 1 \\ b,\ \text{si } x_i = 2 \\ 0,6\ ;\ \text{si } x_i = 3 \end{cases}$$

$$P(X = x_i) = \begin{cases} 2a; \text{ si } y_i = 1 \\ b; \text{ si } y_i = 2 \\ 0{,}3; \text{ si } y_i = 3 \end{cases}$$

a. ¿Cuáles son los valores de a y b?

b. ¿Cuál es el valor de $P(X \geq 2)$?

c. ¿Cuál es el valor de $P(Y \geq 2)$?

▶ Para concluir

a. Explica con tus palabras lo que entiendes por función de probabilidad. Entrega un ejemplo.

b. ¿Qué estrategia utilizaste para resolver la actividad 9?

Gráfica de la distribución de una función de probabilidad

¿Qué es una función de probabilidad?

¿Cómo se puede representar?

Objetivo: Representar gráficamente la función de distribución de una variable aleatoria.

1. Analiza la siguiente situación y realiza las actividades.

Se gira la ruleta de la imagen dos veces y se anotan los números obtenidos.

a. ¿Cuáles son los elementos del espacio muestral?

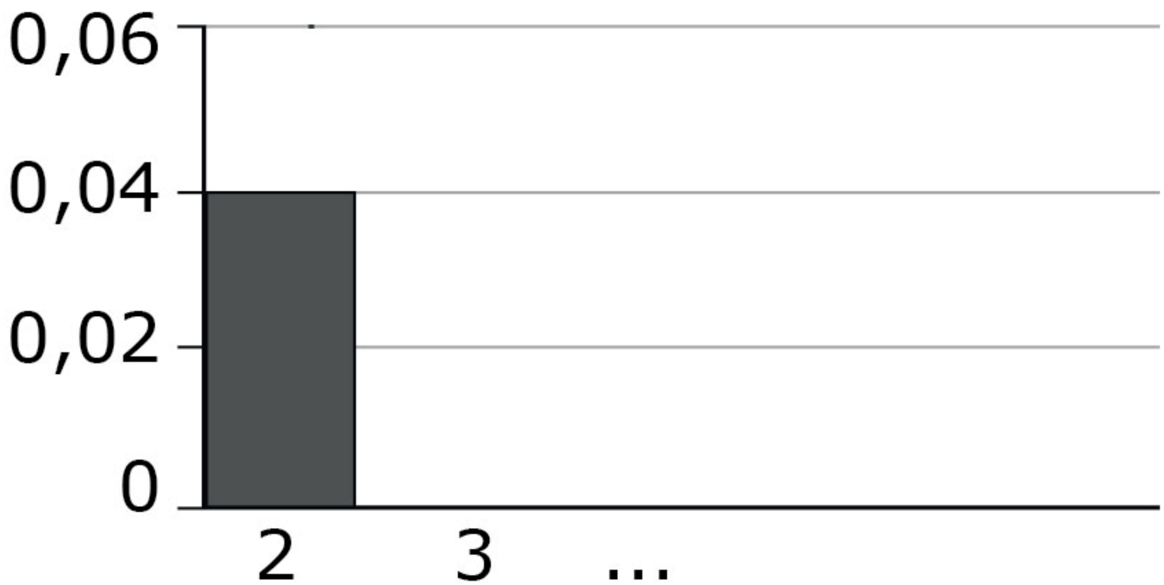
b. Se define la variable aleatoria X: suma de los números obtenidos al girar la ruleta dos veces. ¿Cuál es el recorrido de la variable?

694

c. Calcula la probabilidad para cada valor que toma la variable y escribe su función de probabilidad.

d. Completa en tu cuaderno el gráfico de barras para los valores obtenidos en c.

La altura de cada barra corresponde a la probabilidad de cada valor de X, en este caso P(X=2).



(2 3 ...) = Valores que toma la variable aleatoria X.

(0,06; 0,04; 0,02; 0) = Probabilidad asociada al valor que toma la variable

En el eje de las abscisas (eje horizontal), se ubican los valores del recorrido de la variable aleatoria. En el eje de las ordenadas (eje vertical), se ubican las probabilidades asociadas.

Para las variables aleatorias se utilizan barras de igual ancho sin dejar separación.

e. Calcula la probabilidad de que X sea:

- A lo más 2.
- A lo más 8.
- A lo más 6.
- A lo más 4.
- A lo más 10.
- A lo más 5.
- A lo más 3.
- A lo más 9.
- A lo más 7.

f. Construye un gráfico que muestre las probabilidades obtenidas en la actividad anterior. Ubica los valores del recorrido de la variable en el eje de las abscisas. En el eje de las coordenadas, ubica las probabilidades calculadas anteriormente.

g. ¿Qué diferencias y similitudes hay entre los dos gráficos que construiste?

h. ¿Cuál es el valor de la probabilidad de $P(X \leq 10)$? ¿Cómo lo explicarías?

Sea X una variable aleatoria, es posible definir la función de distribución como:

$$P(X \leq x_i) \text{ o } F(X)$$

Una función de distribución de una variable aleatoria discreta corresponde a la probabilidad de los valores menores o iguales a un valor determinado de la variable. En otras palabras, corresponde a su probabilidad acumulada.

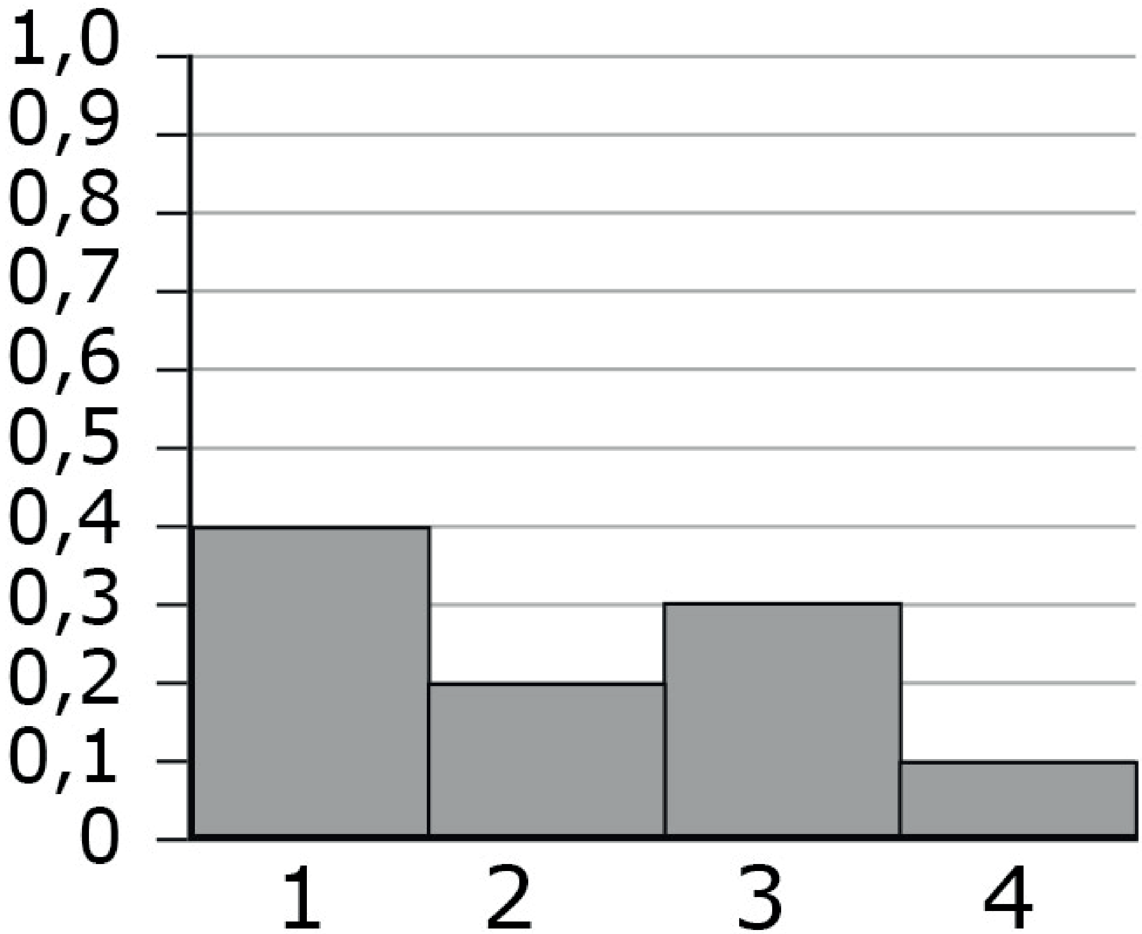
Para graficar la función de probabilidad o la función de distribución, se debe considerar:

- En el eje de las abscisas, se ubican todos los posibles valores de la variable aleatoria X.
- En el eje de las ordenadas, se ubican las probabilidades.
- Se deben utilizar gráficos de barra de igual ancho.

Observa los ejemplos:

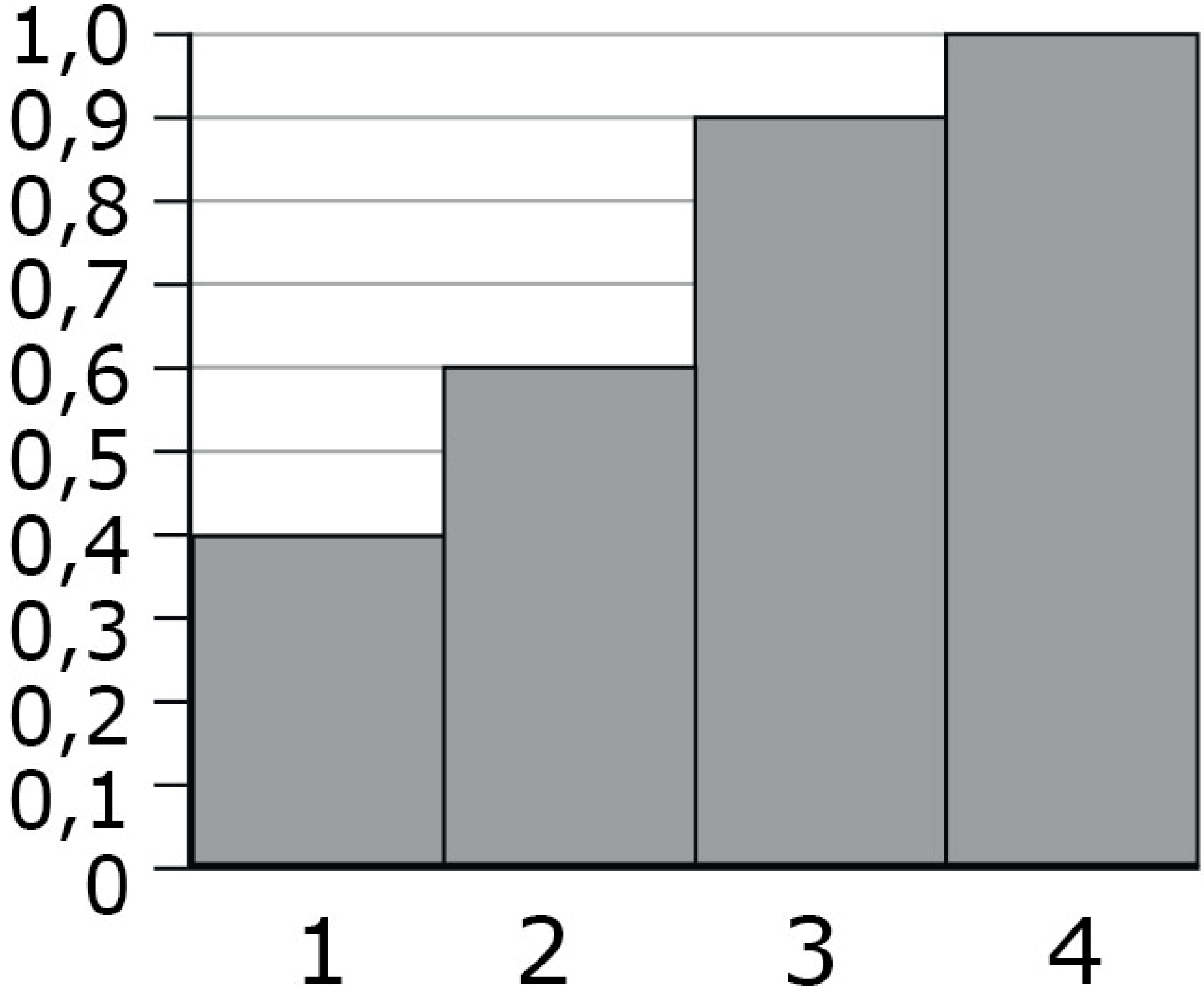
Función de distribución de la variable X.

$P(X = x_i)$



Función de probabilidad de la variable X.

$P(X \leq x_i)$



2. Para las siguientes variables aleatorias, construye el gráfico correspondiente a la función de probabilidad.

a.

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,15	0,05	0,25	0,10	0,45

b.

x_i	2	4	6	8
$P(X = x_i)$	0,25	0,35	0,15	0,25

3. La siguiente función de probabilidad de la variable aleatoria X: "número de mascotas que tiene una familia en cierta ciudad del país", se muestra en la siguiente tabla:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,05	0,45	0,15	0,35

a. Construye una tabla para la función de distribución de probabilidad de la variable aleatoria.

b. Construye un gráfico para la función de probabilidad de X. Luego, construye otro para la función de distribución de probabilidad.

c. Se escoge al azar una familia. ¿Cuál es la probabilidad de que esta tenga al menos 1 mascota? ¿Y que tenga a lo más 2 mascotas?

4. Escribe la función de probabilidad y de distribución de probabilidad de las siguientes situaciones.

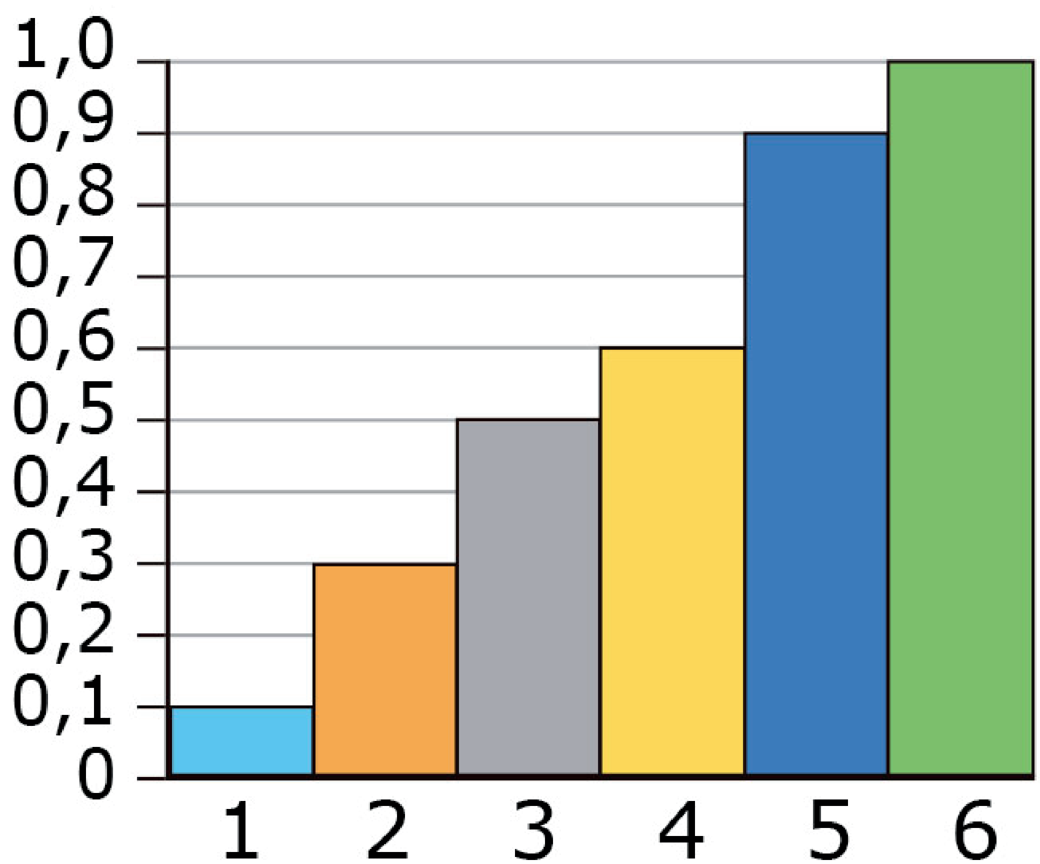
a. Cantidad de números impares obtenidos al lanzar 4 veces seguidas un dado.

b. Número de caras al lanzar 5 veces seguidas una moneda.

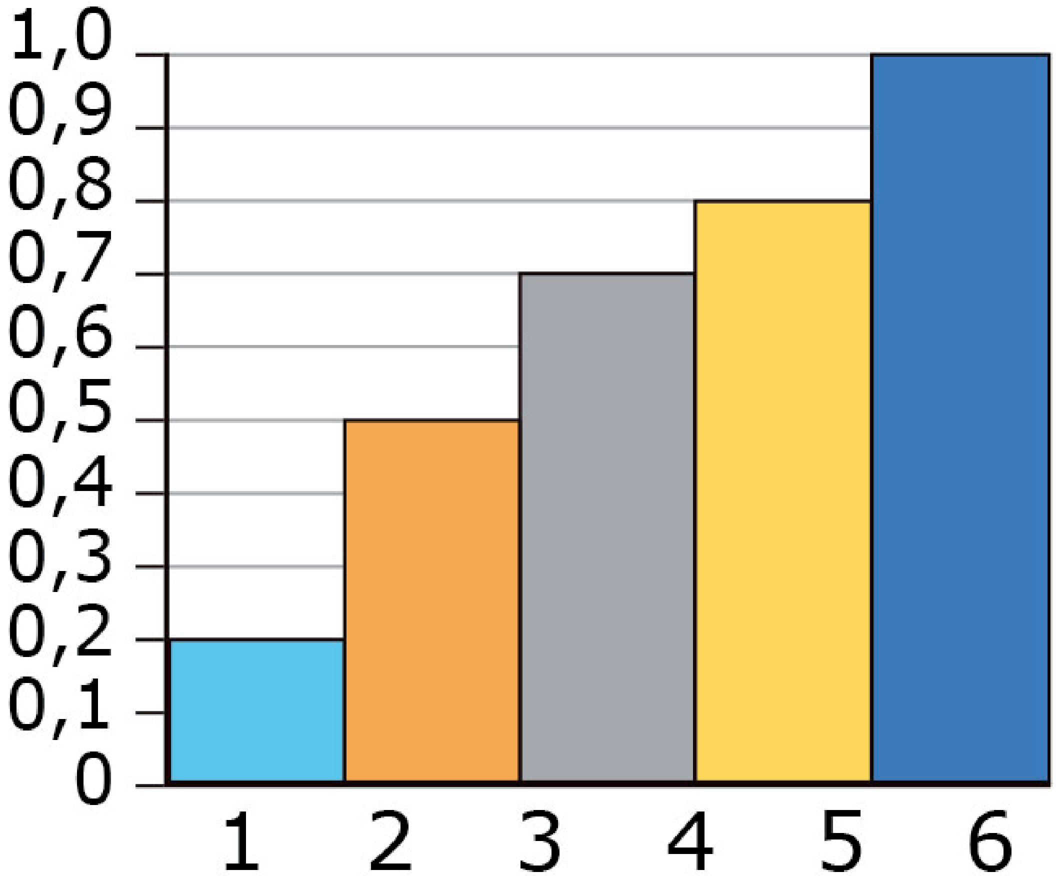
c. Número de extracciones necesarias para obtener una bolita verde al sacar sin reposición de una caja que contiene una bolita roja, verde, azul y blanca.

5. Determina la función de probabilidad correspondiente a cada gráfico de función de distribución de la variable aleatoria.

a.



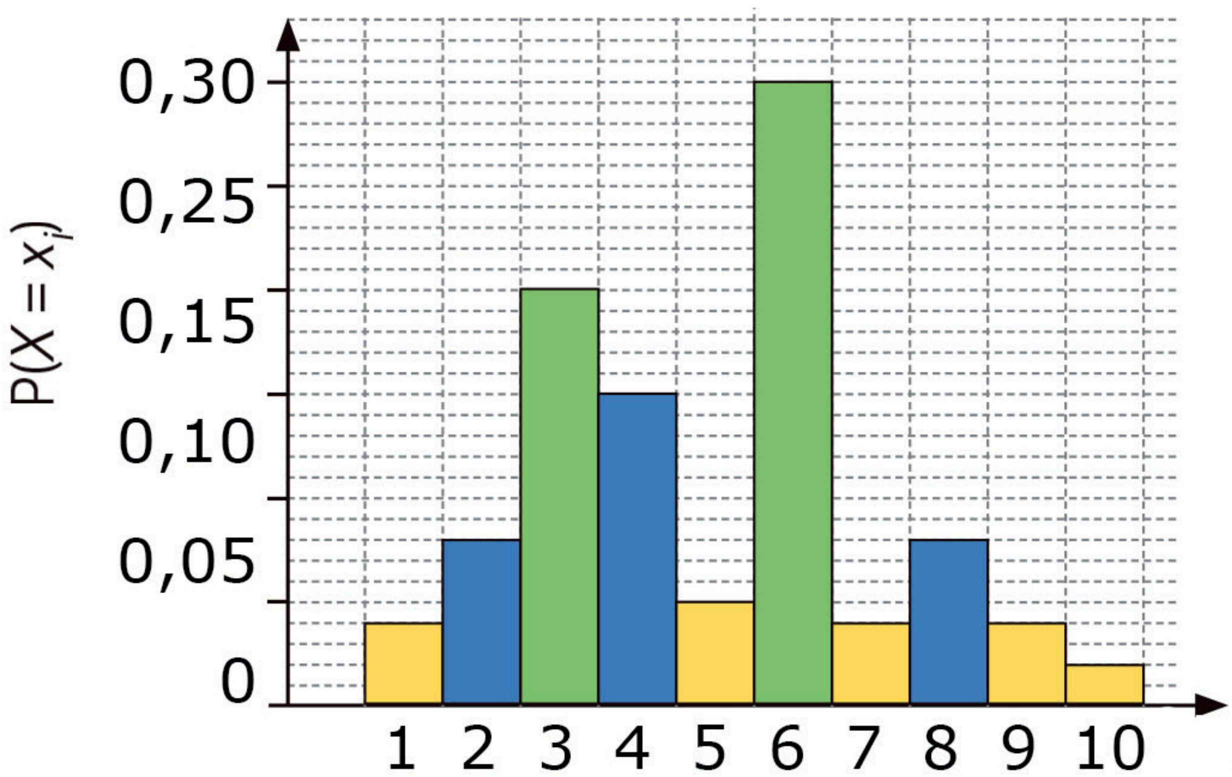
b.



706

6. La probabilidad de que un estudiante destine cierta cantidad de horas a la semana a leer se encuentra en el siguiente gráfico. Analiza y responde.

Gráfico de probabilidad



X: cantidad de horas destinadas a leer.

a. Se escoge un estudiante al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que este destine 3 horas a leer?

b. Utilizando una tabla, determina la probabilidad acumulada de la variable aleatoria.

c. Construye el gráfico de la función de distribución de la variable aleatoria.

d. ¿Cuál es la probabilidad de escoger al azar un estudiante que destine a lo más 6 horas a la lectura?

e. ¿Cuál es la probabilidad de escoger al azar un estudiante que lea entre 4 y 8 horas (ambas inclusive)?

f. ¿Qué estrategias podrías utilizar para calcular la probabilidad anterior? Menciona al menos dos formas diferentes y compártelas con tu curso.

7. En una empresa que fabrica teléfonos celulares, se estudia la cantidad de fallas de los equipos. Se define la variable X: cantidad de fallas que tiene cierto modelo.

x_i	$P(X = x_i)$
0	0,41
1	0,10
2	0,12
3	020
4	0,13
5	0,04

a. Si se selecciona al azar uno de los equipos, ¿cuál es la cantidad de fallas menos probable de obtener? ¿Cuál es la cantidad más probable de fallas?

b. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar a lo más 3 fallas en un teléfono?

c. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un teléfono que tenga 2 a 4 fallas?

d. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un celular que tenga más de 2 fallas, pero menos de 4?

8. Determina las funciones de probabilidad a partir de las funciones de distribución. Luego, constrúyelas en una hoja de cálculo.

Paso 1: En una hoja de cálculo, ingresa los valores de la variable aleatoria X. En la columna siguiente ingresa los valores de la función de distribución F(X).

	A	B	C
1			
2			
3	x	F(X)	P(X=xi)
4	1	0,2	0,2
5	2	0,4	0,2
6	3	0,73	0,33
7	4	1	0,27
8			

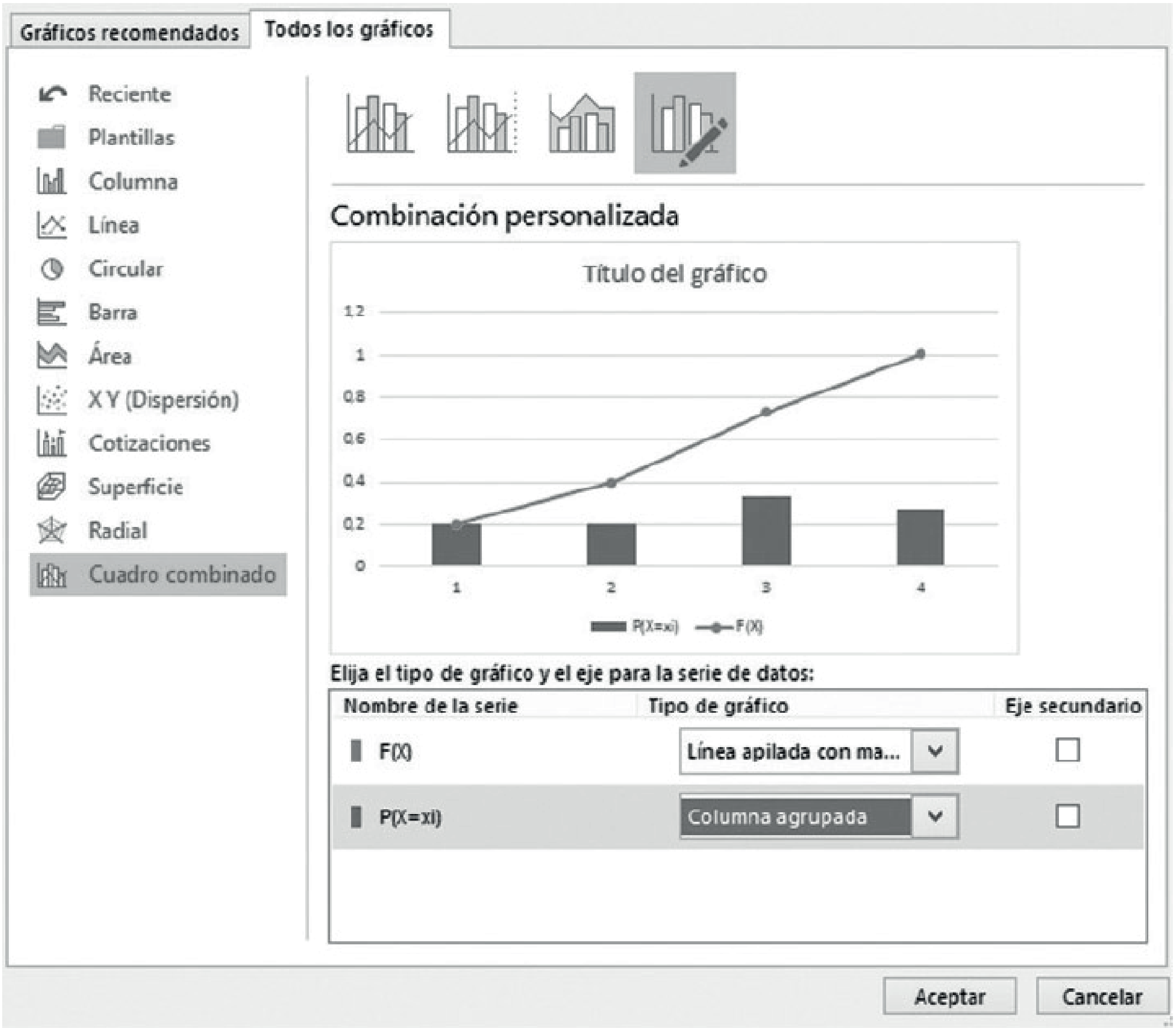
Paso 2: Para calcular la función de probabilidad, escribe en la última de la tercera columna "=". Luego, selecciona la celda adyacente de la segunda columna y réstale la celda superior.

Paso 3: Copia la formula hacia arriba, excepto para el dato de la primera fila, que se copia directamente de F(X)

Paso 4: Selecciona los datos de F(X) y P(X=xi) y presiona en

INSERTAR>GRAFICOS.

Luego, en el menú de gráficos, selecciona "Todos los gráficos" y después "Cuadro combinado". Modifica F(X) como línea apilada y P(X=xi) como columna agrupada.


Gráficos recomendados
Todos los gráficos
Reciente
Plantillas
Columna
Línea
Circular
Barra
Área
X Y (Dispersión)
Cotizaciones
Superficie
Radial
Cuadro combinado
Combinación personalizada
Título del gráfico
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
1
2
3
4
P(X=xi)
F(X)
Elija el tipo de gráfico y el eje para la serie de datos:
Nombre de la serie
Tipo de gráfico
Eje secundario
F(X)
Línea apilada con ma...
P(X=xi)
Columna agrupada
Aceptar
Cancelar

a.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,275	0,425	0,855	1

b.

yi	0	1	2	3
$P(Y = y_i)$	0,22	0,38	0,92	1

▶ Para concluir

a. ¿Qué diferencias hay entre una función de probabilidad y una función de distribución acumulada? Explica usando tus palabras.

b. ¿Qué representación te ha permitido comprender mejor las probabilidades? ¿Por qué?

Antes de continuar: Evaluación intermedia

1. Escribe tres ejemplos diferentes para:

a. Variable aleatoria discreta.

b. Variable aleatoria continua.

2. Se lanza dos veces un dado cargado, de manera que los números pares tienen el doble de probabilidad de salir que los impares. Se define la variable aleatoria X: producto de los números obtenidos. Calcula la probablidad de obtener un número menor que 12.

3. Se lanza un dado de ocho caras, numeradas del 1 al 8. Se define la variable aleatoria que representa si el número obtenido es primo o no. Para esto, se asigna 0 si no es primo y 1 si es primo.

a. ¿Cuáles son todos los elementos xi que componen el espacio muestral?

b. Construye una tabla con los elementos del espacio muestal y el recorrido de la variable aleatoria.

c. Representa la función de la variable aleatoria a través de un diagrama sagital.

4. Se gira la ruleta de la figura tres veces y se registran los colores obtenidos y los números.

Se define las variables:

X: cantidad de casillas con colores primos obtenidos.

Y: cantidad de números impares obtenidos.

a. ¿Cuál es el recorrido de la variable aleatoria?

b. Determina la función de probabilidad para cada variable aleatoria.

c. Determina la función de distribución para cada variable aleatoria.

5. Considera el experimento aleatorio "lanzar dos dados" y la variable aleatoria X: cantidad de números primos que aparecieron en ambos dados.

a. Escribe el recorrido de la variable aleatoria.

b. Calcula la función de probablidad de la variable aleatoria.

c. Calcula $P(X = 1)$ y $P(X < 2)$

d. Grafica la función de probabilidad.

e. Calcula la función de distribución.

▶ Reflexiono

a. ¿Qué notación de función probabilidad utilizaste más? ¿Por qué?

b. ¿Qué conocimientos de la Unidad de Álgebra y Funciones te ayudaron a comprender la variable aleatoria? ¿Cómo te ayudaron?

Lección 12: Probabilidad en la sociedad

La probabilidad en los medios de comunicación

¿Cuál es el significado de "probabilidad"?

¿Qué quiere decir que una muestra sea aleatoria?

Objetivo: Analizar la información de los medios de comunicación aplicando probabilidades.

1. Analiza la siguiente información. Luego, responde.

Poderosas razones para comer cereales integrales

La alimentación está estrechamente relacionada con la salud. Una dieta rica en grasas, azúcares y sodio eleva el riesgo de sufrir enfermedades no transmisibles, como diabetes, cáncer y cardiovasculares, entre otras. Pero también está la cara opuesta. Alimentos que ayudan a proteger el organismo. Los cereales integrales son uno de ellos, de acuerdo a un reciente trabajo que confirmó que su consumo contribuye a reducir el riesgo de padecer patologías crónicas. Se trata de un metaanálisis realizado sobre 45 estudios que relacionan una dieta basada en cereales con una mejora en la salud y una reducción en el riesgo de muerte por ataque cerebrovascular (ACV), diabetes, cáncer y problemas respiratorios e infecciosos.

Los resultados arrojaron que consumir 90 gramos de cereales integrales al día reduce en 19% las probabilidades de padecer enfermedades coronarias y en 22% las cardiovasculares. A su vez, la mortalidad relacionada con ACV se reduce en 14%, con cáncer 15%, con afecciones respiratorias un 22%, infecciosas en 26% y con diabetes 51%.

Los investigadores concluyeron que hasta el momento "las recomendaciones para la ingesta de granos enteros habían sido a menudo poco claras o incoherentes en relación con la cantidad y tipos de alimentos de grano entero que se debían consumir". La evidencia científica recogida por esta exhaustiva revisión permite "apoyar firmemente las recomendaciones dietéticas para aumentar la ingesta de alimentos de grano entero en la población general para reducir el riesgo de enfermedades crónicas y mortalidad prematura", sostuvieron.

No obstante, los investigadores aclararon que el metaanálisis tiene algunas limitaciones relacionadas con la heterogeneidad de estudios revisados y con los diferentes estilos de vida, hábitos alimenticios y nivel social de las personas que participaron de ellos.

Fuente: https://www.clarin.com (Adaptación)

a. ¿Cuáles son los datos que entrega la noticia? Anótalos en tu cuaderno.

b. ¿Qué quiere transmitir la noticia? Discutan en parejas.

c. ¿Se pueden considerar correctas las siguientes conclusiones? Analiza y justifica.

Conclusión 1: Una persona que no consume granos enteros tiene mayor mortalidad prematura y riesgo de sufrir enfermedades crónicas que una que suele consumirlos.

Conclusión 2: Una persona que consume granos enteros no tiene riesgo de sufrir enfermedades crónicas ni muerte prematura.

Conclusión 3: Una persona que consume granos enteros tiene menor probabilidad de sufrir enfermedades crónicas y muerte prematura que una que no los consume.

d. Si se realizara este estudio en otra población, ¿se obtendría la misma conclusión? ¿Por qué? Justifica tu respuesta y coméntala con tu curso.

2. Analiza la siguiente noticia y responde.

El lado solidario de Chile: uno de cada cuatro jóvenes realiza voluntariado

Uno de cada cuatro jóvenes realiza trabajos de servicios comunitarios de forma voluntaria. Esa es una de las conclusiones que arroja la IX Encuesta Nacional de la Juventud, estudio desarrollado durante 2018 para conocer diversas temáticas que involucran a este grupo.

Según los resultados del apartado que aborda el tema del voluntariado, el promedio de jóvenes que realizan estas actividades se mantiene bordeando el 28% y las mujeres participan levemente más en estos trabajos (29,1%) que los hombres (26,5%).

Los jóvenes expresaron, en su mayoría, que realizan trabajos de voluntariado por temas vocacionales (35,1%) y para adquirir experiencia (12,3%). A su vez, son las regiones de los extremos del país las que concentran la mayor proporción de voluntarios.

La IX Encuesta Nacional de la Juventud 2018 evidencia que existe una diferencia de participación de los jóvenes en estas actividades según su situación socioeconómica (35% de jóvenes de ingresos altos versus el 25,4% de ingresos bajos) y según viva en zonas urbanas (28,5%) o rurales (23,1%).

Asimismo, junto con el voluntariado, esta encuesta abordó los lugares donde los jóvenes realizan actividades de participación política: el 17,9% lo realiza en el club deportivo; el 16,7% en la comunidad o con grupos virtuales y el 7,2% en federaciones de estudiantes.

La IX Encuesta Nacional de la Juventud se aplicó en todas las regiones a una muestra aproximada de 9.700 jóvenes de entre 15 y 29 años.

Fuente: https://www.latercera.com (Adaptación)

a. Se selecciona un joven de entre 15 y 29 años. Según el texto, ¿cuál es la probabilidad de que este realice un voluntariado?

b. ¿Cuál es el total de jóvenes de entre 15 y 29 años que realiza voluntariado?

c. ¿Cómo calculaste lo pedido en la pregunta anterior? ¿Qué datos utilizaste?

Para analizar correctamente la información de los medios de comunicación, es importante que conozcas los conceptos de estadística y probabilidad. Si no tienes claridad respecto de ellos, puedes llegar a conclusiones erradas.

3. Analiza los siguientes datos. Luego, realiza las actividades.

Un estudio de la empresa GFK Adimark consultó en 2019 acerca de las preocupaciones de la gente relacionadas con la crisis ambiental. Las respuestas fueron las siguientes.

¿Cuáles son los 3 principales problemas medioambientales de Chile?

- Sequía y escasez de agua: 92%
- Deforestación: 45%
- Aumento de desechos/basura: 41%
- Calentamiento global: 40%
- Contaminación atmosférica: 29%
- Sobrepesca: 17%
- Extinción de especies y pérdida de biodiversidad: 15%
- Expansión urbana: 12%
- Degradación del suelo: 9%

Fuente: https://www.gfk.com

a. Se elige al azar a una persona encuestada. ¿Cuál es la probabilidad de que se manifestara preocupada por la deforestación?

b. Se elige al azar a una persona encuestada. ¿Cuál es la probabilidad de que se manifestara preocupada por la expansión urbana?

c. ¿Cuál es la preocupación menos recurrente?

4. Reúnanse en grupos de 3 a 4 integrantes. Busquen investigaciones y artículos que se relacionen con probabilidad. Luego, realicen las actividades.

a. Identifiquen la temática con la que se relaciona el artículo y las probabilidades.

b. ¿De qué se trata el artículo? Realicen un resumen con las ideas más importantes.

c. ¿Qué conclusiones erróneas podría asumir una persona que desconoce sobre conceptos probabilidad? Mencionen un ejemplo.

d. ¿Existe algún tipo de manipulación de la información? ¿Con qué propósito creen que se realiza esto en algunos casos? Discutan sus ideas.

e. Expongan su análisis frente al curso e intercambien sus análisis.

▶ Para concluir

a. ¿Es importante conocer conceptos de probabilidad y estadística para leer noticias o estudios? Justifica.

b. Ponte en el lugar de alguien que no sabe de probabilidad y estadística. ¿Qué conceptos le harían más entendible la información de un estudio?

Probabilidad y toma de decisiones

¿Cuál es el rol de la probabilidad en la sociedad?

¿Qué datos y probabilidades consultas en tu día a día?

Objetivo: Aplicar la probabilidad para resolver problemas y tomar decisiones.

1. Analiza la siguiente información. Luego, responde:

Tres amigos desean invertir su dinero. Para ello pueden elegir entre tres empresas. En la primera, la probabilidad de obtener ganancias es de 30% y la de perder dinero, de 40%. En la segunda, la probabilidad de tener ganancias es de 10% y de perder, 60%. En la tercera, la probabilidad de obtener ganancias es de 20% y de perder, 5%.

a. El primero desea que el riesgo de perder dinero sea el menor posible. ¿En cuál de las empresas debe invertir?

b. El segundo prefiere elegir la empresa con la mayor probabilidad de ganancia posible. ¿Cuál de las tres empresas debiera elegir?

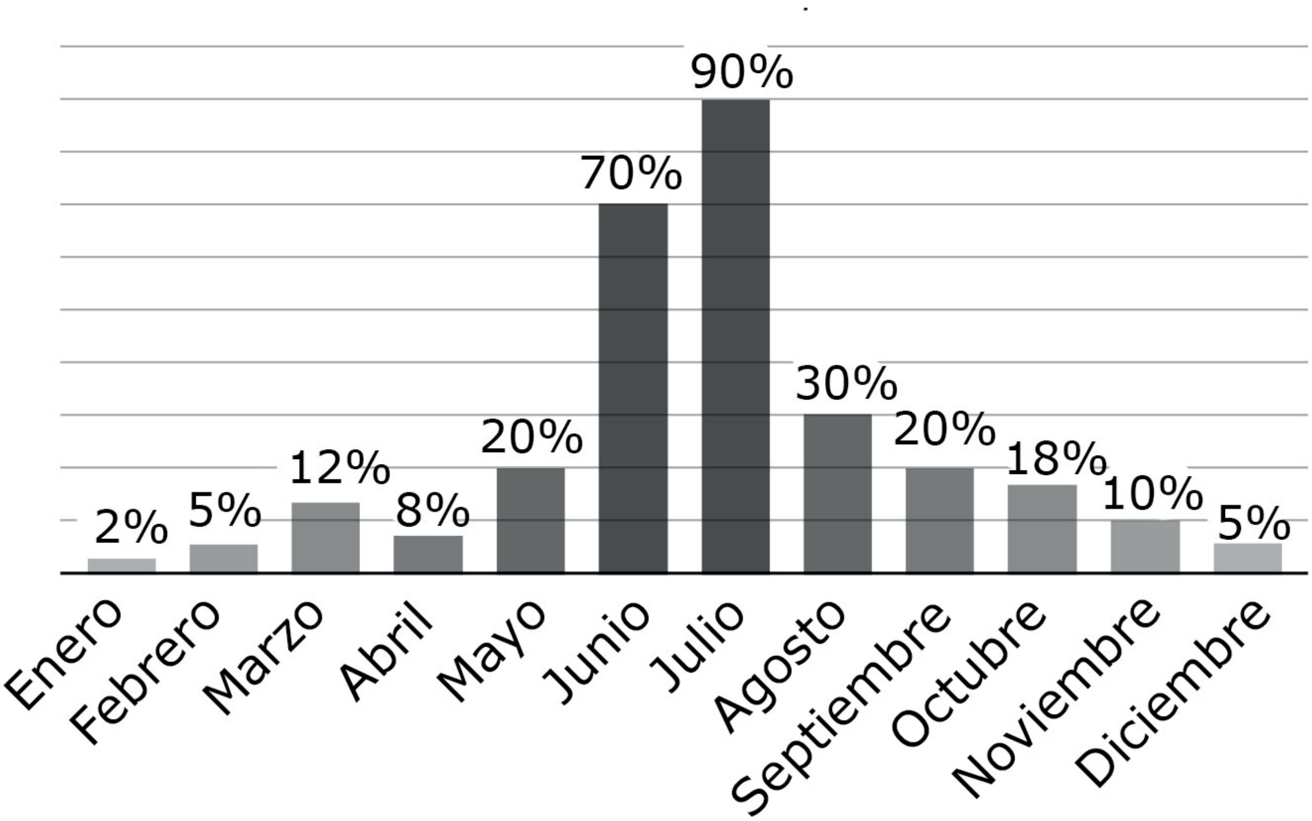
c. El tercero quiere una empresa en la que no se produzca ganancia ni pérdida de dinero. ¿Cuál de las empresas debe elegir?

2. Analiza la situación. Luego, responde.

El gráfico muestra la probabilidad de que llueva 10 o más días del mes en cierta ciudad. Una empresa de la ciudad, que vende materiales para la construcción, tiene mayores ventas en los meses en los que la probabilidad de lluvia durante 10 días o más es menor que 0,2. Además, en esos meses debe contratar una mayor cantidad de trabajadores.

Por otro lado, cuando la probabilidad de lluvia supera 0,6, se generan pérdidas.

Probabilidad de lluvias por mes



a. Según la información, ¿en qué meses es probable que la empresa deba contratar más trabajadores?

b. Los dueños de la empresa deciden cerrar durante los meses que probablemente llueva 10 o más días. ¿Cuántos meses cerrarán?

c. Un análisis de último minuto establece que la empresa generará el triple de ganancias respecto de un mes normal, Esto ocurrirá el tercer mes del periodo en que la probabilidad de que llueva 10 o más días en cada uno de ellos sea inferior a 0,07. ¿En qué mes podría ocurrir esto? Justifica.

En muchas situaciones, las probabilidades permiten valorizar los posibles resultados de estudios estadísticos o análisis de casos. De este modo, facilitan así la toma de decisiones con respecto a determinadas opciones. Observamos muchos de estos casos en diversas áreas: empresarial, económica, forestal, ciencias sociales, entre otras.

3. Se ha realizado una encuesta a usuarios de servicio de importación de materiales eléctricos por Internet. Se les consultó la calidad, la puntualidad y el servicio de posventa de cada empresa. La siguiente tabla muestra las probabilidades asociadas a cada indicador.

	Calidad	Puntualidad	Post venta
Empresa A	0,70	65%	55%
Empresa B	78%	0,58	0,67

Empresa C	75%	0,8	74%

a. ¿Qué dificultades podría tener una persona al leer la información de la tabla? ¿Cómo lo solucionarías?

b. Un cliente quiere comprar materiales eléctricos para una obra que debe estar lista en una fecha determinada. ¿Cuál empresa debería escoger?

c. A un cliente no le interesa especialmente el servicio de posventa. ¿Cuál empresa es más conveniente? Justifica tu respuesta.

4. Analiza la siguiente tabla. Luego, responde.

% G = Probabilidad de ganancias

% P = Probabilidad de perdidas

Opciones de inversión ofertadas por un banc					
Monto	Fondo A		Fondo B		For
	% G	% P	% G	% P	% G
Desde $100.000 hasta $999 999	14%	12%	22%	19%	10%
Desde $1.000.000 hasta $2.999.999	6%	2%	5%	0,5%	7%
Desde $3.000.000 hasta $6.000.000	12%	17%	18%	9%	11%

a. Se desea invertir $2.500.000. ¿En cuál de los tres fondos es más probables obtener ganancias? ¿En cuál es más

o	
ndo C	
	% P
	15%
	1%
	30%

probable obtener pérdidas?

b. Se quiere invertir $6.000.000 en un mismo fondo, pero dividiendo el monto en $2.000.000 y $4.000.000. ¿En cuál de los tres fondos conviene hacerlo considerando solamente las probabilidades de obtener ganancias?

c. Se desea invertir $1.500.000, pero se quiere correr un bajo riesgo de pérdidas. ¿Cuál es el fondo más conveniente para hacerlo?

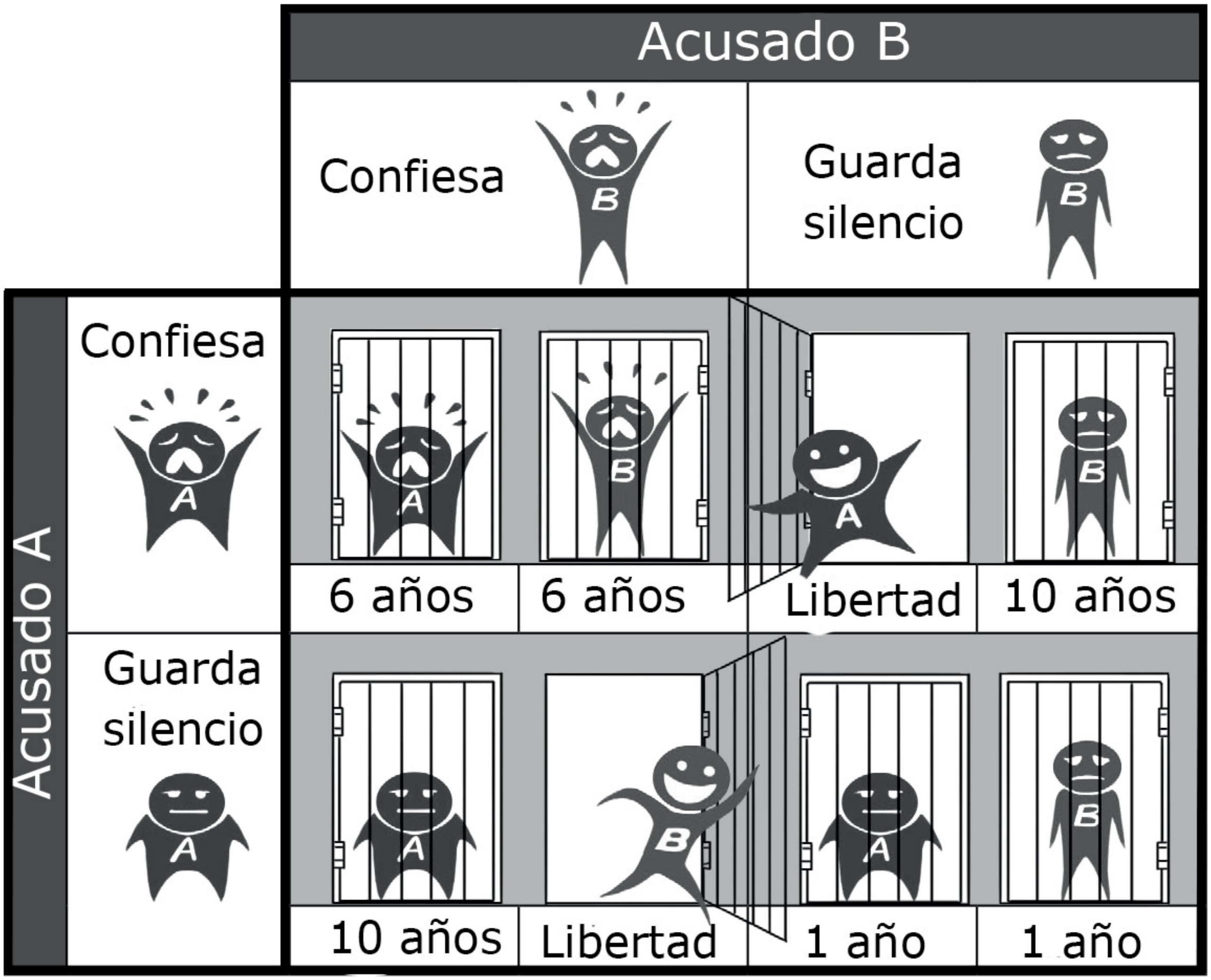
d. Martina quiere invertir un mismo monto en los tres fondos. ¿Entre qué valores es más conveniente hacer esa inversión?

▶ Actividades de profundización

5. El dilema del prisionero consiste en el siguiente problema:

Se interroga a dos sospechosos, pero no hay pruebas suficientes para condenarlos. Después de separados, se les ofrece el mismo trato:

Si uno confiesa y su cómplice no, el cómplice será condenado a la pena total, diez años, y el que confiese será liberado. Si ambos confiesan, ambos serán condenados a seis años. Si ambos lo niegan, todo lo que podrán hacer será encerrarlos por un cargo menor.



a. Se considera equiprobable que un acusado confiese y guarde silencio. ¿Qué probabilidad tiene cada escenario?

b. Analiza los posibles casos:

I. ¿Cuál de los resultados finales de la situación es más conveniente para ambos?

II. Si uno niega el trato, ¿cuál es el escenario más favorable para el otro?

c. Debate con un compañero la mejor opción en el dilema del prisionero. Adopten cada uno las posturas a favor confesar y a favor de guardar silencio. Utilicen las probabilidades calculadas anteriormente para argumentar.

Luego de estudiar el dilema del prisionero, ¿qué opción crees que tiene mayor probabilidad? ¿Cuál es más conveniente? ¿Por qué?

▶ Para concluir

a. Investiga y comenta a qué situaciones crees que se aplica el diagrama del prisionero.

b. ¿En qué situaciones cotidianas utilizas probabilidades para tomar decisiones?

Interpretación de la probabilidad

¿Cuándo se puede utilizar la regla de Laplace para calcular probabilidades?

¿Qué significa que dos sucesos sean equiprobables?

Objetivo: Identificar los tipos de probabilidad presentes en situaciones cotidianas.

1. Analiza la siguiente situación. Luego, responde.
Para definir la pareja ganadora de un concurso, esta debe lanzar dos dados gigantes de 4 caras y anotar la suma.

Si la suma es 5, pasan a la final. Si es 6, pueden ir al repechaje.

a. ¿Cuál es la cantidad de combinaciones que hay en el espacio muestral?

b. ¿Cuáles son los resultados posibles? Anótalos en tu cuaderno.

c. Si la suma de ambas caras es 2, entonces la pareja obtiene un premio sorpresa. ¿Cuál es la probabilidad de que la pareja obtenga este premio?

d. Si la suma de ambas caras es 8, entonces los jugadores tienen la oportunidad de lanzar los dados otra vez. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra ese suceso?

Un experimento se realiza al azar y tiene n formas igualmente probables y mutuamente excluyentes. Además, si m resultados cumplen con el atributo A, la probabilidad de A está dada por la siguiente expresión:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Esta definición, que se conoce como regla de Laplace, corresponde a la probabilidad clásica.

Por ejemplo, al obtener un número par de un dado de seis caras se tiene que:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y los casos favorables son $A = \{2, 4, 6\}$ donde $m = 3$ y $n = 6$, por tanto, $P(A) = \frac{3}{6}$

2. Otro de los juegos del concurso es una trivia. Antes de responder las preguntas, los concursantes deben tocar una chicharra. Se sabe que las chicharras están defectuosas y a veces no suenan. Por ello, se decidió estudiar al azar una de ellas.

Número de veces que se tocó la chicharra	Número de veces que la chicharra no sonó	Frecuencia relativa
10	1	0,1
30	3	0,1
50	4	0,08
200	15	0,075
500	39	0,078
1000	78	0,078

a. ¿Qué sucede con la frecuencia relativa conforme cambia la cantidad de veces que se tocó la chicharra?

b. Observa lo que ocurre a medida que aumenta la cantidad de veces que se toca la chicharra. ¿A qué valor tiende la probabilidad de que esta no suene?

La frecuencia relativa de los resultados favorables a A se aproxima al valor de la probabilidad teórica a medida que el número de repeticiones aumenta. Esto se conoce como probabilidad experimental.

c. Los productores del concurso dicen que están en un 80 % seguros de que, si el programa cambia de horario, será visto por más gente. ¿En que se basa la afirmación de los productores? ¿Qué diferencia existe entre esa probabilidad y las que observaste anteriormente?

En muchas afirmaciones la probabilidad puede interpretarse como el grado de creencia con respecto a la ocurrencia de una afirmación. Esto se conoce como probabilidad subjetiva. En esos casos, la probabilidad representa un juicio personal acerca de un fenómeno impredecible.

3. Identifica el tipo de probabilidad en cada situación. Justifica en cada caso.

a. Un estudiante estima que tiene una probabilidad de 0,76 de aprobar un examen.

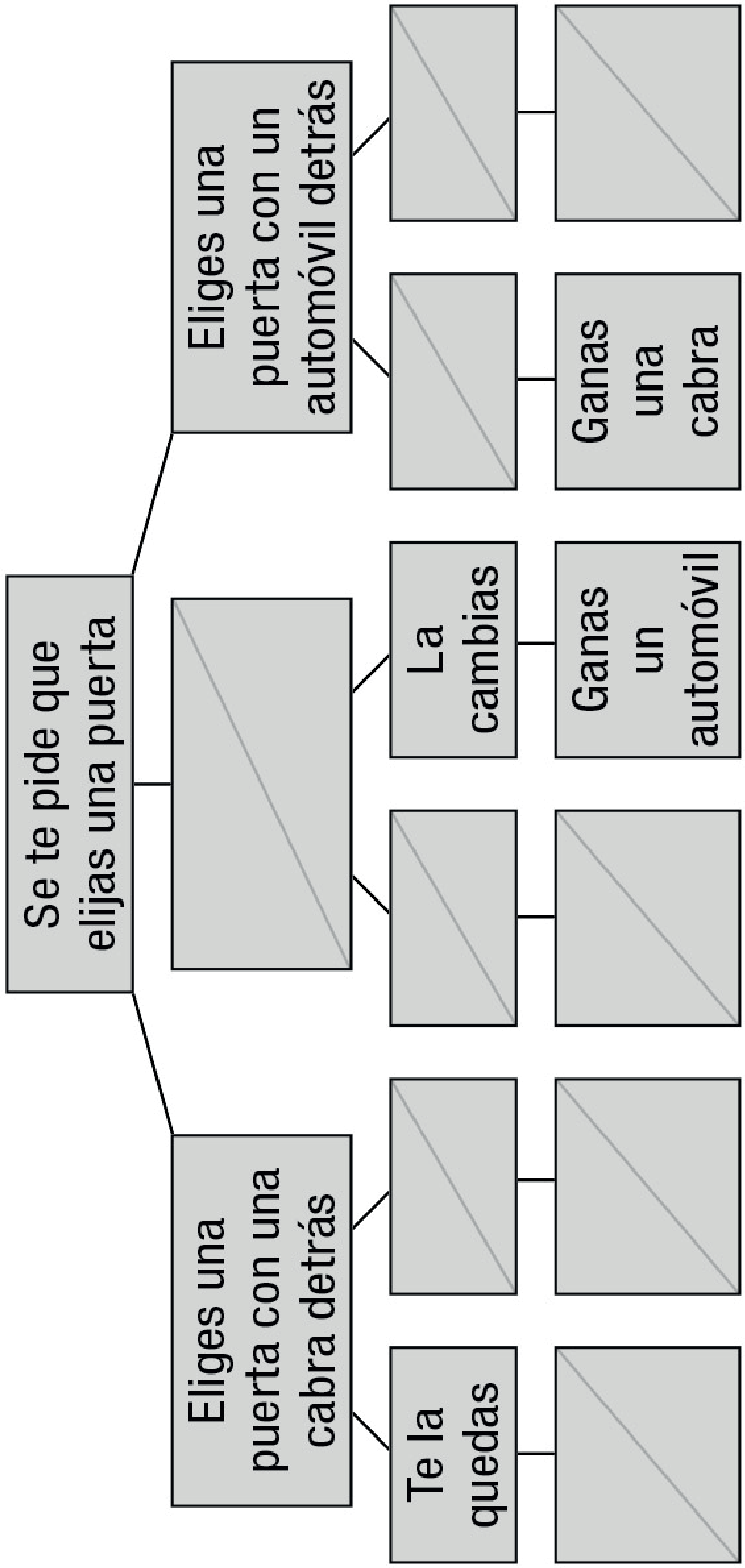
b. Al lanzar una moneda, hay una probabilidad de 0,5 de que salga cara.

c. Es muy probable que mañana haya mucho tráfico porque comienzan las clases.

d. Se estima que la probabilidad de tener un accidente en carretera es del 7% en septiembre de 2021. Esto, considerando los accidentes de septiembre de 2020.

e. Estudios científicos indican que en 20 años más será menos probable que las personas fumen.

4. El Problema de Monty Hall es un problema de probabilidad inspirado por el concurso televisivo estadounidense Let's Make a Deal (Hagamos un trato). Su nombre proviene del presentador, Monty Hall. En este concurso, el participante escoge una puerta entre tres. Su premio consiste en lo que se encuentra detrás de ella. Sin embargo, antes de abrirla, el presentador, que sabe dónde está el premio, abre una de las otras dos puertas y muestra que detrás de ella hay una cabra. Ahora tiene el concursante una última oportunidad de cambiar la puerta escogida.


Se te pide que elijas una puerta
Eliges una puerta con una cabra detrás
Eliges una puerta con un automóvil detrás
Te la quedas
La cambias
Ganas un automóvil
Ganas una cabra

a. Completa en tu cuaderno el diagrama.

b. ¿Qué decisión crees que es mejor: quedarse con la puerta o cambiarla? Comenta con tu curso.

c. Realiza una simulación del experimento. Para ello anota en una hoja de cálculo:

Paso 1: Escribe lo siguiente:

Puerta 1: En la celda A2:

"=Aleatorio()<1/3"

Puerta 2: En la celda B2:

"=SI(A2=Falso;Aleatorio()<1/2)"

Puerta 3: En la celda C2:

"=NO(O(A2:B2))"

Elección: En la celda D2:

"=Aleatorio.entre(1;3)"

Cambiar la puerta: En la celda E2:

"=SI(elegir(D2;A2;B2;C2)=

Verdadero;Falso;verdadero)".

Paso 2: Selecciona la segunda columna y cópialo para generar más simulaciones. Agrega en la columna F el conteo. Para ello, escribe:

"=CONTAR.SI(E:E,VERDADERO/CONTARA(E:E)-1)" y asígnale formato de porcentaje.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Puerta 1	Puerta 2	Puerta 3	Elección	Cambiar	Aciertos al cambiar	
2	FALSO	FALSO	VERDADERO	1	VERDADERO	100%	
3	FALSO	VERDADERO	FALSO	2	VERDADERO		
4	VERDADERO	FALSO	FALSO	3	VERDADERO		
5							

¿Debe el concursante mantener su elección original o escoger la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia?

¿Qué tipo de probabilidad utilizaste en tu respuesta final? Discute en parejas.

▶ Para concluir

a. Proporciona un ejemplo para cada tipo de probabilidad. Argumenta su clasificación en cada caso.

b. ¿Qué estrategia utilizarías para diferenciar la probabilidad experimental de la probabilidad clásica?

Antes de continuar: Evaluación intermedia

¿Cuáles son nuestros hábitos?

En grupos de tres integrantes, discutan sobre la información entregada en cada caso. Luego, respondan.

1. En octubre de 2019, un medio de comunicación dio a conocer esta noticia en relación con los índices de sobrepeso en Chile.

Una alarmante realidad se dio a conocer recientemente en nuestro país. Los últimos datos publicados por la OCDE muestran que el 74% de la población adulta en Chile sufre sobrepeso u obesidad. Esto sitúa a Chile en el país de la OCDE con más alta tasa de obesidad y sobrepeso, por encima de México (72,5%) y Estados Unidos (71%).

Fuente: https://www.elmostrador.cl

a. ¿Cuáles pueden ser las causas de estos índices de obesidad en Chile?

b. Realicen un gráfico que represente la información entregada en la noticia. ¿Qué tipo de gráfico utilizaron y por qué?

2. Otro medio nacional, en enero de 2019, dio a conocer los resultados de una encuesta sobre actividad física y deporte.

a. ¿Cuántas personas realizan actividad física según las recomendaciones de la OMS?

b. ¿Cómo se relaciona esta información con la relativa a índices de sobrepeso?

c. Investiga con tus compañeros: ¿Cuáles son las recomendaciones de la OMS en relación con la actividad física?

El **Ministerio del Deporte** dio a conocer los resultados de la **Encuesta Nacional de Actividad Física y Deportes**. Su última versión encuestó a 6025 personas mayores de 18 años a lo largo de todo Chile.

Las cifras dadas a conocer revelaron que el 18,7% de los encuestados realiza actividad física bajo las recomendaciones de **la Organización Mundial de la Salud** (OMS).

Las cifras confirmaron la tendencia de

que la tasa de inactividad de los chilenos ha ido a la baja, pasando de 87,2% de inactivos en 2006, a 81,3% 2018. Sin embargo, entre 2015 y 2018 se produjo un estancamiento: apenas un 0,5 de los chilenos mayores de 18 años decidió moverse.

Fuente: http://www.ipsuss.cl

3. Elaboren una lista con 3 propuestas para mejorar los hábitos de vida saludable en los estudiantes de su colegio. Realicen un afiche con estas propuestas.

▶ Reflexiono

a. ¿Qué estrategia usas para discriminar entre los distintos tipos de probabilidad de un argumento?

b. ¿En qué otros casos usas probabilidades? Comenta con tu curso.

¿Qué aprendí?

Evalúa los conocimientos adquiridos a lo largo de la Unidad realizando las siguientes actividades.

1. Con respecto a los motivos que llevaron a cambiar la forma de las patentes en Chile:

Las formas de identificar los vehículos en Chile han variado con el tiempo.

En 1985, para ordenar el sistema, se decidió que las patentes constarían de 6 caracteres: 2 letras y 4 dígitos.

Posteriormente, en 2008, debido al alto crecimiento del parque automotor, se implementó un cambio que rige hasta hoy. Las patentes consisten en 4 letras y 2 dígitos.

a. Calcula el total de patentes posibles según la nomenclatura usada entre 1985 y 2007.

b. Calcula el total de patentes posibles con la nomenclatura actual.

c. Compara ambos números con la población chilena de la época. ¿Tiene sentido un cambio como el realizado en 2007? Argumenta.

d. Calcula el total de patentes si solo se utilizarán letras para los 6 caracteres.

2. Calcula y resuelve los siguientes problemas de combinatoria:

a. En una carrera participan 10 corredores. Calcula de cuántas formas podrían repartirse los 3 primeros lugares.

b. ¿Cuántos números de 3 dígitos se pueden formar con los números 2,4,6,8 y 0 si ningún dígito se repite?

c. Un equipo de básquetbol tiene 5 integrantes. Calcula el total de formaciones que se podrían hacer con 12 jugadores si todos pueden jugar en cualquier posición.

3. Resuelve los siguientes desafíos. Calcula la probabilidad solicitada según corresponda:

a. Lanzar 2 dados de 6 caras y obtener 2 números 6.

b. En un naipe español, sacar dos cartas seguidas y que la primera sea oro y la segunda una espada.

c. Se tiene una caja con 5 pelotas: 3 negras y 2 blancas. Se sacan 2 pelotas una tras otra, sin reposición. ¿Qué color debiese salir primero para que aumente la probabilidad de que la siguiente sea de color negro?

d. Sacar al menos 1 cara al lanzar 4 monedas al mismo tiempo.

e. De la generación 2019 de un colegio, el 60% reprobó Lenguaje, el 50% reprobó Historia y el 20% reprobó ambas asignaturas. ¿Qué probabilidad hay de que, al elegir un estudiante al azar, este haya reprobado Lenguaje o Historia, pero no ambas?

4. Para cada variable aleatoria definida, determina sus valores. Luego, construye una tabla de doble entrada adecuada para sus probabilidades.

a. Lanzar 3 monedas. X corresponde al número de caras obtenidas.

b. Se lanzan dos dados de 6 caras. X corresponde al producto de los números obtenidos.

5. La tabla muestra la función de probabilidad de la variable aleatoria X.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,1	0,2	0,35	0,05	2m

a. ¿Cuál es el valor de m?

b. ¿Cuál es el valor de $P(x \geq 3)$

c. Inventa un problema que se represente con los valores de la tabla.

6. En 2013, el New York Times, definió la estadística como "la ciencia de aprender de los datos (o razonar acerca de los datos), la teoría y métodos de extraer información de los datos para solucionar problemas del mundo real, la ciencia de la incertidumbre, la ciencia interdisciplinaria por excelencia, el arte de contar una historia con datos”.

a. ¿Qué opinas acerca de esta definición de estadística?

b. ¿Qué importancia tiene que sea una ciencia interdisciplinaria?

▶ Reflexiono

¿Con qué otras asignaturas o contenidos de la Matemática puedes relacionar los contenidos tratados en la Unidad? Comenta en parejas

¿Qué dificultades tuviste en la evaluación? ¿Cómo lograste superarlas?

Unidad 4: Síntesis

Probabilidad y estadística

¿Qué es la combinatoria?

Son las formas de realizar agrupaciones con los elementos de un conjunto. Los diferentes tipos son permutación, variación y combinación.

¿Cómo se calcula una permutación de un conjunto de n elementos?

Sin repetición: $Pn = n!$

Con repetición: $Pnp = \frac{n!}{p!}$