ADAPTACIÓN MACROTIPO

Matemática

2º Medio

TOMO I

Autores

Eduardo Díaz Valenzuela

Natalia Ortiz Solís

Patricio Norambuena Morales

Katherine Morales Valderrama

Manuel Rebolledo Hernández

Editorial SM

Centro de Cartografía Táctil
Universidad Tecnológica Metropolitana
Dieciocho 414
Teléfono: (562) 2787-7392
Santiago de Chile
Año 2021

ÍNDICE

TOMO I

Pág.

Lección 7.

TOMO II

Unidad 3

PRESENTACIÓN

Te damos la bienvenida a tu Texto de Matemática

El pensamiento matemático favorece el desarrollo de una actitud reflexiva y la comprensión de razonamientos y conceptos. La aplicación de la Matemática en diversos ámbitos permite cuantificar, razonar, representar y comunicar relaciones que se dan en el entorno.

Este texto está dividido en cuatro grandes unidades:

1. Números.

2. Álgebra y funciones.

3. Geometría.

4. Probabilidad y estadística.

UNIDAD UNO

NÚMEROS

En esta Unidad aprenderás sobre el conjunto de los números reales. Además, aprenderás sobre los logaritmos y sus propiedades.

1. Los patrones espirales del girasol en la imagen corresponden a 55 antihorarios y 34 en sentido horario. ¿Qué número se obtiene al dividir 55:34?

2. ¿Consideras que el resultado anterior es cercano al número φ que $\frac{13}{8}$? Comenta con tu curso.

3. ¿Por qué crees que phi no pertenece al conjunto de los números racionales?, ¿qué característica debería tener para que así fuera?

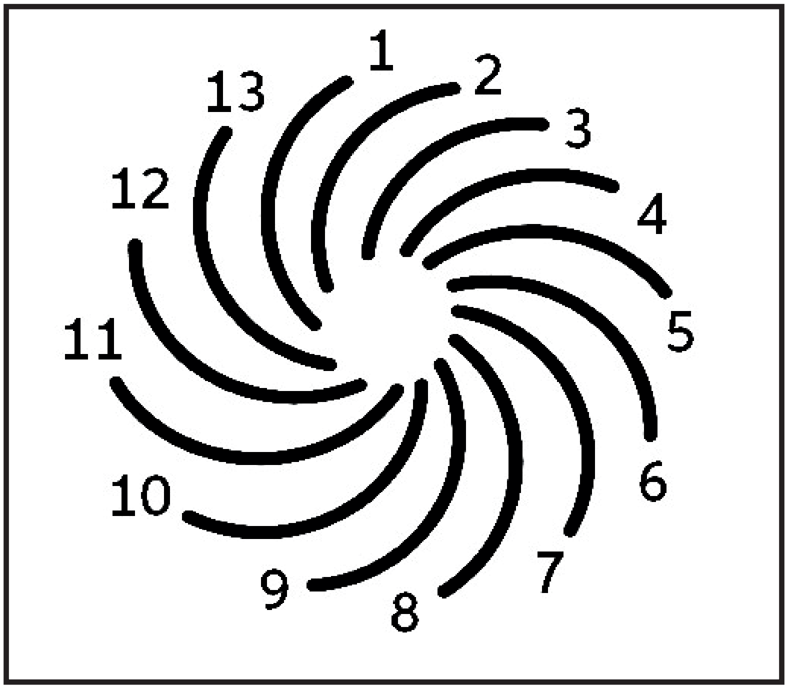
4. Investiga la relación del número φ con el arte, la arquitectura y el cuerpo humano.

Para saber más.
gbit.cl/T21M2MP007A

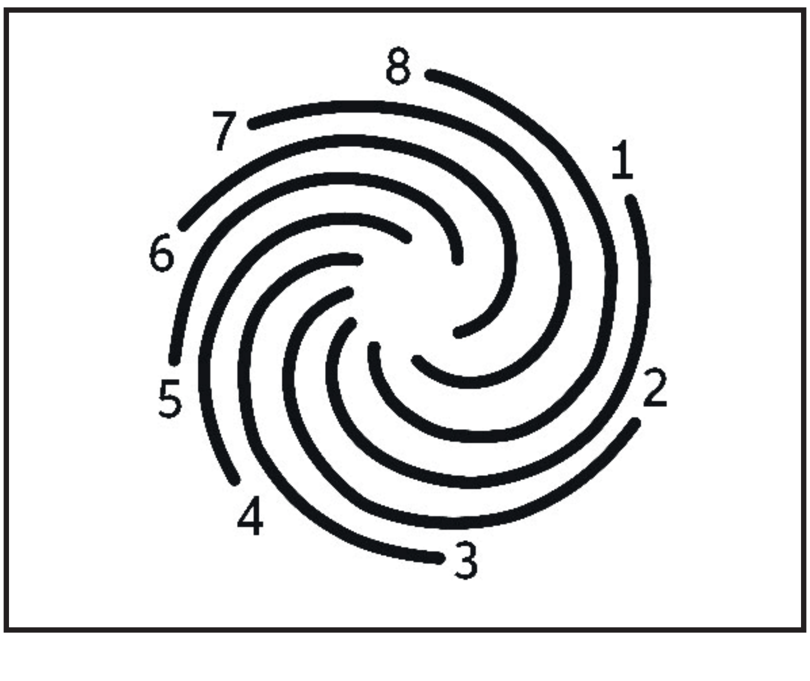
El número de oro, denotado por la letra griega φ (phi o fi), es un número equivalente al resultado de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, es decir 1,61803…

La sucesión de Fibonacci es un patrón de números fuertemente vinculado con el número de oro. Para formarla, se comienza con los números 1 y 1, el siguiente número, el 2, se forma a partir de los dos primeros (1+1), luego el 3 es (2+1), 5 es (3+2). Si continúas, obtendrás la sucesión: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 y así sucesivamente.

El mundo natural está repleto de matemáticas, incluso las semillas y los conos de pino se encuentran organizadas en patrones espirales. Por ejemplo, si contamos en sentido de las agujas del reloj los patrones:



Y luego en contra de las agujas del reloj:



Corresponden a dos números seguidos de la sucesión de Fibonnaci, cuya división $13 \div 8 = 1,625$ se acerca a φ.

Activo lo que sé: Evaluación diagnóstica

1. Realiza la descomposición prima de los números expresando el resultado final con potencias.

a. 108

b. 3168

2. Representa cada número racional como fracción irreducible.

a. $0{,}54\overline{3}$

b. $9{,}\overline{7}$

c. $8{,}\overline{2}$

d. $3{,}0\overline{24}$

3. Construye una recta numérica en tu cuaderno y representa en ella los siguientes números:

a. $\frac{1}{8}$

b. $-3{,}\overline{5}$

c. $2{,}8$

d. $-0{,}\overline{31}$

4. Evalúa si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

a. Todo número elevado a cero es igual a 1.

b. Si la base de una potencia es menor que cero y su exponente es par, el resultado es positivo.

c. El número π se puede escribir en forma de fracción.

5. Resuelve las multiplicaciones utilizando productos notables.

a. $(x + 9)\ (x + 9)$

b. $(3x^2 - 7)\ (3x^2 + 1)$

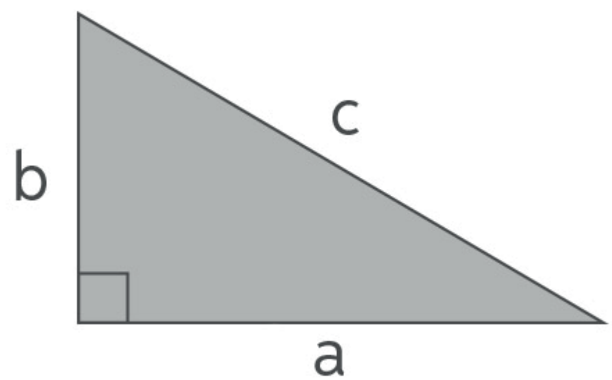
6. Aplica las propiedades de las potencias para resolver. Expresa el resultado final como potencia de exponente positivo.

a. $\left(\dfrac{3}{8}\right)^{4} \cdot \dfrac{1{,}5^{-4}}{0{,}25^{2}}$

b. $\left[\left(\dfrac{3}{8}\right)^{5} \cdot \left(\dfrac{8}{3}\right)^{-3} : \left(\dfrac{2}{3}\right)^{8}\right]$

c. $\dfrac{12^{-3} \cdot (9^{8})^{-2} \cdot 12^{-1}}{(9^{4} : 9^{6})^{8}}$

7. Resuelve los siguientes problemas utilizando el teorema de Pitágoras. Recuerda que $a^2 + b^2 = c^2$



a y b: Los lados que conforman el ángulo de 90º corresponden a catetos.

c: El lado opuesto al ángulo de 90º corresponde a la hipotenusa.

a. Un cateto de un triángulo rectángulo mide 24 cm y la hipotenusa, 40 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?

b. Se afirma que un triángulo de lados 5, 7 y 35 cm es rectángulo ya que:

$5^2 + 7^2 \rightarrow (7 \cdot 5)^2 \rightarrow 35^2$

¿Cuál fue el error cometido?

8. Aproxima a la décima los siguientes números mediante el método de redondeo.

a. $3,\overline{051}$

b. $-3,\overline{57}$

9. Aproxima a la centésima los siguientes números mediante el método de truncamiento.

a. $9,\overline{915}$

b. $-0,\overline{891}$

▶ Reflexiono

¿Lograste realizar todas las actividades sin problemas? ¿Cuáles te resultaron más difíciles?

¿Hay algún contenido que debas reforzar? ¿Cómo lo harás?

Lección 1:
Los números reales

El conjunto de los irracionales

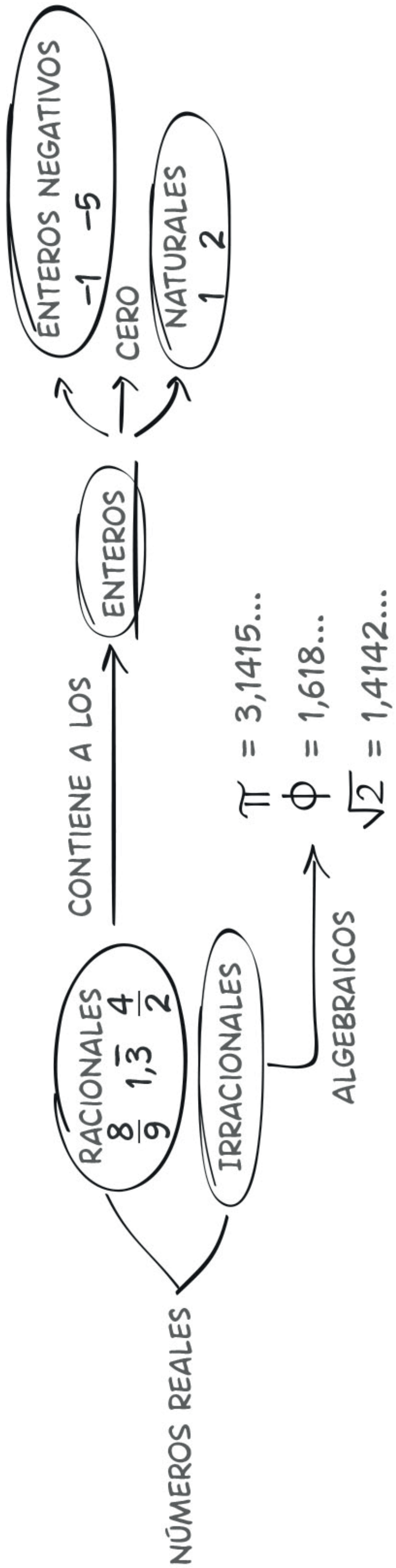
Calcula la diagonal de un cuadrado de lado 1 cm.

¿Qué recuerdas de las raíces cuadradas?

Objetivo: Conocer el conjunto de los números reales.

Existen números que no pueden ser representados como una fracción $\frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$. Estos conforman el conjunto de los números irracionales ($\mathbb{Q}^*$) y su expresión decimal tiene un número infinito de cifras decimales no periódicas.

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ corresponde a la unión de los racionales y los irracionales.


NÚMEROS REALES
RACIONALES
8/9 1,3̄ 4/2
IRRACIONALES
ALGEBRAICOS
π = 3,1415...
Φ = 1,618...
√2 = 1,4142...
CONTIENE A LOS
ENTEROS
ENTEROS NEGATIVOS
−1 −5
CERO
NATURALES
1 2

1. Analiza la siguiente demostración y responde.

Para demostrar que $\sqrt{2}$ no es un número racional, realizaremos una demostración por el método llamado reducción al absurdo:

Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional que se puede escribir como una fracción irreducible $\frac{m}{n}$, con m y n pertenecientes a $\mathbb{N}$.

Luego: $\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow \sqrt{2}n = m \Rightarrow 2n^2 = m^2$

De lo anterior, m^2 es múltiplo de 2, por lo que m también es múltiplo de 2. Luego, m = 2k. Es decir, para algún natural k se cumple m^2 = 4k.

Por lo tanto:

$\sqrt{2} = m^2 \Rightarrow 2n^2 = 4k \Rightarrow n^2 = 2k$

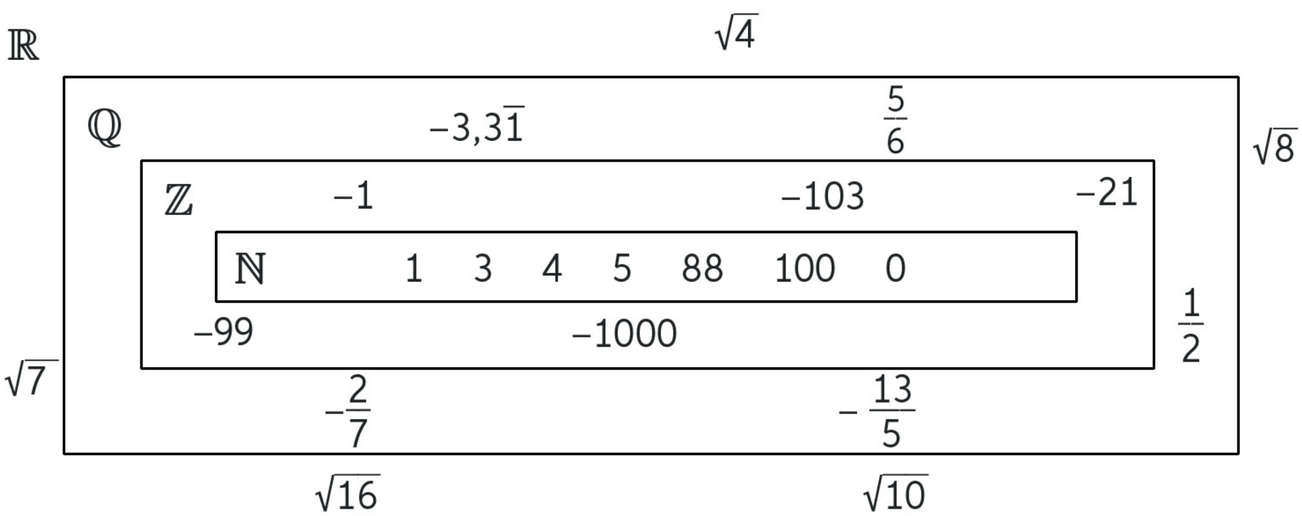
Entonces 2 divide a n^2, y como es número primo, 2 divide también a n.
Se acaba de demostrar que 2 divide a m y a n, lo que va en contra de la hipótesis de que $\sqrt{2}$ puede ser representado como una fracción irreducible $\frac{m}{n}$.
Por lo tanto , $\sqrt{2}$ no es un número racional.

a. ¿Qué quiere decir que sea una fracción irreductible?

b. ¿Qué pasos se utilizaron para llegar de $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ a $2n^2 = m^2$?

c. ¿Cuál es la contradicción a la que se llegó? Comenta con tu curso.

2. Analiza el siguiente esquema de conjuntos de números reales. Luego, responde.



a. Analiza los elementos que se anotaron en cada conjunto. ¿Se encuentran todos bien anotados?

b. ¿Cuál es el error que se cometió al realizar el esquema anterior? Compara tu respuesta en parejas.

c. Comenta con tu curso: ¿Qué precaución tendrías al construir un diagrama similar?

3. Clasifica los siguientes números en racionales ($\mathbb{Q}$) o irracionales ($\mathbb{Q}^*$).

a. -18

b. 0

c. $\sqrt{3}$

d. $-0,5\overline{7}$

e. $\sqrt{36}$

f. $1,\overline{9}$

4. Escribe

a. Cinco números racionales.

b. Cinco números irracionales.

c. Cinco números reales.

d. Cinco números enteros que no sean números naturales.

5. Determina si cada afirmación es verdadera o falsa. Justifica las falsas con un contraejemplo.

a. Todo número decimal infinito periódico es racional.

b. El 0 es un número racional e irracional.

c. Al dividir un número racional por un número irracional, se obtiene siempre uno irracional.

d. Existen números reales que no son racionales ni irracionales.

Para concluir

a. Presenta un contraejemplo que demuestre que cada afirmación es falsa.

- Todos los números irracionales son raíces cuadradas no exactas.

- Al sumar o restar números irracionales, el resultado es un número irracional.

b. ¿Qué diferencia a los números irracionales de los racionales periódicos?

Calcular en $\mathbb{R}$

¿Pertenecen todas las expresiones con raíces al conjunto de números irracionales? ¿por qué?

¿Qué características tienen las raíces cuadradas exactas?

Objetivo: Calcular operaciones con números reales.

1. Analiza el siguiente procedimiento de descomposición de raíces.

Paso 1: Busca un producto entre dos números donde al menos uno de los factores tenga raíz cuadrada exacta.

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = ?$$

Paso 2: Separa en una multiplicación de raíces, resolviendo la que tiene solución exacta.

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3}$$

Paso 3: Expresa la multiplicación entre el número racional y la raíz.

$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

a. ¿Por qué se eligió 4 y 3 para descomponer la raíz de 12?

b. ¿Qué hubiera ocurrido si se hubiera descompuesto la raíz de 12 en 6 y 2? ¿se hubiera podido descomponer la raíz?

Para resolver multiplicaciones y divisiones con raíces de igual índice, se multiplican o dividen las cantidades subradicales, es decir, todo lo que se encuentra dentro de las raíces y se conserva el índice.

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

Por ejemplo:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5} = \sqrt{10}$$

$$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{a \div b}\text{, con } b \neq 0$$

Por ejemplo:

$$\sqrt{6} \div \sqrt{3} = \sqrt{6 \div 3} = \sqrt{2}$$

Recuerda que:

Índice radical

$$\sqrt[2]{49} = 7$$

Cantidad subradical

Raíz

2. Simplifica las siguientes expresiones.

a. $\sqrt{72}$

b. $\sqrt{250}$

c. $\sqrt{75}$

d. $\sqrt{480}$

e. $\sqrt{720}$

f. $\sqrt{108}$

g. $\sqrt{162}$

h. $\sqrt{363}$

i. $\sqrt{147}$

j. $\sqrt{2700}$

k. $\sqrt{600}$

I. $\sqrt{7623}$

Para resolver adiciones y sustracciones con raíces, es necesario que sean semejantes; es decir, deben tener el mismo índice y la misma cantidad subradical. Por ejemplo:

$$\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 0{,}6\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$=\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}=$$

$$(1-0{,}6) \times \sqrt{3} + \left(-4 + \frac{1}{4}\right) \times \sqrt{2}$$

$$= 0{,}4\sqrt{3} - \frac{7}{2}\sqrt{2}$$

3. Resuelve.

a. $\sqrt{2} + \sqrt{2}$

b. $5\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$

c. $6\sqrt{5} - 4\sqrt{5} - 8\sqrt{5}$

d. $-2{,}3\sqrt{2} + \frac{3}{5}\sqrt{2} - 0{,}8\sqrt{2}$

e. $4\sqrt{6} - 3\sqrt{5} + \sqrt{5} - 4\sqrt{5}$

f. $7\sqrt{5} - 4\sqrt{20} + 3\sqrt{125}$

La operatoria de número reales cumple con las siguientes propiedades:

El opuesto de un irracional es irracional.

Ejemplo: $\pi \in \mathbb{Q}^*$, por lo que $-\pi \in \mathbb{Q}^*$.

El inverso multiplicativo de un irracional es irracional.

Ejemplo: $\frac{\pi}{1}$ es el inverso de π, por lo que $\frac{\pi}{1} \in \mathbb{Q}^*$

La adición o sustracción entre un racional y un irracional es irracional.

Ejemplo: $3 + \pi \in \mathbb{Q}^*$

El producto entre un racional distinto de cero y un irracional es irracional.

Ejemplo: $5 \cdot \pi = 5\pi$ es irracional.

El resultado del producto entre dos irracionales puede ser un racional o un irracional.

Ejemplo: $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6} \in \mathbb{Q}^*$

$\boxed{\text{Para la adición}}$

$a + b \quad \mathbb{R}$ (Clausura)

$a + b = b + a$ (Conmutatividad)

$(a + b) + c = a + (b + c)$ (Asociatividad)

$a + 0 = a$ (Elemento neutro)

$a + (-a) = 0$ (Elemento inverso)

$\boxed{\text{Para el producto}}$

$a \cdot b \in \mathbb{R}$ (Clausura)

$a \cdot b = b \cdot a$ (Conmutatividad)

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Asociatividad)

$a \cdot 1 = a$ (Elemento neutro)

$a \cdot a^{-1} = 1$ (Elemento inverso, $a \neq 0$)

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

(Distributividad del producto sobre la suma)

4. Determina si los siguientes números son racionales o irracionales.

a. $1 + \sqrt{16}$

b. $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

c. $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

5. Verifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica con un ejemplo en cada caso.

a. El producto de dos números irracionales siempre es un número irracional.

b. Todos los números irracionales son números reales.

c. Todo número real es un número racional.

d. Todos los números irracionales son raíces cuadradas no exactas

e. Al restar números irracionales, el resultado es un número irracional.

6. Resuelve.

a. $\sqrt{9} + \sqrt{4}$

b. $\sqrt{9 + 4}$

c. $(\sqrt{3} + \sqrt{27}\ )^2$

d. $(\sqrt{3 + 27}\ )^2$

e. $\sqrt{75 + 6}$

f. $\sqrt{15} - \sqrt{60}$

g. $2+ \sqrt{126 - 5}$

h. $5\left(\dfrac{2\sqrt{12}}{\sqrt{3}}\right)$

i. $\dfrac{2\sqrt{8}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}$

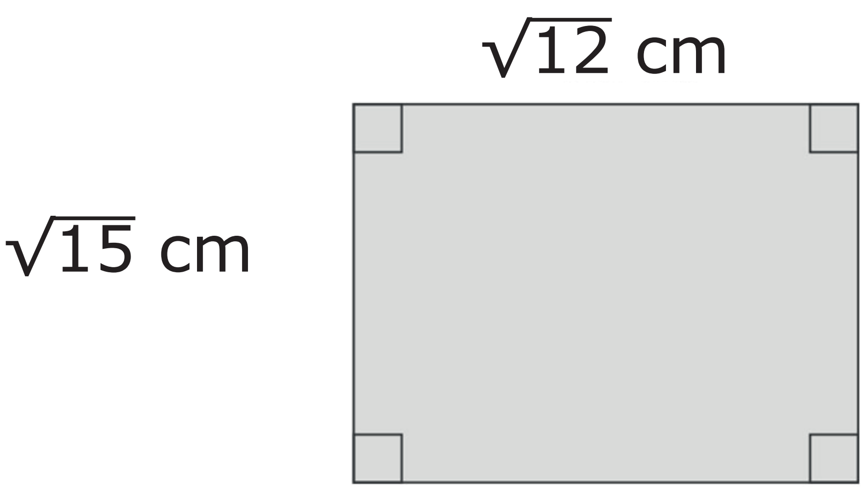
j. $\sqrt{\frac{1}{4}(0,\overline{9} - 3,\overline{9})}$

k. $\dfrac{(5+\sqrt{2})^2}{3}$

l. $\dfrac{(5+\sqrt{7})^2}{3} + \dfrac{(5-\sqrt{7})^2}{3}$

Geometría

7. Calcula el área de cada figura. Luego, simplifica las raíces cuando sea posible. Compara el resultado con tu compañero.



El área del rectángulo corresponde a:

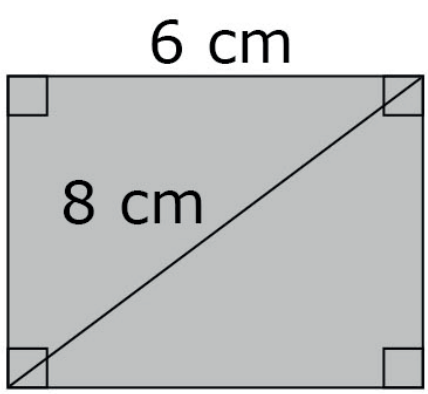
área = base × altura

$= \sqrt{12} \times \sqrt{15}$

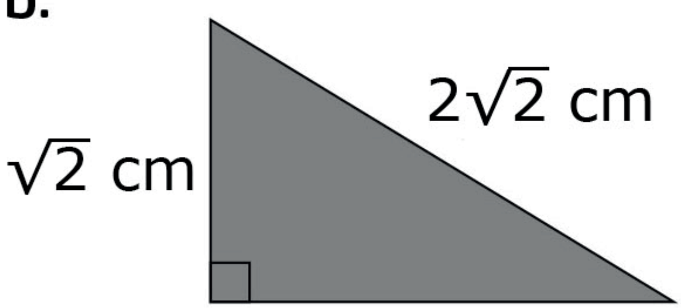
$= \sqrt{5 \times 3 \times 4 \times 3}$

$= 6\sqrt{5}\ \text{cm}^2$

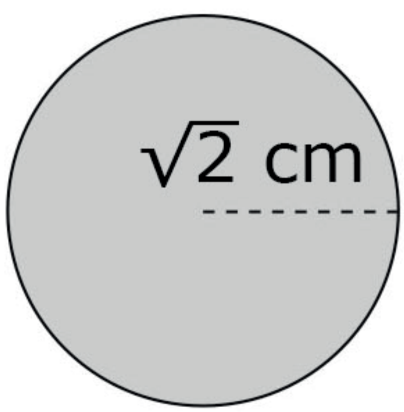
a.



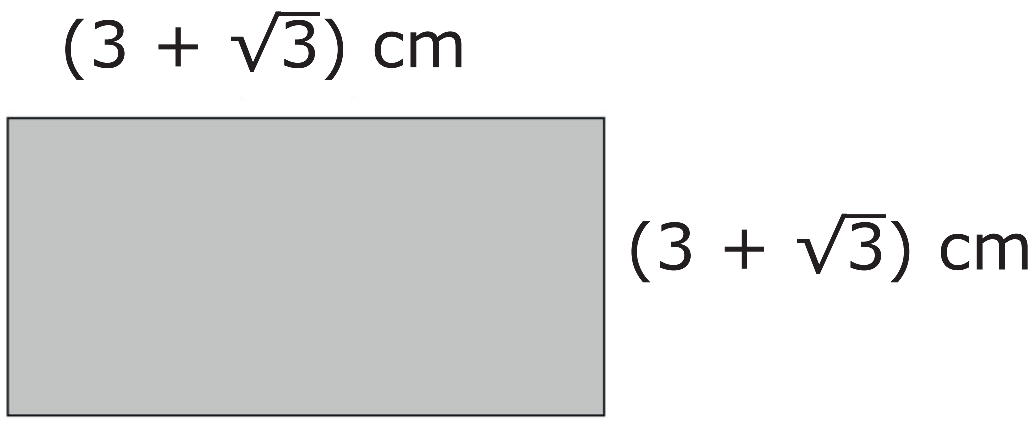
b.



c.



8. Analiza el rectángulo y responde.

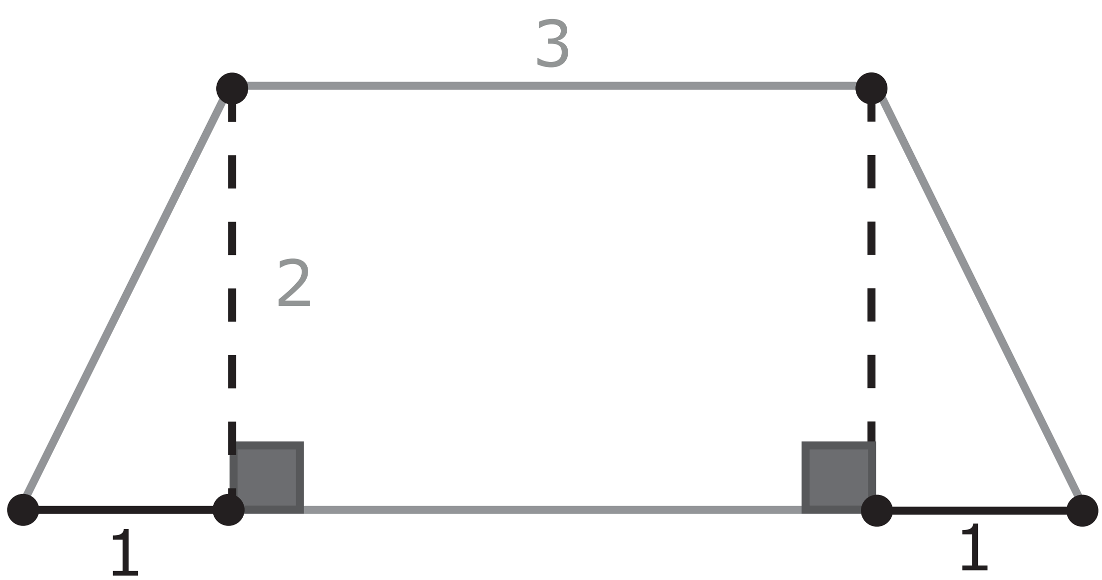


a. ¿Qué expresión representa su perímetro?

b. Se construye otro rectángulo con el mismo perímetro que el de la figura anterior. Si uno de sus lados mide $\sqrt{3}$ cm, ¿cuánto mide el otro lado del rectángulo?

Actividades de profundización

9. Determina el perímetro y el área del siguiente trapecio isósceles. Luego, identifica si los resultados anteriores corresponden a números racionales o irracionales.



Para concluir

a. Explica cómo operar dos raíces cuadradas.

b. Escribe dos números tales que su producto sea racional y uno sea irracional.

Estimar en $\mathbb{R}$

¿Qué recuerdas del teorema de Pitágoras?

¿Cómo ubicarías una raíz cuadrada en la recta numérica?

Objetivo: Realizar estimaciones de números reales.

Geometría

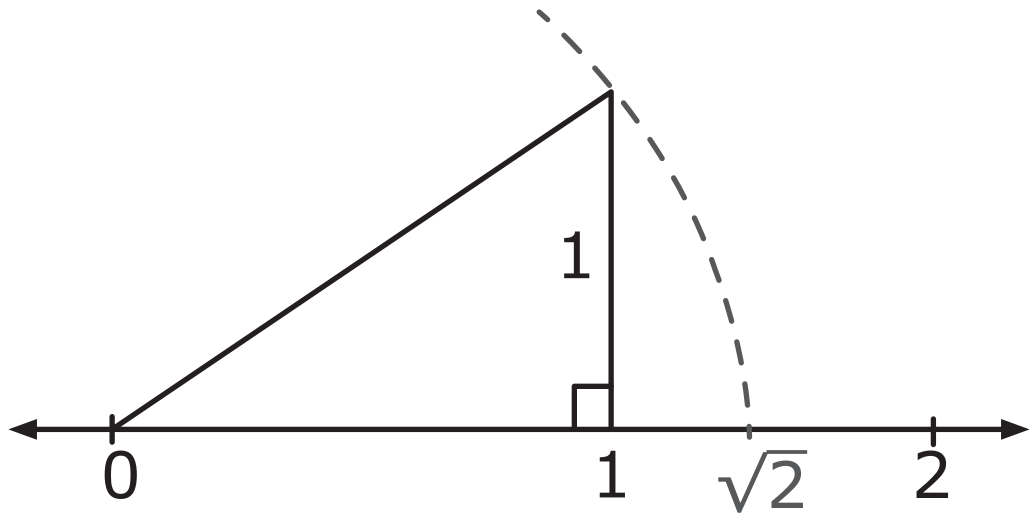
1. Analiza el siguiente procedimiento paso a paso para ubicar $\sqrt{3}$ en la recta numérica y estimar su valor. Puedes utilizar GeoGebra para observar la construcción.

Para realizar:
gbit.cl/T21M2MP014A

Paso 1: En una recta numérica graduada de 1 en 1, se construye un triángulo rectángulo de catetos 1. La base de este es el segmento sobre la recta numérica.

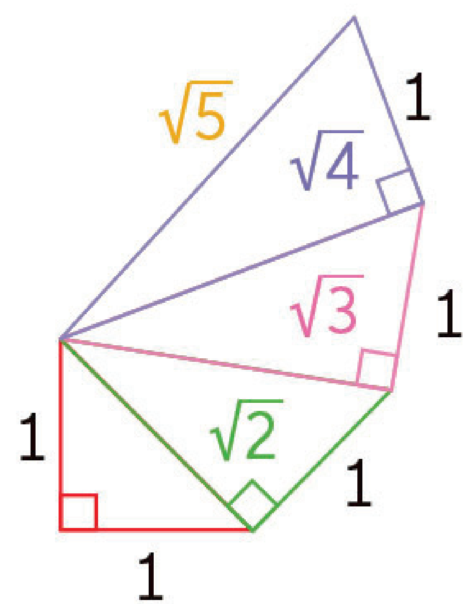
Paso 2: Con un compás se traza un arco de circunferencia con centro en 0 utilizando como radio la medida de la hipotenusa del triángulo.

Paso 3: Se marca la intersección entre el arco de la circunferencia y la recta numérica.



a. Repite el proceso para ubicar la raíz de 3 dentro de la recta numérica.

El método anterior es similar al que se utiliza para la construcción de la espiral de Teodoro de Cirene. Para construirla, se dibuja un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos midan 1. Luego, se construye un nuevo triángulo rectángulo, ya no isósceles. Los catetos de este nuevo triángulo son la hipotenusa del primer triángulo y uno perpendicular a esta y de medida 1. Este procedimiento se repite indefinidamente.



b. ¿Es correcto afirmar que se encuentra entre y 2? Explica.

c. ¿Entre qué números estimarías la raíz de 5? ¿Por qué?

Para saber más:
gbit.cl/T21M2MP014B

Para estimar raíces cuadradas, podemos representarlas en la recta numérica o aproximarlas mediante acotaciones sucesivas. Por ejemplo, el siguiente procedimiento muestra cómo estimar $\sqrt{10}$:

Paso 1: Decide entre qué números naturales está $\sqrt{10}$ observando las raíces cuadradas exactas.

Cuando a, b > 1 se cumple que:
$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

$\sqrt{1} = 1$ $\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{16} = 4$

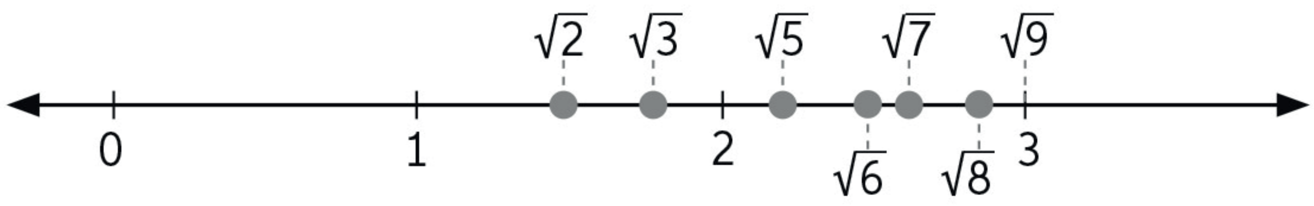
Como 10 está entre 9 y 16, $\sqrt{10}$ está entre $\sqrt{9}$ y $\sqrt{16}$, es decir, entre 3 y 4.

Paso 2: Para mejorar la aproximación, busca un número entre 3 y 4. Luego, calcula su cuadrado y compáralo con los demás valores. Por ejemplo, al escoger 3,5 y calcular su cuadrado: 3,52 = 12,25.

$9 < 10 < 12{,}25 \Rightarrow 3 < \sqrt{10} < 3{,}5$

Paso 3: Escoge un número entre 3 y 3,5 y repite el proceso. Puedes continuar así hasta que consigas la cantidad de decimales que necesites.

Para representar y ordenar números reales en la recta numérica, puedes utilizar el método gráfico. Esto permite estimar el valor de la raíz cuadrada. Para ello, se forman triángulos rectángulos cuya hipotenusa corresponda al valor de la raíz cuadrada.



Para comparar números irracionales, puedes elevar al cuadrado cada número y establecer la relación de orden entre ellos. Si $0 < a < b < c$, entonces se cumple que $0 < \sqrt{a} < \sqrt{b} < \sqrt{c}$.

Por ejemplo:

Si $6 < 7$, entonces $\sqrt{6} < \sqrt{7}$. Por tanto, $\sqrt{6}$ se ubica a la izquierda de $\sqrt{7}$.

Se puede estimar el valor de una raíz cuadrada utilizando cuadrados perfectos.

Para valores de a y b positivos, podemos decir que si $a^2 < x < b^2$, entonces $a < \sqrt{x} < b$.

2. Ubica en la recta numérica.

a. $\sqrt{2}$

b. $\sqrt{3}$

c. $\sqrt{5}$

d. $\sqrt{6}$

e. $\sqrt{12}$

f. $\sqrt{15}$

g. $\sqrt{24}$

h. $\sqrt{30}$

3. Ordena de menor a mayor los siguientes números. Guíate por el ejemplo.

Ordenar los números de menor a mayor: $\sqrt{6}$; 2,5 y $\frac{7}{2}$

- Primero, estimaremos el valor de $\sqrt{6}$, seleccionamos los cuadrados perfectos más cercanos (22 y 32). Tendremos que como $4 < 6 < 9$, entonces.

$\sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9} \longleftrightarrow 2 < \sqrt{6} < 3$. Por tanto, está entre 2 y 3.

Similar al anterior, calculamos $2{,}5^2 = 6{,}25$. Como $6{,}25 > 6$, entonces $\sqrt{6{,}25} > \sqrt{6} \longleftrightarrow 2{,}5 > \sqrt{6}$.

Finalmente, como $\frac{7}{2} = 3{,}5$ ordenamos: $\sqrt{6} < 2{,}5 < \frac{7}{2}$.

a. $\sqrt{35}$; $4{,}6$; $4\sqrt{3}$

b. $3\sqrt{5}$; $2\sqrt{3}$; $\frac{4}{8}$

c. $\sqrt{6}$; $2\sqrt{3}$; $\frac{39}{20}$

d. $\sqrt{2}$; 1,3; $\dfrac{14}{9}$

e. $\sqrt{5}$; 2,23; 2,24

f. $\sqrt{10}$; $\dfrac{1}{9}$; 2,087

4. Escribe en cada caso una aproximación (dos decimales) por truncamiento y por redondeo de los siguientes números. Usa calculadora.

- **Redondeo:** Se considera la cifra siguiente a la cual se quiere aproximar el número. Si ésta es mayor o igual a 5, se suma 1 a la cifra anterior. Si ésta es menor que 5, entonces la cifra se mantiene igual.

- **Truncamiento:** se escribe un número hasta una determinada cifra decimal.

a. $2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$

b. $-2{,}1\sqrt{5} + \frac{1}{3}\sqrt{5} - \sqrt{5} + 0{,}1\sqrt{5}$

c. $\sqrt{2} - \sqrt{8} + 2\sqrt{18}$

d. $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75}$

e. $\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

f. $\frac{2}{3}\sqrt{6} - 5\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 2\sqrt{8}$

Para aproximar números reales, tales como raíces cuadradas, puedes aplicar el método de redondeo, truncamiento o acotaciones sucesivas. Esta aproximación será distinta al valor real del número irracional en un valor llamado error de aproximación (Ea) y se calcula mediante:

$$E_a = |V_r - V_a|$$

Donde V_r corresponde al valor real del número y V_a al valor aproximado de un número irracional. Puedes utilizar una calculadora para estimar el valor de V_a.

5. Con la calculadora se puede estimar una raíz cuadrada. ¿Por qué se utilizó la palabra estimar y no calcular?

6. Estima por redondeo las siguientes raíces con 3 cifras decimales. Luego, determina el error de aproximación.

- Por ejemplo, el error al aproximar por redondeo a la centésima el número irracional Φ:

  $\Phi = 1{,}6180339.... \quad 8 \geq 5$

  Por redondeo se tiene: 1,62 y el error de aproximación es:

  $|1{,}6180339... - 1{,}62| =$
  $|-0{,}0019661...| =$
  $0{,}0019661... \simeq 0{,}00196$

  El error de aproximación es cercano a 0,00196.

a. $\sqrt{2}$

b. $\sqrt{5}$

c. $\sqrt{8}$

d. $\sqrt{11}$

e. $\sqrt{18}$

f. $\sqrt{21}$

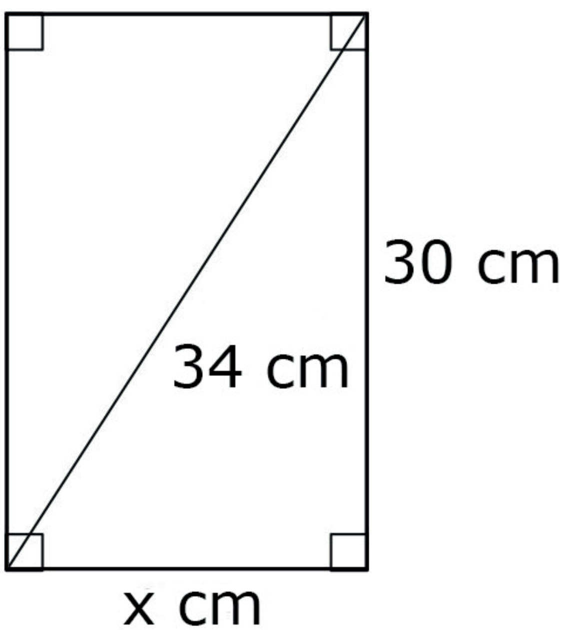
g. $\sqrt{26}$

h. $\sqrt{30}$

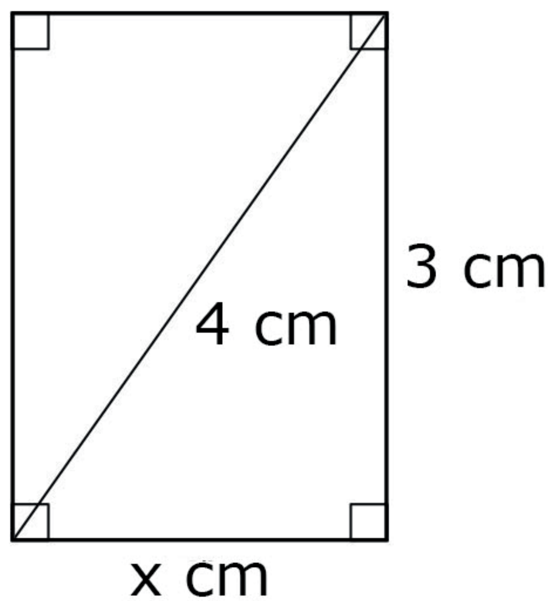
▶ Actividades de profundización

7. César debe confeccionar tres tipos de volantes como los de la imagen, pero solo recuerda algunas medidas. Calcula la medida del lado restante a partir de los datos.

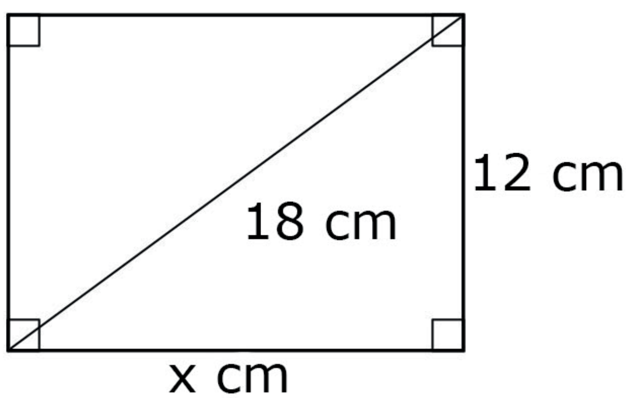
a.



b.



c.



d. ¿Qué tipo de número obtuviste en cada caso? ¿Es posible que un volante tenga un lado con estas medidas? Justifica.

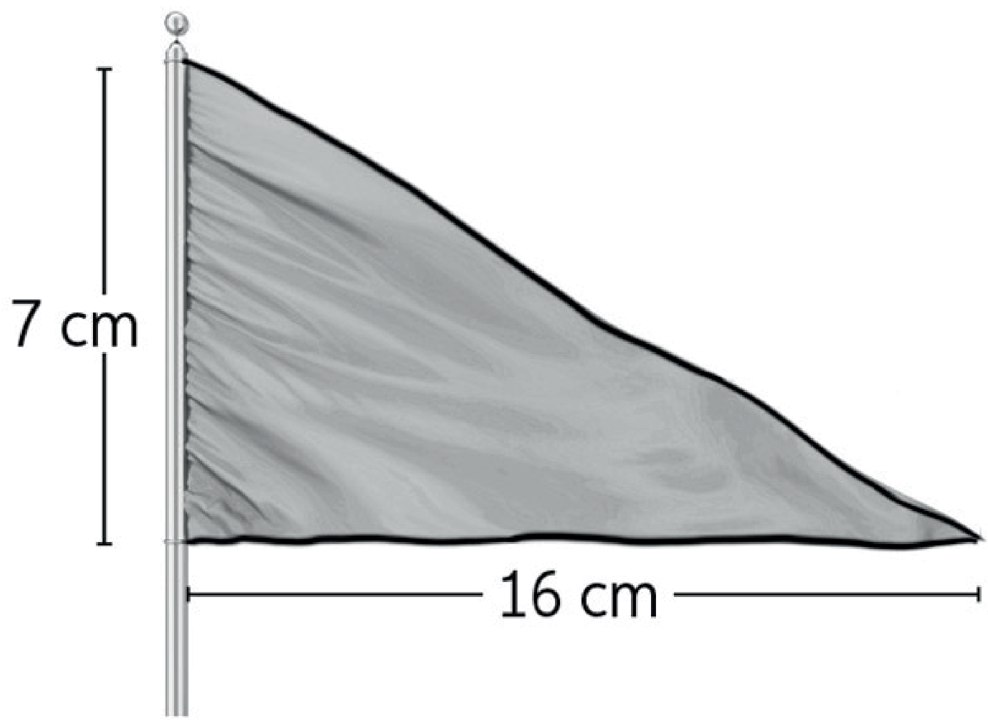
Geometría

8. Se diseña un automóvil a escala con ruedas de 1 cm de radio.

a. ¿Qué distancia aproximada habrá recorrido el automóvil si alcanza a dar 20 vueltas?

b. ¿A qué conjunto numérico pertenece este resultado?

9. Gabriela debe encintar todos los bordes de unos banderines similares al de la imagen.

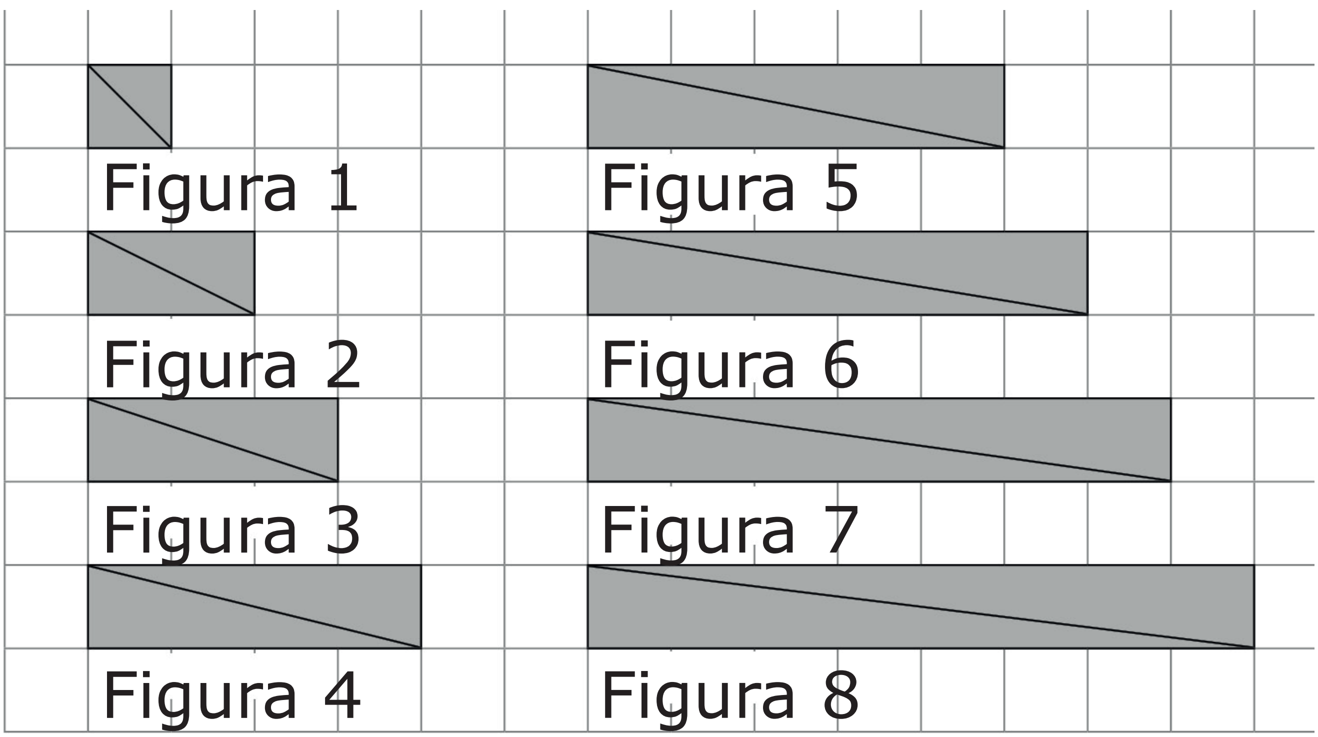


a. ¿Cuántos centímetros de cinta se requieren por cada banderín?

b. Además, debe encintar otro tipo de banderines, también triangulares, cuyos catetos miden 17,5 cm y 6 cm. ¿Cuánta cinta necesitará para cubrir uno de estos banderines?

Álgebra

10. En la imagen se muestra una sucesión de rectángulos cuyas bases se diferencian por una unidad.



a. ¿Qué expresión algebraica con raíces permite calcular la longitud de la diagonal de la figura n?

b. ¿Cuál es la medida aproximada de la diagonal de la figura 8?

11. Fabián dispone de un terreno de forma cuadrada para siembra. Antes de iniciar los trabajos, debe calcular la cantidad de material que necesita para cercarlo.

a. ¿Cuál es el perímetro del terreno si sabe que su área es 115.200 m^2? Entrega una aproximación utilizando dos decimales.

b. Fabián decide dividir su terreno en dos superficies equivalentes: una para sembrar zanahorias y la otra para sembrar papas. Para ello, trazará una diagonal desde uno de los vértices hasta su opuesto. Sobre esta construirá un cerco de alambre que cruzará cinco veces el terreno. ¿Cuál es la cantidad mínima de alambre, en metros, que requerirá?

▶ Para concluir

a. ¿En qué casos te parece apropiado utilizar cada método de estimación?

b. Explica cómo ubicaría $\sqrt{21}$ en la recta numérica.

Antes de continuar: Evaluación intermedia

1. Explica la diferencia entre el conjunto de los números irracionales y el de los números reales.

2. Con respecto al número $\sqrt{13}$, ¿cuál es el resultado de sumarlo con su inverso aditivo? ¿y multiplicarlo por su inverso multiplicativo?

3. Aproxima a la centésima mediante redondeo.

a. $\sqrt{14}$

b. $2\sqrt{5}$

c. $\sqrt{10} + \sqrt{35}$

4. Resuelve.

a. $\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$

b. $2{,}1\ \sqrt{5} - 0{,}\overline{2}\sqrt{5}$

c. $-\sqrt{7} + 3\sqrt{28} - \sqrt{63}$

5. Simplifica

a. $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}$

b. $\sqrt{6} \times \sqrt{2} \times \sqrt{75}$

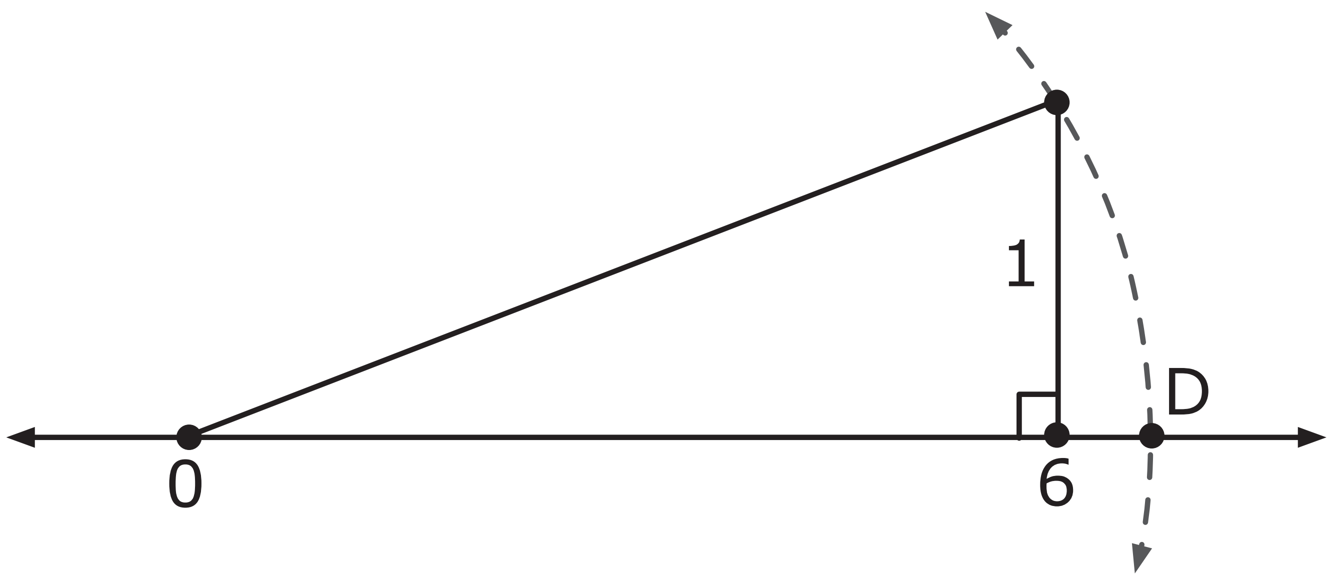
c. $\dfrac{3\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

d. $-3\sqrt{5} \times \sqrt{10} \times \sqrt{2}$

e. $\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{50}}$

f. $\sqrt{0{,}1} \times \sqrt{60} \times \sqrt{24}$

6. Analiza la imagen.

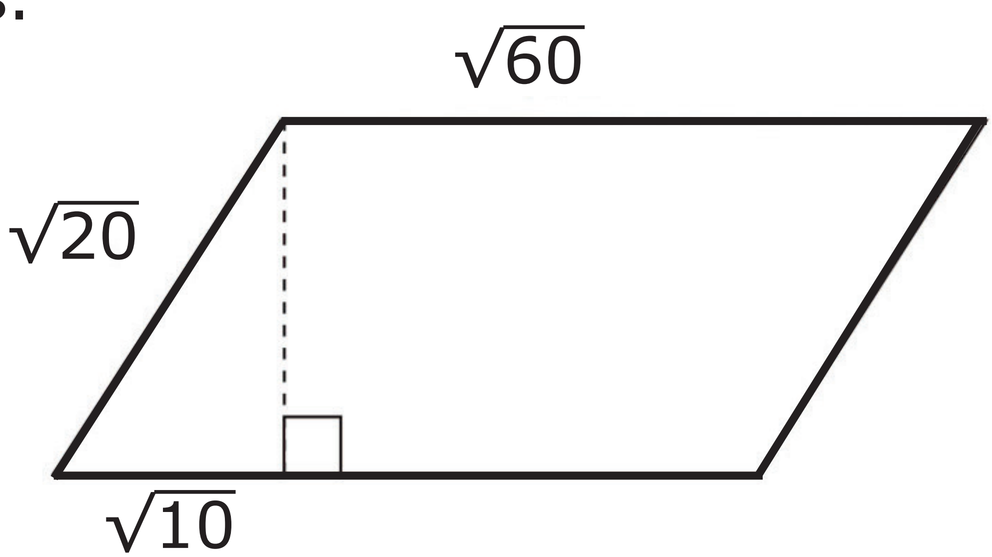


a. ¿Qué número representa D en la recta numérica?

b. Explica cómo lo supiste.

7. Ordena de menor a mayor las raíces $2\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, y $4\sqrt{3}$.

8. Calcula el área del paralelogramo. Aproxima por redondeo a dos cifras decimales.



Reflexiono

a. ¿Qué te costó más de la lección?

b. ¿Cómo pueden facilitar los cálculos las propiedades de la adición y la multiplicación?

c. Explica cómo resolviste el problema número 8.

Lección 2: Potencias y raíces enésimas

Raíz enésima

¿Qué expresión algebraica es equivalente a multiplicar a por sí mismo n veces?

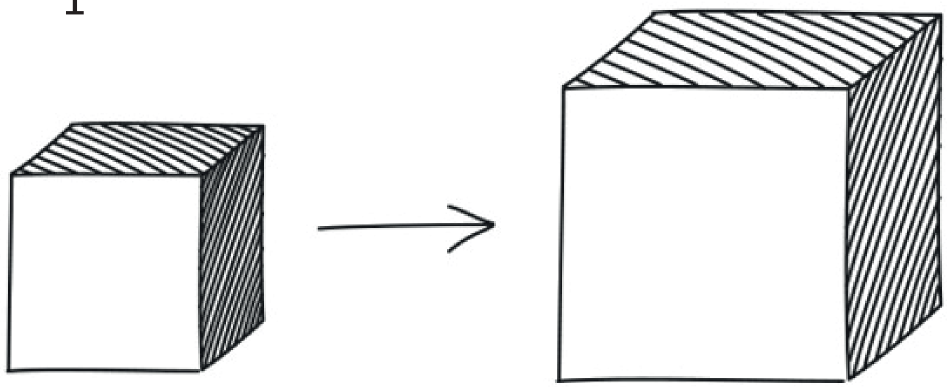
¿En qué consiste el proceso de factorización prima?

Objetivo: Estudiar y analizar la raíz enésima de un número y su significado.

1. Se construyen los siguientes cubos:

Cubo 1

$V_1 = 1 \text{ cm}^3$



Cubo 2

$V_2 = 2 \text{ cm}^3$

El volumen de un cubo de arista L es L^3.

a. ¿Cuál es la medida de la arista del cubo 1? Explica tu procedimiento.

b. Si se duplica la medida de la arista del primer cubo, ¿por qué no se obtiene el volumen del cubo 2? Justifica tu respuesta.

c. Si se conoce el volumen, ¿qué expresión permite conocer la arista del cubo?

d. Utiliza tu calculadora para calcular el valor de la arista del segundo cubo. ¿Cuál es el valor aproximado? Redondéalo a la milésima.

La raíz enésima de un número real se escriben $\sqrt[3]{a}$, con n un número natural mayor que 1, corresponde al número b que cumple con $\sqrt[3]{a} = b$ donde $b^n = a$.

Índice $\rightarrow \sqrt[n]{a} \leftarrow$ *Cantidad subradical*

Por ejemplo:

$\sqrt[4]{81} = 3$, porque $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

Cuando a es positivo se observan las siguientes situaciones para n:

Cuando n es par: $\sqrt[n]{-a}$ no es un número real.

Cuando n es impar: $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{-a}$ siempre son números reales.

2. Calculen las siguientes raíces enésimas:

a. $\sqrt[3]{27}$

b. $\sqrt[3]{\frac{7}{2}}$

c. $\sqrt[3]{216}$

d. $\sqrt[3]{-216}$

e. $\sqrt[3]{125}$

f. $\sqrt[3]{-729}$

g. $\sqrt[4]{81}$

h. $\sqrt[3]{256}$

i. $\sqrt[5]{243}$

j. $\sqrt[6]{64}$

k. $\sqrt[7]{2187}$

l. $\sqrt[3]{\frac{128}{2187}}$

m. $\sqrt[7]{-1}$

n. $\sqrt[5]{32}$

o. $\sqrt[6]{729}$

p. $\sqrt[3]{\dfrac{8}{125}}$

q. $\sqrt[6]{15625}$

r. $\sqrt[4]{\dfrac{81}{4096}}$

s. $\sqrt[4]{0{,}0625}$

t. $\sqrt[8]{100000000}$

¿Qué relación existe entre $\sqrt[3]{64}$ y $\sqrt[3]{-64}$?

Biología

3. Una población de bacterias cuenta inicialmente con 3 organismos. Se sabe que se reproduce cada hora a una razón desconocida r.

Horas transcurridas	0	1	2	3	4	5
Cantidad de bacterias	3	$3 \cdot r$				

a. ¿Qué representa la r? ¿Qué representa el 3?

b. Completa la siguiente tabla en tu cuaderno.

c. ¿Qué expresión algebraica representa el número de bacterias luego de n horas?

d. Si al cabo de 6 horas hay 192 bacterias, ¿cuál es el valor de r? Justifica.

4. ¿Cómo explicarías las igualdades $\sqrt[n]{0} = 0$ y $\sqrt[n]{1} = 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$?

Si $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b} \in \mathbb{R}$, entonces se cumplen las siguientes propiedades para la multiplicación y división:

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{900} = \sqrt{9 \times 100} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{10^2}$$

$$= 3 \times 10 = 30$$

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[4]{\frac{32}{81}} = \sqrt[4]{\frac{2^5}{3^4}} = \frac{\sqrt[4]{2^4 \times 2}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{\sqrt[4]{2^4} \times \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{3^4}}$$

$$= \frac{2 \times \sqrt[4]{2}}{3}$$

Además, para p y $q \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$\boxed{(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}}$$

Ejemplo:

$$(\sqrt[3]{10})^4 = \sqrt[3]{10^4} = \sqrt[3]{10^3} \times \sqrt[3]{10} =$$

$$10 \times \sqrt[3]{10}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$$

5. Reduce las siguientes raíces.

a. $\sqrt[3]{320}$

b. $\sqrt[4]{112}$

c. $\sqrt[3]{\dfrac{24}{125}}$

d. $\sqrt[4]{0{,}0081}$

e. $\sqrt[3]{135}$

f. $\sqrt[3]{\sqrt{18}}$

g. $\dfrac{\sqrt[5]{24}}{\sqrt[5]{16}}$

h. $\sqrt[5]{3^2} \times \sqrt[6]{9^5}$

i. $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$

6. Analiza si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica.

a. $\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{-3} = \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{3}$

b. $\sqrt[4]{20} = \sqrt[4]{5} \times \sqrt{2}$

c. $\sqrt[6]{8} \times \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{-8} \times \sqrt[6]{-2}$

d. $\sqrt[4]{16 + 81} = \sqrt[4]{16} + \sqrt[4]{81}$

7. Determina los valores de a para que el resultado de la raíz sea un número real.

a. $\sqrt[4]{7 - a}$

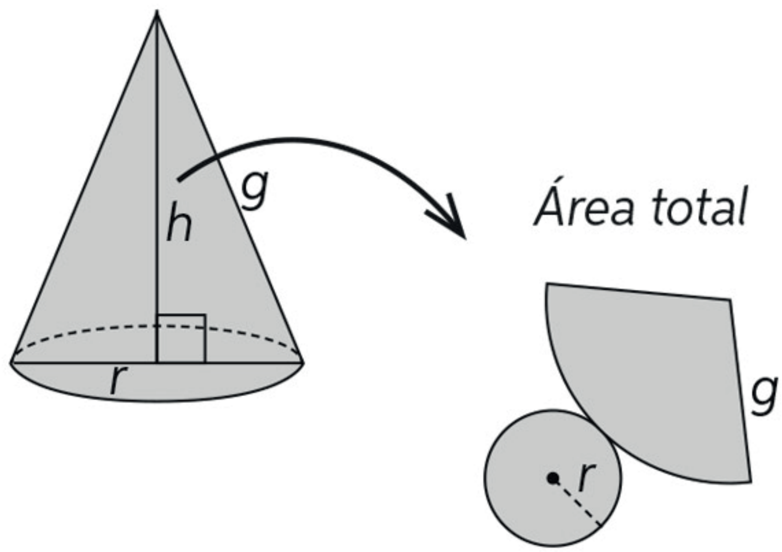
b. $\sqrt[3]{a - 2}$

c. $\sqrt[3]{a^2 + 8}$

8. La altura (h) de un cono mide $3\sqrt{5}$ cm y el radio (r) mide $2\sqrt{3}$ cm.

Recuerda que:

El volumen del cono es $\frac{2\pi}{3} hr^2$



$$A = \pi \cdot g \cdot r \cdot \pi \cdot r^2 = \pi r \cdot (g + r)$$

a. ¿Cuál es el valor de su generatriz (g)?

b. Determina el volumen del cono.

c. Determina el área de la superficie del cono.

▶ Actividades de profundización

9. Analiza la siguiente demostración. Luego, realiza las actividades.

"Si a es negativo, no existe *b* real, tal que $b = \sqrt{a}$". Para demostrarlo se asume lo contrario, es decir, que sí existe b que cumple la condición. Entonces, se tiene que:

$$\sqrt{a} = b \text{ , entonces } a = b^2 = b \cdot b.$$

Si b fuera positivo, entonces b^2 también lo sería, por lo que no podría tener un valor negativo. Por lo tanto, no puede ser positivo y se llega a una contradicción.

a. ¿Qué ocurre con para el caso de b negativo? ¿Es una contradicción? Justifica.

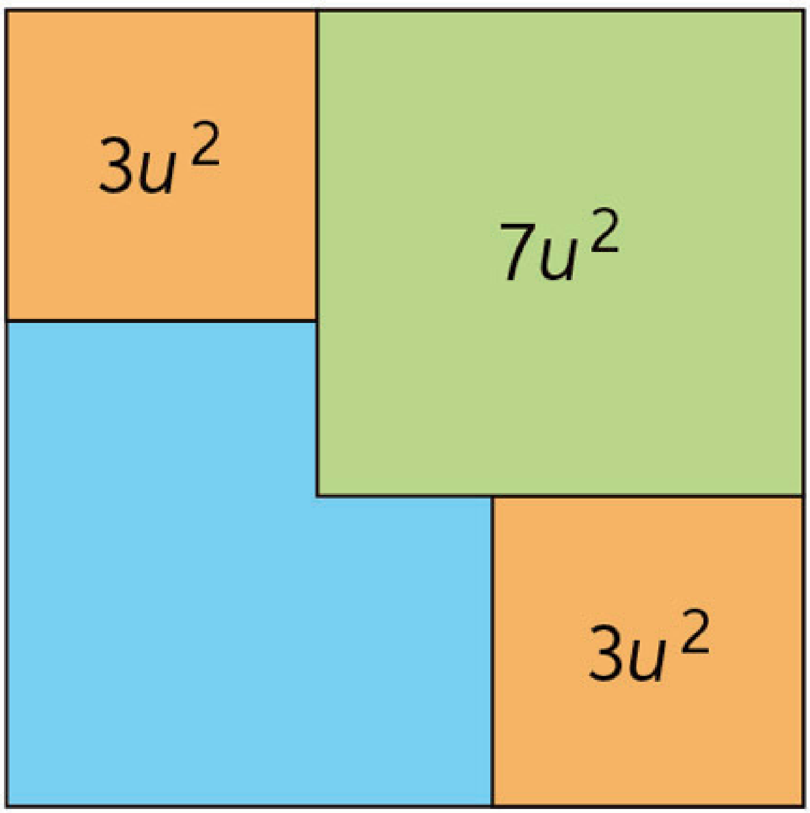
b. ¿Cómo utilizarías la propiedad

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$$

y la demostración anterior para justificar que "las raíces pares negativas no son reales"?

Geometría

10. La figura es un cuadrado en cuyo interior se dibujaron otros tres cuadrados. Las áreas se muestran en u^2.



a. Determina la medida del lado de los cuadrados verde y naranja.

b. Determina el área total del cuadrado.

c. Determina el área de la figura azul.

▶ Para concluir

a. ¿Qué semejanzas observas entre las propiedades trabajadas en el tema y las propiedades de potencias?

b. ¿En qué casos la raíz enésima de un número no existe en el conjunto de los números reales? ¿Por qué? Da dos ejemplos.

Raíces enésimas y potencias de exponente racional

¿Qué características tiene un número racional?

¿Qué propiedades tienen las potencias? Elabora un listado.

Objetivos: Establecer la relación entre una raíz enésima y una potencia de exponente racional.

1. En parejas, calculen las siguientes raíces. Utiliza calculadora.

a. $\sqrt[3]{2}$

b. $\sqrt[6]{4}$

c. $\sqrt[12]{8}$

d. $\sqrt[12]{16}$

e. $\sqrt{49}$

f. $\sqrt[3]{343}$

g. $\sqrt[4]{2401}$

h. $\sqrt[5]{16807}$

i. ¿Qué expresiones tienen el mismo resultado? Escríbanlas como una igualdad.

j. Escriban las cantidades subradicales de las raíces como factores primos.

k. ¿Qué relación existe entre los exponentes de los factores primos y los índices de las raíces con el mismo resultado?

Sean a un número real y n un número natural mayor que 1. Entonces se puede establecer la siguiente relación entre la raíz enésima de a y una potencia con exponente racional de base *a*:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Ejemplo: $\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}}$

Dicho de otra forma, una raíz enésima es equivalente a una potencia con exponente racional. En esta, el denominador en el exponente corresponde al índice de la raíz.

Además, si m es un número entero, se cumple:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ Ejemplo: $\sqrt{729} = \sqrt{9^3} = 9^{\frac{3}{2}}$

2. Escribe cada potencia como una raíz.

a. $6^{\frac{1}{5}}$

b. $24^{\frac{5}{9}}$

c. $5^{\frac{5}{2}}$

d. $\left(\frac{1}{6}\right)^{1,3}$

e. $101^{\frac{3}{n}}$

f. $(-4)^{\frac{4}{5}}$

g. $16^{0,4}$

h. $3^{-2,5}$

i. $\left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{2}{5}}$

3. Escribe cada raíz como una potencia. Simplifica el resultado.

a. $\sqrt{6}$

b. $\sqrt[4]{3^6}$

c. $\sqrt[5]{9^6}$

d. $\sqrt[15]{2^{-5}}$

e. $\sqrt[n]{(-5)^3}$

f. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$

g. $\sqrt[9]{\left(\frac{2}{3}\right)^{3}}$

h. $\sqrt[3]{\left(\frac{5}{125}\right)^{6}}$

i. $\sqrt[5]{(-3)^{2}}$

4. Identifica el error y explica.

a. $(\sqrt{15})^{3} = 15^{\frac{2}{3}}$

b. $-\left(\sqrt[3]{9}\right)^{2} = (-9)^{\frac{2}{3}}$

Para la multiplicación de potencias de exponente racional se aplican las siguientes propiedades:

Con igual base:

$$X^{\frac{a}{b}} \cdot X^{\frac{c}{d}} = X^{\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)}$$

Por ejemplo:

$$2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)} = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$$

Con igual exponente:

$$X^{\frac{a}{b}} \cdot y^{\frac{a}{b}} = (x \cdot y)^{\frac{a}{b}}$$

Por ejemplo:

$$(16)^{\frac{1}{4}} \cdot 4^{\frac{1}{4}} = (16 \cdot 4)^{\frac{1}{4}} = 64^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2^7}$$
$$= \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2} = 2\sqrt[4]{2^2}$$

5. Resuelve las siguientes multiplicaciones y expresa el resultado en raíz.

a. $\left(-\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(-\dfrac{2}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$

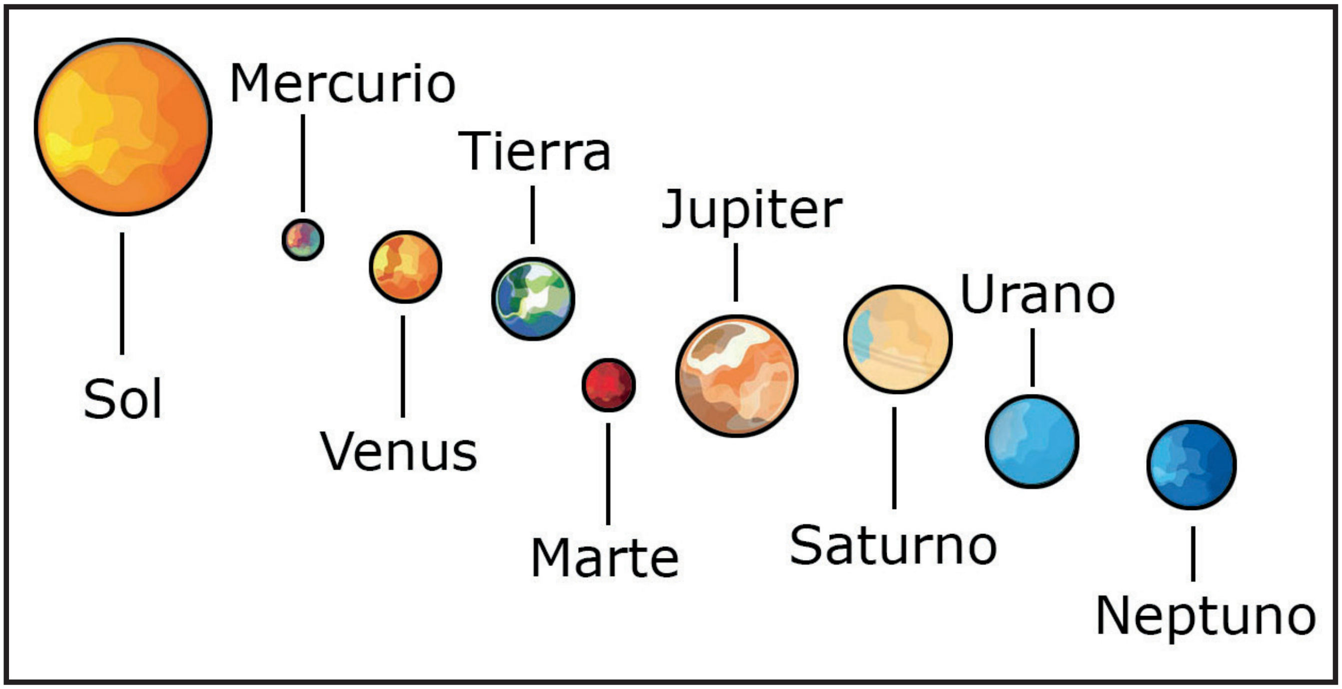
b. $0.2^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$

Astronomía

6. Analiza la situación y responde.

La tercera ley de Kepler relaciona el periodo de traslación de un planeta T, en años, con la distancia media d entre el planeta y el Sol, medida en unidades astronómicas (UA). La expresión que la resume es la siguiente:

$$T = \sqrt{d^3}$$



1 UA ≈ 149 597 870 700 m

Planeta	Distancia
Mercurio	0,39 UA
Venus	0,95 UA
Tierra	1 UA
Marte	1,88 UA
Júpiter	11,86 UA
Saturno	29,46 UA
Urano	84,01 UA
Neptuno	164,79 UA

a. Escribe la tercera ley de Kepler utilizando solo potencias naturales.

b. Utilizando calculadora, determina el periodo de traslación de los planetas.

c. ¿Qué expresión algebraica describe la distancia al Sol de un planeta en función de su periodo de traslación?

d. ¿Cuál es la distancia al Sol de un planeta cuyo periodo de traslación es de 27 años?

▶ Para concluir

a. Da 3 ejemplos de cada caso. Luego, calcúlalos.

- Un número real con exponente natural.

- Un número real con exponente entero negativo o 0.
- Un número real con exponente racional decimal o fraccionario.

b. ¿Qué ventaja tuvo para ti vincular las raíces enésimas con potencias?

Racionalización

¿En qué consiste amplificar una fracción? Da un ejemplo. Al amplificar una fracción, ¿cambia su valor? Explica.

Objetivos: Estudiar y analizar el proceso de racionalización de una fracción.

1. Considera los siguientes números:

$\sqrt{2}$ $\quad\sqrt{0,5}\quad$ $2^{\frac{6}{4}}$

$2^{\frac{3}{2}}$ $\quad 2^{-\frac{1}{2}}\quad$ $2\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{\frac{1}{2}}$ $\quad\sqrt[3]{2}$

a. Construye una recta numérica y ubica los números anteriores. Ayúdate con una calculadora o aplicación para calcular sus valores.

b. ¿Qué números tienen la misma ubicación?

c. En parejas, transformen las raíces anteriores a potencias racionales de base 2.

¿Qué igualdades te parecieron evidentes?, ¿cuáles no? ¿A qué se debe?

Racionalizar una expresión fraccionaria significa encontrar otra expresión que sea equivalente a ella, pero que no contenga raíces en el denominador.

Por ejemplo, para raíces cuadradas:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = ?$$

Amplificamos la fracción por una expresión equivalente a "1".

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = ?$$

Simplificamos:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{2}{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

¿Por qué no se multiplica sólo por $\frac{1}{\sqrt{2}}$ para racionalizar la expresión anterior?

2. Racionaliza la expresión $\frac{3}{\sqrt{5}}$ y responde. Puedes guiarte por el ejemplo anterior.

a. Respondan en parejas: ¿Por cuál factor se puede amplificar la fracción?

b. ¿Qué propiedad de las raíces justifica el último paso?

c. De forma individual, encuentra una expresión equivalente a $\frac{3}{\sqrt{5}}$ sin raíces en el denominador.

3. Reúnanse en parejas y racionalicen las siguientes expresiones:

Ejemplo:

$$\frac{3}{\sqrt{32}} = \frac{3}{\sqrt{16 \cdot 2}} = \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

a. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

b. $\frac{7}{\sqrt{7}}$

c. $\frac{3}{2\sqrt{8}}$

d. $-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{21}}$

e. $\frac{11}{6\sqrt{3}}$

f. $-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{8}}$

g. $\frac{10}{\sqrt{(a + 3)}}$

h. $\dfrac{13}{\sqrt{(13 - a)}}$

¿Qué condiciones debe satisfacer a para que la raíz esté bien definida en cada expresión inicial del ejercicio anterior?

4. Analiza el siguiente procedimiento para racionalizar $\dfrac{4}{3 + \sqrt{10}}$ y responde.

$$\frac{4}{3 + \sqrt{10}} = \frac{4}{3 + \sqrt{10}} \cdot \frac{(3 + \sqrt{10})}{(3 + \sqrt{10})} =$$

$$\frac{4(3 - \sqrt{10})}{(3 + \sqrt{10})\,(3 - \sqrt{10})}$$

a. ¿Qué relación existe entre el denominador de la fracción y el factor por el cual se amplifica?

b. ¿Qué producto notable resulta en el denominador de la fracción?

c. Desarrolla la operación anterior y completa el procedimiento.

d. Utiliza el mismo razonamiento para racionalizar la expresión $\frac{4}{3 - \sqrt{10}}$.

¿Qué tienen en común ambos procedimientos?

Para racionalizar las expresiones de la forma $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ y $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$, con a y b números reales mayores a 0 y distintos, realizaremos el siguiente procedimiento:

$$\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} =$$

$$\frac{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})}{a - b}$$

Dicho de otra forma, si el denominador de la fracción es un binomio con raíces, se amplifica por el factor faltante de la suma por su diferencia para racionalizarla.

¿Por qué en ambos casos el denominador resultante es a − b?

5. Racionaliza las siguientes expresiones:

Por ejemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$$

Aplicamos la suma por su diferencia: $(a + b)(a - b) = a^2 + b^2$, donde $(\sqrt{5} + \sqrt{2})$ corresponde al factor $(a + b)$.

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2})} =$$

$$\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{5 - 2} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$$

a. $\dfrac{10}{2 + \sqrt{8}}$

b. $\dfrac{9}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

c. $\dfrac{6}{\sqrt{13} + \sqrt{10}}$

d. $\dfrac{32}{21 - \sqrt{13}}$

e. $\dfrac{1}{7 - \sqrt{6}}$

f. $\dfrac{2}{2 + 2\sqrt{2}}$

g. $-\dfrac{3}{\sqrt{14} - \sqrt{5}}$

h. $-\dfrac{7}{\sqrt{7} + \sqrt{12}}$

i. $\dfrac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$

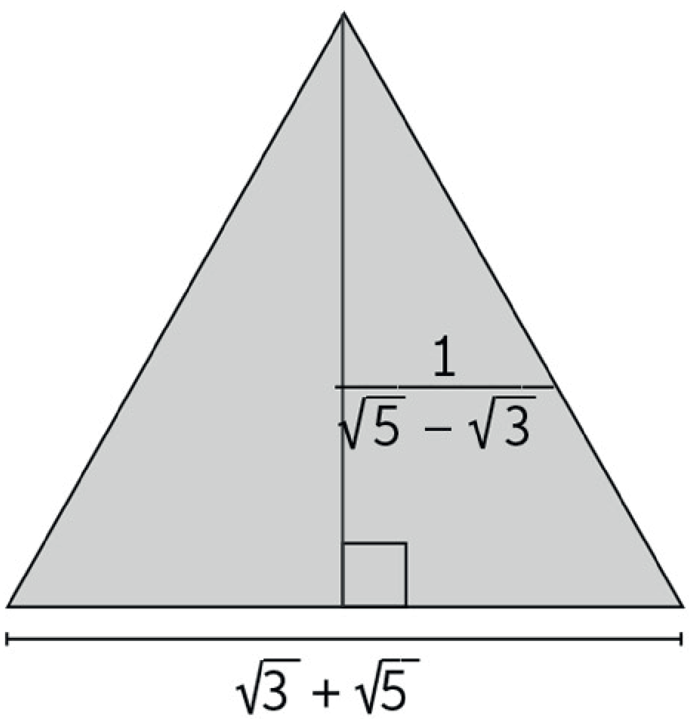
j. $\dfrac{6\sqrt{3} - 6\sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{9}}$

k. $\dfrac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{3b}}$

l. $\dfrac{2a}{\sqrt{a + b} - \sqrt{a - b}}$

6. ¿Qué condiciones deben cumplir a y b para que las raíces estén bien definidas en los ejercicios anteriores?

7. Determina el área del triángulo. Racionaliza el resultado.



8. Racionaliza y luego evalúa la expresión obtenida para $a = 5$, $b = 2$ y $c = 6$ en cada caso.

Por ejemplo:

$$\frac{c}{\sqrt{c} + \sqrt{b}}$$

Paso 1: Racionalizamos.

$$\frac{c}{\sqrt{c} + \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{\sqrt{c} - \sqrt{b}} = \frac{c \cdot (\sqrt{c} - \sqrt{b})}{c - b}$$

$$\frac{6 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{6 - 2} = \frac{6 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}$$

$$\frac{3 \cdot (\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2})}{2} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{2}$$

a. $\dfrac{c}{\sqrt{a}}$

b. $\dfrac{b}{\sqrt[3]{a}}$

c. $\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}$

d. $\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

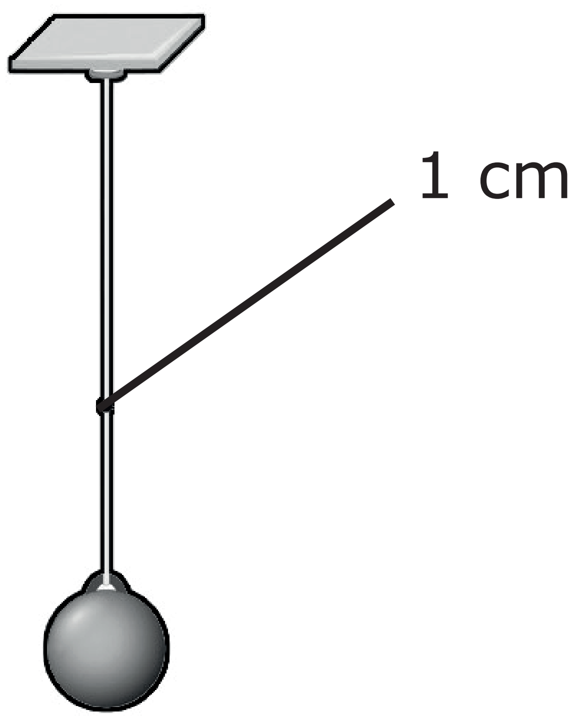
e. $\dfrac{b}{b+\sqrt{b}}$

f. $\dfrac{a}{2\sqrt{c}-\sqrt{b}}$

Actividades de profundización

Física

9. El tiempo T que tarda un péndulo simple de largo l en realizar una oscilación completa está determinado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, donde g es la aceleración de gravedad.



a. Racionaliza la expresión para calcular el periodo de un péndulo simple.

b. ¿Cuál es el periodo de un péndulo de largo 0,5 m? Considera $g=10\frac{m}{s^2}$.

▶ Para concluir

a. ¿Qué aspectos debes considerar al racionalizar una fracción? Explica.

b. ¿Cómo se puede verificar que la expresión racionalizada es equivalente a la original? Comenta y aplícalo en un ejercicio.

Antes de continuar: Evaluación intermedia

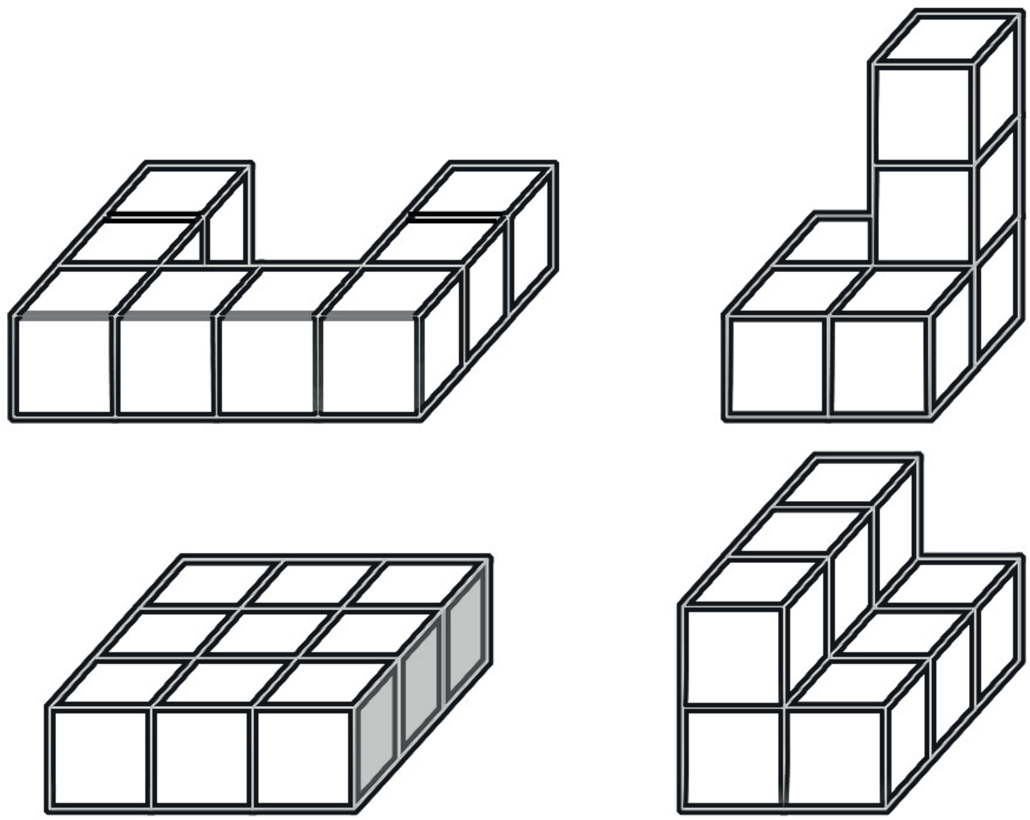
La ley cuadrado-cúbica

1. En grupos de 3 o 4 personas, utilicen los materiales en la siguiente actividad.

Materiales:

- Regla.
- Intercambiables, que deben ser siempre del mismo tamaño entre sí:
- Dados de 6 caras.
- Cubos Rubik.
- Cubitos de madera.

Paso 1: Utilizando los cubos, construyan un cuerpo sencillo como los de los ejemplos.



Paso 2: Midan y anoten la arista de los cubos utilizados. Luego, calculen la superficie y el volumen total del cuerpo original que construyan.

Paso 3: Dupliquen, tripliquen y cuadrupliquen (si es posible) el cuerpo original. Repitan las mediciones y registros del paso 2.

a. Comprueben si en sus figuras se replica la siguiente relación:

Si tienes un cubo de 1 cm de arista su área será $1 \cdot 1 \cdot 6 = 6$ cm^2, mientras que su volumen será $13 = 1$ cm^3. Si duplicas sus aristas, su área pasará a ser $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$ cm^2, mientras que su volumen aumentará a $2^3 = 8\ cm^3$. Es decir, aumentó 4 veces su superficie y 8 veces su volumen.

b. Plantea la razón entre los lados de los cuerpos anteriores. Plantea, además, la razón entre sus áreas y la razón entre sus volúmenes.

c. ¿Cómo se relacionan las razones anteriores? Plantea una expresión algebraica.

d. Dos cuerpos tienen sus áreas en la razón $\frac{9}{5}$. ¿Es posible construir dos cuerpos que cumplan la razón utilizando los cubos? Justifica.

e. Dos cuerpos tienen sus volúmenes en la razón $\frac{8}{27}$. ¿Es posible construir dos cuerpos que cumplan la razón utilizando los cubos? Justifica.

▶ Reflexiono

a. Para los antiguos griegos fue imposible hallar el valor del lado de un cubo que duplique el volumen del otro. ¿A qué crees que se debió su problema?

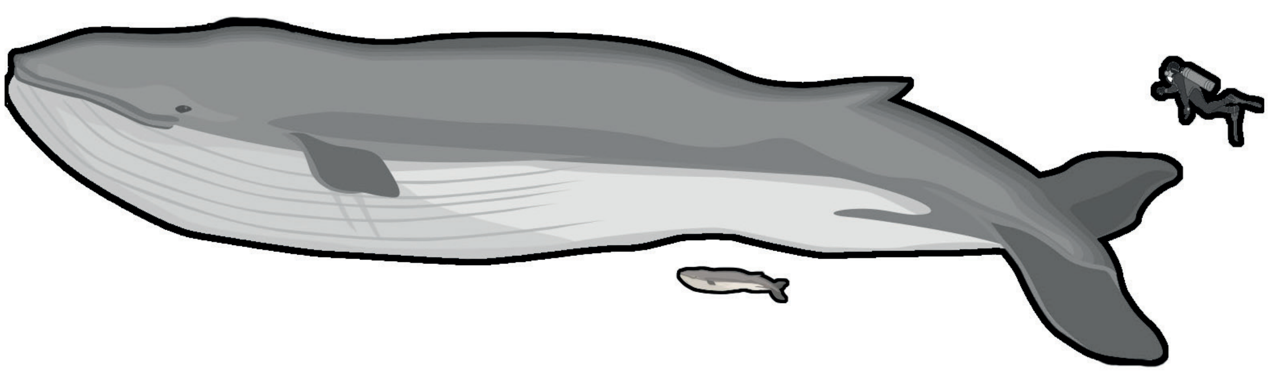
b. ¿Necesariamente esta actividad se debe hacer con cubos? ¿Qué otras figuras utilizarías y por qué?

Lección 3: Logaritmos
Definición de logaritmos

¿A qué número es necesario elevar 2 para obtener?

¿Qué ecuación plantearías para resolver el problema anterior?

Objetivo: Identificar los logaritmos y su relación con las potencias.



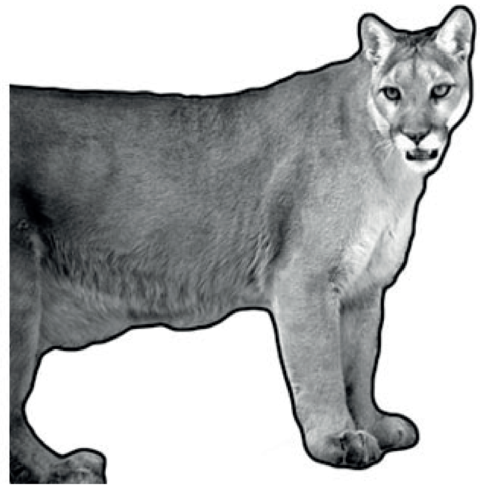
"Al comparar la masa y el tamaño entre el ser vivo más pequeño (tardigrada) y el más grande (ballena) existe una diferencia increíble y muy difícil de comparar"

Biología

1. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

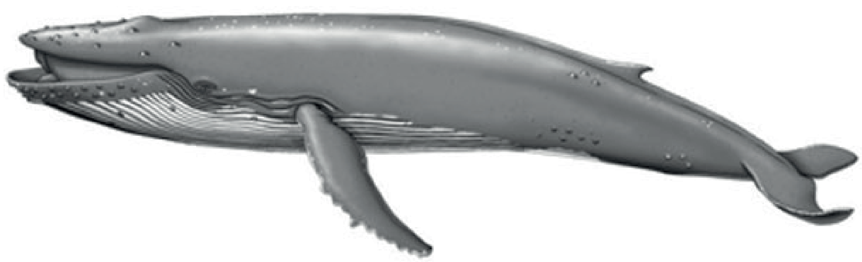
Tardigrada ≈ 1,25 ng

Mariposa 0,005 g



Chincol 30 g

Puma 70 kg



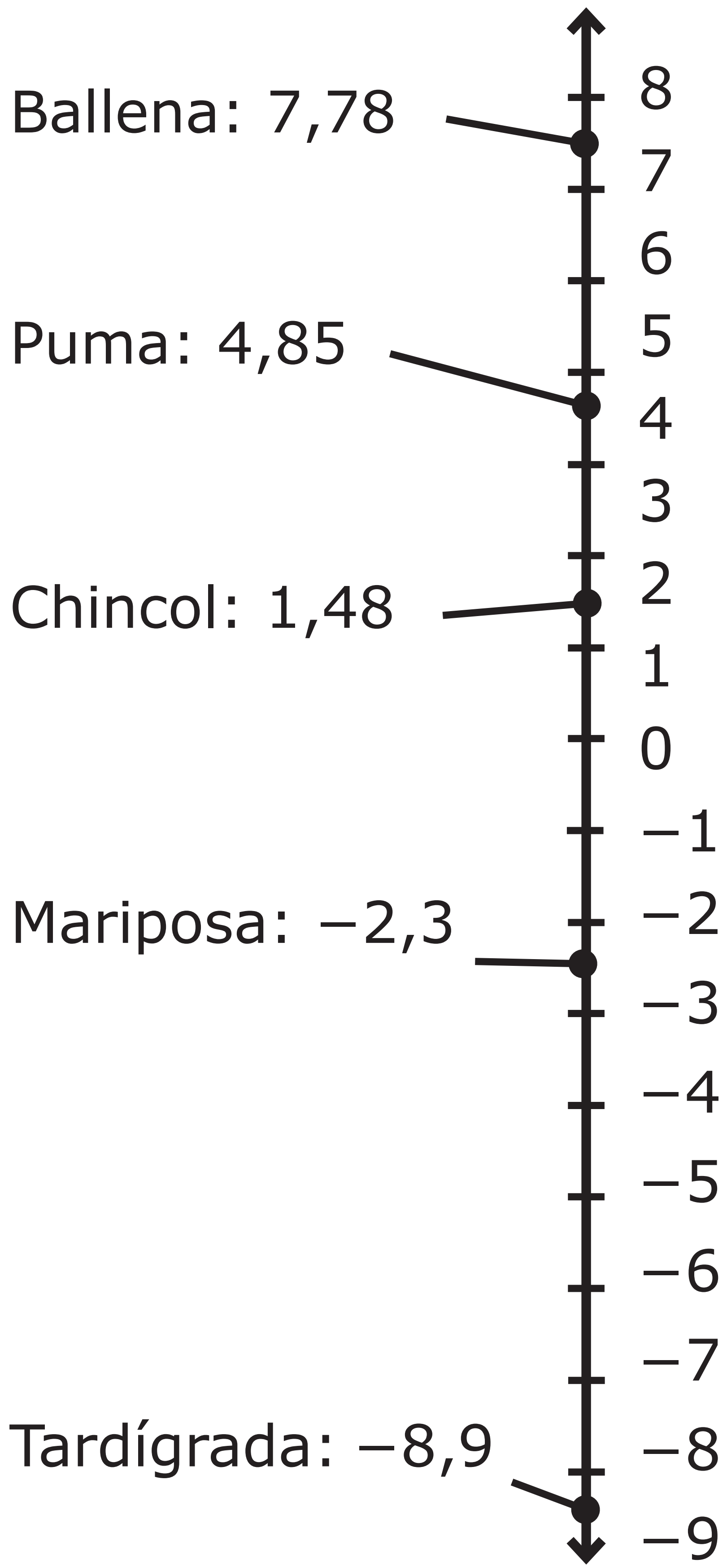
Ballena jorobada 30 t

a. Transforma a gramos la masa de los animales y relaciónalas con las siguientes potencias racionales de 10. Utiliza las equivalencias de 1 kg = 1000 g, 1 t = 1000 kg y 1 ng = 10^{-9} g.

- $10^{-8,9}$
- $10^{-2,3}$
- $10^{1,48}$
- $10^{4,85}$
- $10^{7,48}$

b. Se quiere ubicar en una escala las masas de todos los animales anteriores. ¿Qué dificultades encuentras al construir la escala utilizando los gramos? Comenta con tu curso.

c. ¿Qué relación existe entre la siguiente escala y las potencias de 10 anteriores? Explica.


Ballena: 7,78
Puma: 4,85
Chincol: 1,48
Mariposa: −2,3
Tardígrada: −8,9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9

Se llama logaritmo de base b de a al número c al cual debe elevarse la base b para obtener a. Cuando la base es 10, se omite: log10 x = logx

Es decir:

$$b^c = a \leftrightarrow \log_b a = c$$

Con a, b $\in \mathbb{R}^+$, b $\neq$ 1 y c $\in \mathbb{R}$. Por ejemplo:

$5^3 = 125 \leftrightarrow \log_5 125 = 3$ y se lee "logaritmo en base 5 de 125".

$\sqrt{9} = 3 \leftrightarrow 9^{\frac{1}{2}} \log_3 3 = \frac{1}{2}$ y se lee “logaritmo en base 9 de 3”.

¿Qué ventaja tiene representar en escala logarítmica las masas de los animales?

2. Representa las siguientes relaciones numéricas usando logaritmos.

Ejemplo:

$5^2 = 25 \leftrightarrow \log_5 25 = 2$

a. $9^3 = 729$

b. $0{,}3^2 = 0{,}09$

c. $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$

d. $9^{\frac{1}{2}} = 3$

e. $5^{-2} = \frac{1}{25}$

f. $0{,}01^{-2} = 10000$

g. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 64$

h. $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

i. $8^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{32}$

3. Determina en cada caso el valor de *a*.

Ejemplo: $\log_2 a = 3 \leftrightarrow 2^3 = a \rightarrow 8 = a$

a. $\log_a 2 = \frac{1}{2}$

b. $\log_a 8 = 3$

c. $\log_a 5 = -2$

d. $\log_5 0,04 = a$

e. $\log_{\frac{1}{81}} 9 = a$

f. $\log_{\frac{1}{64}} 2 = a$

g. $\log_{9} a = 4$

h. $\log_{7} a = 3$

i. $\log_{1000} a = -\frac{1}{3}$

4. Lee la siguiente información y responde utilizando tu calculadora.

En una calculadora científica, el botón "log" por defecto tiene una base 10. Para calcular un logaritmo debes seguir la secuencia:

"Log", "cantidad" y "="

a. Calcula los siguientes logaritmos utilizando tu calculadora.

- log 1000
- log 100
- log 10
- log 0,1
- log 1
- log 2
- log 0,2
- log 20
- log 200

b. Comprueba los resultados anteriores utilizando la definición de logaritmos.

c. ¿Cuál(es) de los resultados tiene(n) una diferencia aproximada de 0,301?

d. Ingresa en la calculadora "log", "–10" y "=". ¿Cómo explicas lo ocurrido?

5. Comprueba si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas. Justifica.

a. $\log_5 25 = 2$

b. $\log_2 0{,}25 = 0{,}5$

c. $\log_9 -3 = 2$

d. $\log_1 3{,}78 = 0$

e. $\log_2 10 = 100$

f. $\log_{10} 0 = 1$

g. $\log_4 0{,}25 = -2$

h. $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$

i. $\log 10^5 = 5$

j. $\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$

k. $\log_8 \sqrt[3]{64} = \frac{3}{2}$

l. $\log_2 \sqrt[3]{64} = 2$

Para concluir

a. ¿Qué signo tiene el logaritmo de un número mayor que 1? ¿Qué signo tiene el logaritmo de un número entre 0 y 1?

b. En parejas, explíquense mutuamente la relación entre logaritmos y potencias.

Propiedades de los logaritmos

¿Cómo se expresa como potencia $\log_b a = c$?

¿Cuál crees que fue el problema que dio origen a los logaritmos?

Objetivo: Comprender y verificar las propiedades de los logaritmos.

Si a es un número real positivo distinto de 1, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- Logaritmo de la base: $\log_a a = 1$

- Logaritmo de la unidad: $\log_a a = 0$

1. Utilizando las propiedades anteriores responde:

a. Comprueba cada propiedad con 3 valores distintos de a.

b. Demuestra las propiedades anteriores planteándolas como potencias. Utiliza, para ello, la definición de logaritmo.

¿Qué propiedades de potencias utilizaste para realizar la actividad anterior? Identifícalas y coméntalas con tu curso.

2. Analiza el siguiente procedimiento. Luego, realiza las actividades:

Si lo_gb a = c, entonces $b^c = a$

Paso 1: Elevamos a n ambos lados de la igualdad: $(b^c)^n = a^n \rightarrow b^{c \cdot n} = a^n$

Paso 2: Utilizando la definición de logaritmo:

$\log_b (a^n) = n \cdot c$

Paso 3: Reemplazamos *c* por $\log_b a$:

$\log_b (a^n) = n \cdot \log_b a$

a. ¿Qué propiedades de potencias se utilizaron? Nómbralas.

b. Comprueba cada propiedad con 3 valores distintos de a y n.

Sean b y x números reales positivos con b ≠ 1 y n un número real, se cumple la propiedad de logaritmo de una potencia de la base:

$$\log_b (x^n) = n \cdot \log_b(x)$$

Dicho de otra forma, el logaritmo de una potencia es equivalente a la multiplicación del exponente por el logaritmo.

3. Utilizando la propiedad anterior, comprueba las siguientes proposiciones.

a. $\log_b(\sqrt[n]{a}) = \dfrac{\log_b a}{n}$

b. $\log_b\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\log_b a$

4. Calcula el valor de los logaritmos utilizando el siguiente razonamiento.

En los cálculos necesarios para el desarrollo de la astronomía, se presentaban operaciones como 65.536 · 16.384. Como se puede ver, los factores eran bastante grandes, lo que podía conducir a múltiples errores. Entonces, John Napier inventó “números artificiales” (logaritmos) que utilizaba para simplificar las operaciones de la siguiente forma:

Paso 1: Transformaba ambos números a una potencia de base común:

$4^8 = 65.536$ $\qquad$ $4^7 = 16.384$

Paso 2: Utilizando sus "números artificiales", transformaba la multiplicación en suma:

$\log_4(65.536 \cdot 16.384) = \log_4(65.536) + \log_4(16.384) \rightarrow \log_4 48 + \log_4 47 = 8 + 7 = 15$

Paso 3: Así, en vez de calcular 65.536 · 16.384, obtenía el mismo resultado mediante la potencia de 4^{15}, el cual se buscaba en las tablas de potencias que había construido.

a. $\log_6 (6 \cdot 36)$

b. $\log_4 (16 \cdot 256)$

c. $\log_3 (9 \cdot 81)$

d. $\log_6 (1296 \cdot 36)$

e. $\log_4 (256 \cdot 4)$

f. $\log_5 (25 \cdot 3125)$

g. $\log_{11} (11 \cdot 1331)$

h. $\log_8 (64 \cdot 32768)$

i. $\log_5 (5 \cdot 390625)$

Sean *b, x* e *y* números reales positivos con $b \neq 1$, entonces:

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

Dicho de otra forma, el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores manteniendo la misma base. El logaritmo de un cociente es la resta de los logaritmos de los factores manteniendo la misma base.

5. En parejas, utilice cada uno un método de cálculo distinto para determinar los valores de los siguientes logaritmos. Una persona utilizará las propiedades anteriores de logaritmo y la otra seguirá el razonamiento de Napier. Luego, revisen su desarrollo y comparen sus resultados.

a. $\log_6 (216:36)$

b. $\log_4 (256:4)$

c. $\log_2 (32:8)$

d. $\log_3 (729:27)$

e. $\log_6 (7776 : 216)$

f. $\log_8 (262144 : 512)$

¿Facilitó el trabajo en parejas el desarrollo de la actividad anterior? ¿Por qué?

6. Analiza la siguiente demostración:

Al calcular el producto y el cociente entre x e y representando como potencias los logaritmos:

$\log_b(x) = m \rightarrow b^m = x$

$\log_b(y) = n \rightarrow b^n = y$

Se tiene que:

$x \cdot y = b^m \cdot b^n = b^{m+n}$

$\rightarrow \log_b(x \cdot y) =$

$m + n = \log_b(x) + \log_b(y)$

$x : y = b^m : b^n = b^{m-n}$

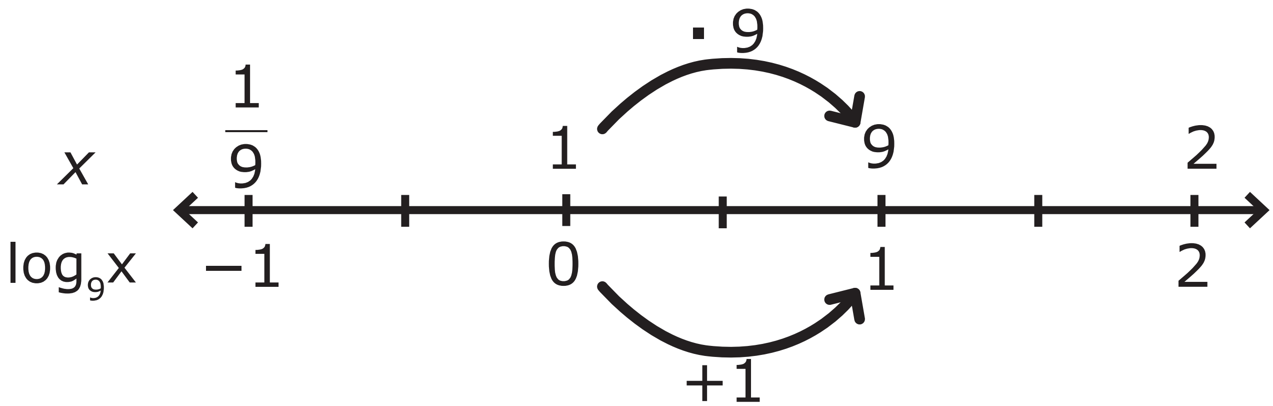
$\rightarrow \log_b(x : y) = m - n =$

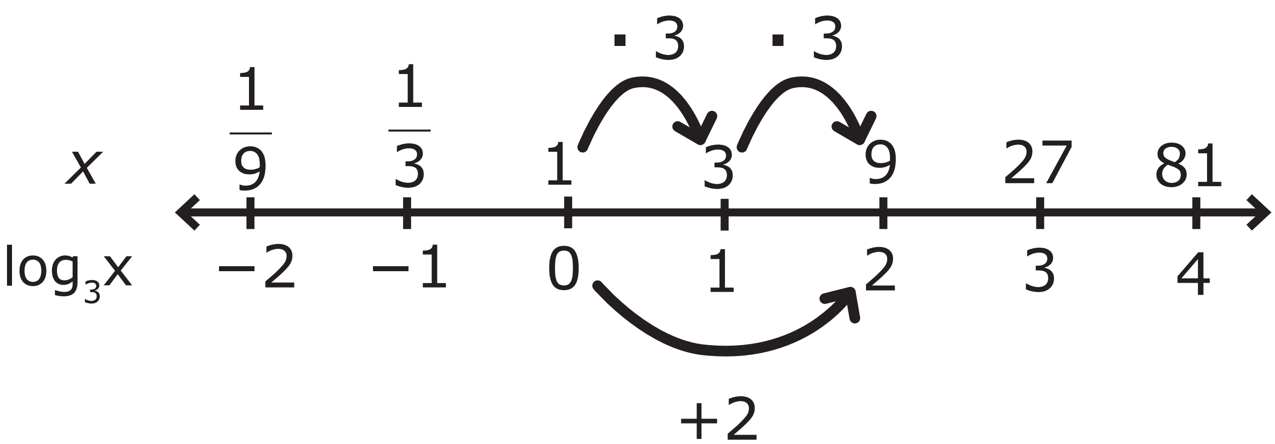
$\log_b(x) - \log_b(y)$

a. ¿Qué propiedades de las potencias se utilizaron? Identifícalas.

b. ¿Cómo puedes utilizar las propiedades $\log_b \left(\frac{1}{a}\right) = -\log_b a$ y $\log_b(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ para demostrar $\log_b(x : y) = \log_a x - \log_a y$?

7. Analiza:





a. ¿Qué relación observas entre ambas escalas?

b. ¿Cómo explicarías que $\log_3 9 = 2 \cdot \log_9 9$ utilizando las escalas anteriores?

c. Construye una escala logarítmica de $\log_{\sqrt{3}} x$ y $\log_{81} x$. ¿Cuál es la equivalencia en ambas escalas para $\log_9 9$? ¿Cómo se relaciona con el cambio de base logarítmica?

d. Se quiere modificar $\log_3(10)$ a un logaritmo de base 9. ¿Por cuánto se debe multiplicar $\log_9(10)$?

e. ¿Cuál debe ser el valor de *n* en $\log_4(16) = n \cdot \log_8 (16)$? ¿Cómo se relaciona con qué $4^n = 8$?

Sean a y b números reales positivos diferentes de 1 y x un número real positivo:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Dicho de otra forma, es posible realizar un cambio de base para expresar un logaritmo de una base cualquiera en otra base.

8. Analiza el siguiente procedimiento. Luego, realiza las actividades.

Sea $\log_b(a) = c \rightarrow b^c = a$

Paso 1: $b^c = a \Rightarrow \log_p(b^c) = \log_p(a)$

Paso 2: $c \cdot \log_p(b) = \log_p(a)$

Paso 3: $c = \dfrac{\log_p(a)}{\log_p(b)}$

Paso 4: $\log_p(a) = \dfrac{\log_p(a)}{\log_p(b)}$

a. Describe en cada paso los procedimientos realizados.

b. Comprueba si las siguientes proposiciones son correctas. Utiliza una calculadora y el teorema del cambio de base.

Recuerda que la tecla "log" se encuentra en base 10 y "ln" en base e.

- $\log_2 10 \approx 3,322$
- $\log_8 2 = 0,\overline{3}$
- $\log_5 3 \approx 0,683$

9. Calcula el valor de los siguientes logaritmos aplicando las propiedades vistas.

Ejemplo:

a. $\log_b \frac{1}{8}$

b. $\log_3 \sqrt{\frac{1}{81}}$

c. $\log_7 \sqrt[4]{7^3}$

d. $\log_2 \frac{32}{1024}$

e. $\log_{\sqrt{3}} 81$

f. $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{64}{27}$

g. $\text{In} \left(\frac{e^{11} \cdot e^5}{e^7}\right)^2$

h. $\text{Log} \left(\frac{100^4}{0,001}\right)^3$

i. $\log_{11} \sqrt[3]{\frac{1}{121^5}}$

▶ Actividades de profundización

10. Expresa cada logaritmo en términos de m y n, con m = log2 y n = log3. Guíate por el ejemplo.

$$\log_5 24 = \frac{\log 24}{\log 5} = \frac{\log (8 \cdot 3)}{\log_b \frac{10}{2}} =$$

$$\frac{\log (2^3 \cdot 3)}{\log_b \frac{10}{2}} = \frac{\log 2^3 + \log 3}{\log 10 - \log 2} =$$

$$\frac{3 \log 2 + \log 3}{\log 10 - \log 2} = \frac{3m + n}{1 - m}$$

a. $\log_2 3$

b. $\log_3 2$

c. $\log 30$

d. $\log_4 \sqrt{12}$

e. $\log_{15} 27$

f. $\log 0,2$

11. Utilizando propiedades, escribe dos expresiones logarítmicas de base distinta a 6 equivalentes al número 6. Guíate por el ejemplo.

$$6 = 6 \log_3 3 = \log_3 729 =$$

$$\log_3 \frac{2916}{4} = \log_3 2916 - \log_3 4$$

▶ Para concluir

a. ¿Se puede escribir un logaritmo en cualquier base real? Justifica.

b. ¿Qué utilidad tiene el cambio de base para utilizar la calculadora?

Aplicaciones de los logaritmos

Si deseas determinar el valor de x en la ecuación: 3x = 2, ¿ocuparías una raíz enésima o un logaritmo? ¿Por qué?

¿Qué diferencia una escala logarítmica de una recta numérica? Justifica.

Objetivo: Modelar situaciones de la vida cotidiana y otras asignaturas mediante logaritmos.

En una expresión algebraica de la forma $a^b = c$ se pueden calcular cada una de sus cantidades si se conocen las otras dos.

Esto se realiza mediante tres operaciones distintas:

Si se desconoce c, se utilizan potencias para encontrar su valor.

Ej: Si $a = 5$ y $b = 3$, entonces
$c = 5^3 = 125$.

Si se desconoce a, se utilizan raíces para encontrar su valor.

Ej: Si $b = 4$ y $c = 81$, entonces
$a^4 = 81 \rightarrow a = \sqrt[4]{81} = 3$

Si se desconoce b, se utilizan logaritmos para encontrar su valor.

Ej: Si $a = 7$ y $c = 2401$, entonces $7^b = 2401 \rightarrow b = \log_7 2401 = 4$.

Sonido

1. La intensidad del sonido puede ser medida de dos formas distintas:

- **Intensidad sonora (β):** se mide en decibeles (dB).

- **Intensidad acústica (I):** corresponde a la cantidad de energía transportada por una onda sonora aplicada en una superficie.

Se mide en watts sobre metro cuadrado $\left(\frac{W}{m^2}\right)$

Estas se relacionan mediante la expresión:

$$\beta = 10 \cdot \log(I) + 120$$

a. El umbral del dolor es $1\frac{W}{m^2}$ para el ser humano. ¿Cuál es la equivalencia en decibeles? ¿Qué situaciones de la imagen resultan dolorosas para el oído humano?

b. ¿Qué expresión algebraica se utiliza para calcular la intensidad acústica (I) dada la intensidad sonora (β)?

c. Utiliza la expresión anterior para determinar la intensidad acústica de 3 sonidos distintos.

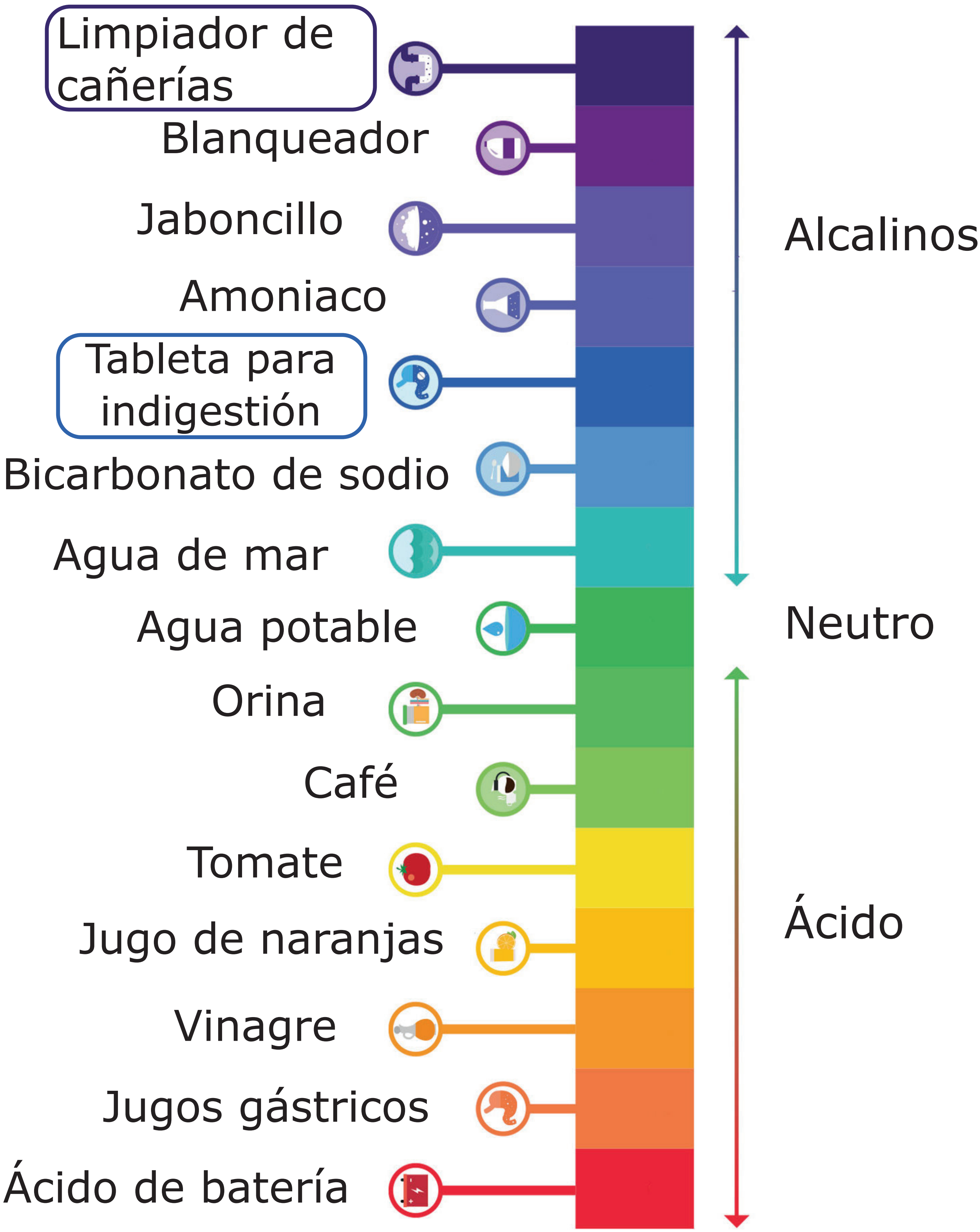
d. Se sabe que la intensidad de un equipo duplica la de otro equipo. ¿Cuál es la diferencia que poseen en decibeles?

¿Por qué es importante no exponerse a sonidos de alta intensidad? Comenta.


Fuegos artificiales
140 dB
Motor de avión
130 dB
Sirena de policía
120 dB
POLICE
Trombón
110 dB
Helicóptero
100 dB
Secador de pelo
90 dB
Camión
80 dB
Auto
70 dB
Conversación
60 dB
Lluvia moderada
50 dB
Refrigerador
40 dB
Susurro
30 dB
Crujir de hojas
20 dB
Respiración
10 dB
0 dB

Química

2. Para medir la acidez o alcalinidad de una sustancia se utiliza el *pH*. Este asocia la concentración de moles de hidrógeno $[H^+]$ en la sustancia (en moles por litro) según la fórmula: $pH = -\log[\mathrm{H}^+]$


Limpiador de cañerías
Blanqueador
Jaboncillo
Amoniaco
Tableta para indigestión
Bicarbonato de sodio
Agua de mar
Agua potable
Orina
Café
Tomate
Jugo de naranjas
Vinagre
Jugos gástricos
Ácido de batería
Alcalinos
Neutro
Ácido

a. Calcula el pH de una sustancia cuya concentración de iones de hidrógeno es de 0,00000038 moles por litro.

b. La escala de pH varía entre 0 y 14. ¿Cuáles son las concentraciones de moles de hidrógeno máximas y mínimas de la escala?

c. Calcula la concentración de moles de hidrógeno aproximada de 3 sustancias distintas.

d. ¿Qué expresión algebraica utilizaste para calcular las concentraciones anteriores? ¿Cómo se relaciona con la fórmula para calcular el pH?

Biología

3. La relación entre el área de la superficie corporal a de una persona en m 2, su masa m en kg y su altura h en cm está dada por la expresión:

$\log(a) =$

$-2{,}144 + 0{,}425 \log(m) + 0{,}725 \log(h)$

a. ¿Cuál es el área aproximada de una persona si su masa es 70 kg y su altura, 1,75 m?

b. Determina la estatura aproximada de una persona si el área de su cuerpo es 2 m^2 y su masa, 80 kg.

c. Utilizando propiedades de logaritmos, encuentra una expresión equivalente a la fórmula anterior. Compruébala utilizando los resultados anteriores.

4. La temperatura final de un cuerpo T_f transcurridos t minutos está dada por su temperatura inicial T_i, la temperatura ambiental T_a y la constante a de la forma:

$$T_f = T_a + (T_i - T_a) \cdot a^t$$

Considera un pan recién horneado a 180 °C, en un día con 20 °C ambientales.

a. ¿Cuál es la ecuación que rige el enfriamiento si a = 0,85?

b. ¿Luego de cuántos minutos se encuentra bajo los 34°C?

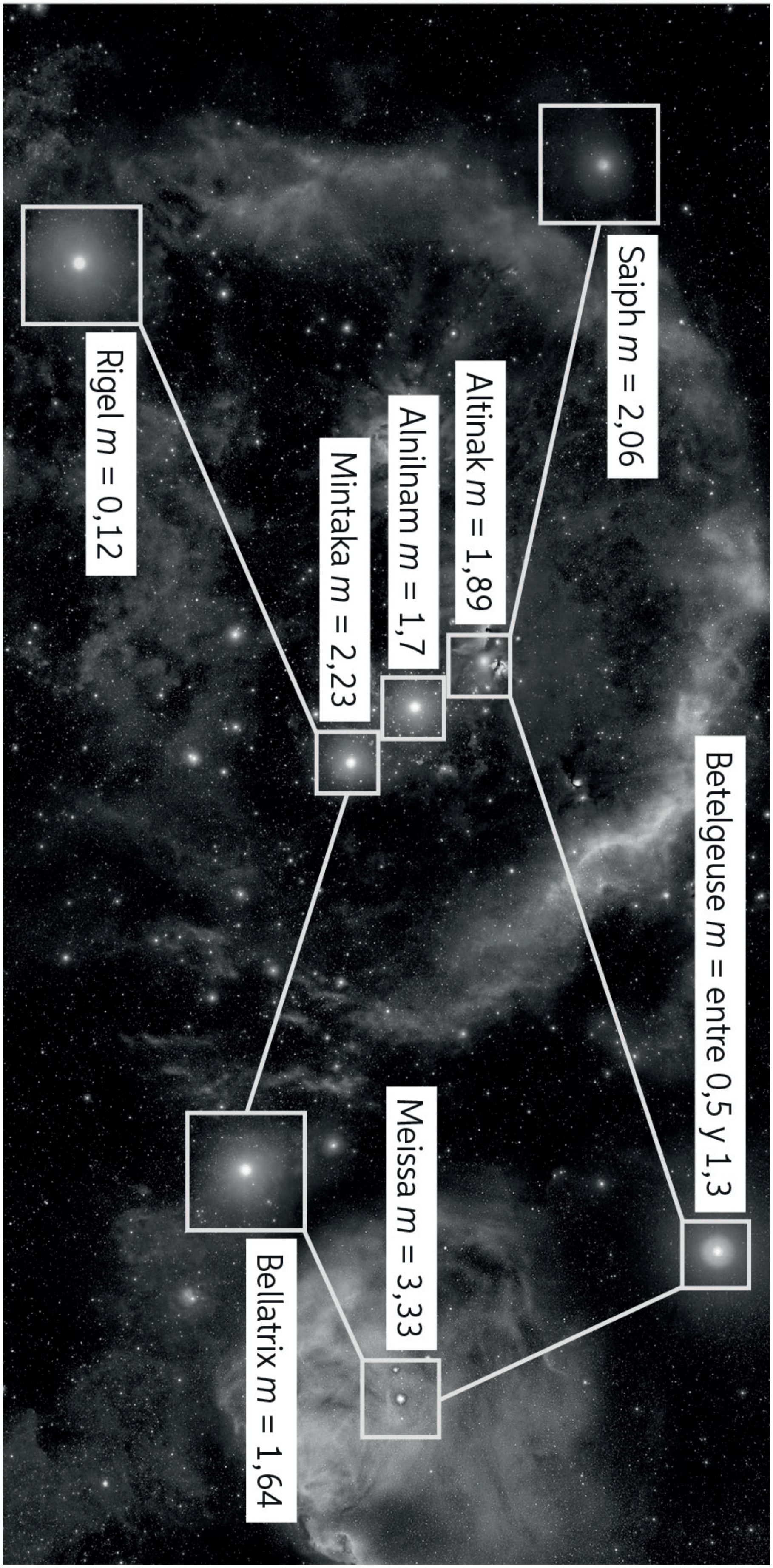
5. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

La escala de magnitudes aparentes (m) clasifica a las estrellas según la intensidad de su brillo estandarizado (I). Se calcula mediante la expresión:

$$m = \log_{100}\left(\frac{1}{(I)^5}\right)$$

Las estrellas que se ven más brillantes son aquellas que tienen menor valor.

Las magnitudes aparentes de las estrellas principales de la constelación de Orión son:


Saiph m = 2,06
Rigel m = 0,12
Altinak m = 1,89
Alnilnam m = 1,7
Mintaka m = 2,23
Betelgeuse m = entre 0,5 y 1,3
Meissa m = 3,33
Bellatrix m = 1,64

Para saber más.
gbit.cl/T21M2MP036A

a. ¿Cuál es la estrella de la constelación de Orión que se ve más brillante en el cielo nocturno? ¿Cuál es la menos brillante?

b. Simplifica y transforma la expresión utilizando propiedades para obtener una equivalente con logaritmo de base 10.

c. La estrella Ácrux de la constelación de la Cruz del Sur tiene una intensidad de brillo estandarizada de 0,5. ¿Cuál es la magnitud aparente de Ácrux?

¿Es más o menos brillante que Rigel?, ¿por qué?

d. Determina la intensidad del brillo de las estrellas de Orión.

e. ¿Cuánto varía la intensidad del brillo de Betelgeuse?

f. La escala moderna incluye cuerpos celestes como la Luna y el Sol con una magnitud aparente de $-12,6$ y $-26,8$ respectivamente. ¿Cuántas veces más intenso es el brillo del Sol que el de la Luna?

▶ Para concluir

a. ¿En qué otras situaciones cotidianas podrías aplicar logaritmos? Investiga.

b. ¿Cómo explicarías la relación entre logaritmos y potencias de exponente racional?

Antes de continuar: Evaluación intermedia

1. Explica con tus palabras la relación entre potencias de exponente racional y raíces.

2. Explica con tus palabras la relación entre potencias de exponente racional y logaritmos.

3. Expresa cada potencia en forma de logaritmo.

a. $3^4 = 81$

b. $2^{-6} = \frac{1}{64}$

c. $5^{-3} = \frac{1}{125}$

d. $\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776}$

e. $\left(\frac{10}{3}\right)^3 = \frac{1000}{27}$

f. $\left(\frac{5}{6}\right)^{-4} = \frac{256}{625}$

4. Expresa como potencias los siguientes logaritmos.

a. $\log_8 512 = 3$

b. $\log_7 \frac{1}{343} = -3$

c. $\log_{\frac{2}{3}} \frac{81}{16} = -4$

d. $\log_{\frac{5}{6}} \frac{25}{36} = 2$

5. Calcula el valor de x en cada caso para que se cumplan las siguientes igualdades.

a. $\log_x 719 = 6$

b. $\log_x 4096 = 4$

c. $\log_X 4 = \frac{1}{2}$

d. $\log_5 x = 6$

e. $\log_{64} x = \frac{1}{4}$

f. $\log_{\frac{512}{216}} x = \frac{1}{3}$

g. $\log_{81} 3 = x$

h. $\log_{\frac{1}{81}} 3 = x$

i. $\log_{\frac{1}{625}} 5 = x$

6. Resuelve las siguientes operaciones aplicando las propiedades de logaritmos.

a. $2\log_4 64\ \frac{1}{3}\log_3 27 - \sqrt{\log_5 125}$

b. $4\log_3 9\ \frac{1}{3}\log_{16} 8 - \sqrt{\log_2 32}$

c. $\frac{1}{3}\log 10 + \frac{2}{3}\log 10 - \sqrt{\log 10}$

d. $\dfrac{\sqrt{3\log 100}}{9 + \log_2 8} \div \dfrac{\log_6 3 + \log_6 2}{\log_{\frac{1}{2}} 4}$

7. Para calcular el pH de una solución química se utiliza la fórmula $pH = -\log[H^+]$. En ella, H^+ es la concentración de iones de hidrógeno presentes en la solución.

¿Cuál es el pH de una solución que tiene una concentración de $[H^+]$ igual a $9,5 \cdot 10^{-12}$?

8. Para determinar el diámetro d de un asteroide (en km), los astrónomos utilizan la expresión $\log(d) = 3,7 - 0,2 \cdot g$. En ella, g corresponde su magnitud absoluta.

a. Determina el diámetro de un asteroide si su magnitud absoluta es 30.

b. Calcula el diámetro de un asteroide si su magnitud absoluta es 20.

c. ¿Cuál es la magnitud absoluta de un asteroide si su diámetro mide 5,8 km?

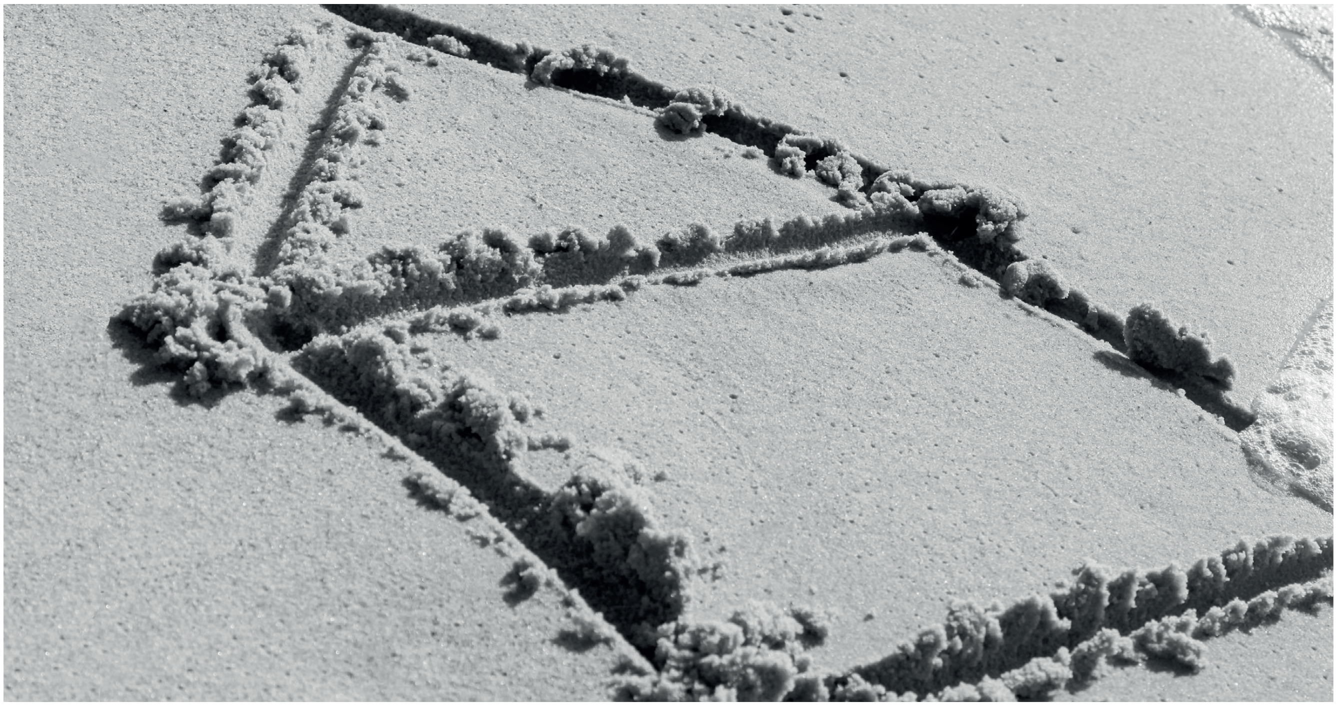
▶ Reflexiono

a. ¿Cuál crees que es la utilidad de las escalas logarítmicas en contextos científicos?

b. ¿Cómo facilitaron tus cálculos las distintas propiedades de logaritmos?

c. ¿Comprendiste completamente la relación entre las propiedades de logaritmos y las de potencias enésimas? ¿Qué podrías mejorar?

¿Qué aprendí?



Imagina que dibujas con exactitud un cuadrado de lado 1 metro en la arena. Luego, con la misma exactitud, cortas un trozo de cuerda del mismo largo que la diagonal de ese cuadrado. Así tendrás en tus manos una cuerda de largo $\sqrt{2}$ metros.

El número $\sqrt{2}$ es irracional. Por lo tanto, no puede escribirse completamente y, sin embargo, lo estarías sosteniendo en tu mano.

Evalúa los conocimientos adquiridos a lo largo de la Unidad realizando las siguientes actividades.

Responde a partir de la imagen.

1. ¿Cómo justificas la aparente contradicción presentada en la imagen?

2. Dibuja un cuadrado de lado 2 cm. Luego, responde las siguientes preguntas:

a. ¿A qué conjunto pertenece el valor de la diagonal de este cuadrado?

b. ¿Cuál es el largo aproximado de su diagonal? Estima mediante el método de los cuadrados.

3. Repite la experiencia para un cuadrado de lado 4, 8 y 10 cm. En caso de que se repitan los tipos de resultados, explica por qué ocurre eso.

Resuelve.

4. Indica si los siguientes números son racionales o irracionales. En caso de ser racionales, escríbelos como una fracción.

a. $\sqrt{2} + \sqrt{4}$

b. $\sqrt[3]{25 + \sqrt{4}}$

c. $\sqrt[3]{-5}$

d. $\sqrt{\frac{162}{49}}$

5. Construye en tu cuaderno una recta numérica y ubica los siguientes números en ella.

a. $\sqrt{17}$

b. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

6. Realiza el método de acotación sucesiva 4 veces y calcula una aproximación de $\sqrt{30}$. ¿Qué tan cercana es esta aproximación al valor real?

7. Reduce las siguientes expresiones utilizando descomposiciones y propiedades de raíces y racionales.

a. $\dfrac{9}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

b. $\left(\sqrt{\dfrac{14}{3}}\right) \div \left(\sqrt{\dfrac{7}{9}}\right)$

c. $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

d. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{2}{7}}}$

e. $\left(\sqrt[21]{\frac{12}{5}}\right)^{14}$

f. $\sqrt{3} + \sqrt{27} - 2\sqrt{75}$

8. Determina la veracidad de cada afirmación. Justifica tu respuesta.

a. La base de un logaritmo puede ser cualquier número real positivo.

b. $\log_{-5}625$ existe y es igual a 4.

c. El logaritmo cuyo argumento es la base de dicho logaritmo es siempre igual a 1.

d. $\log_{0,5} 8 = -3$ expresado en forma de potencia es $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 8$

9. Calcula el valor de las siguientes expresiones (Considera log(2) = 0, 3, log(3) = 0,47, log(5) = 0,7 y log(7) = 0,85)

a. $-\log(14) - 5\log(21) + \log(18)$

b. $3\log(4) + \log(245) - \log(144)$

10. Resuelve los siguientes problemas:

a. El patio de un colegio, de forma rectangular, tiene 450 m^2 de superficie. ¿Cuánto mide su lado más corto si el patio está formado por dos cuadrados iguales?

b. Calcula el volumen de un recipiente cúbico tal que para llenarlo con leche se gastaron $159.720. Se sabe que el litro de leche cuesta $15.

c. $\log(p) = \dfrac{20 + t \cdot \log(2)}{10}$ es la expresión que relaciona la población P de insectos en una bodega transcurridas t horas en que está cerrada.

¿Cuántos insectos había en el instante en que se cerró?
¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que se cuadruplique la población?

▶ Reflexiono

- ¿Qué actividad te costó más realizar? ¿Qué contenidos están implicados?

- ¿Qué estrategias utilizaste para resolver los problemas?

- ¿De qué forma te aportaron al desarrollo de la evaluación tus compañeros?

Unidad 1: Síntesis

Números

¿Cuáles son los números irracionales?

Son aquellos cuya representación decimal es infinita no periódica. No pueden ser representados en la forma de fracción $\frac{a}{b}$ donde a y b son números enteros y $b \neq 0$.

¿Cómo se define al conjunto de los números reales?

El conjunto que está formado por la unión de los números racionales e irracionales.

¿Cuál es la relación entre raíces y potencias?

Las raíces enésimas son potencias con exponente racional, tal que $\sqrt[n]{a^{m}} = a^{\frac{n}{m}}$ con n y m números enteros y m≠0.

¿Cuándo se pueden sumar o restar las raíces enésimas?

Se pueden sumar y restar siempre y cuando sus índices y cantidades subradicales sean iguales.

¿Cuáles son las propiedades de las raíces enésimas?

Sean n y m números enteros positivos.

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

¿Qué es racionalizar una expresión?

Es el proceso de encontrar una expresión equivalente a la original, sin raíces en el denominador, a través de la amplificación.

¿Qué es un logaritmo?

Es el número real n, que cumple con $\log_b(a) = n \Leftrightarrow b^n = a$, donde a y b son números reales positivos, con $b \neq 1$.

¿Cuáles son las propiedades de logaritmo?

Sean a, b, c y p números reales positivos, con $b \neq 1$ y $c \neq 1$

$$\log_b(a^n) = n \cdot \log_b a, \; n \in \mathbb{Q}$$

$$\log_b(a \cdot c) = \log_b(a) + \log_b(c),$$

$$\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b(a) - \log_b(c), \; c \neq 0$$

$$\log_b(a) = \frac{\log_p(a)}{\log_p(b)}, \; p \neq 1$$

UNIDAD DOS

ÁLGEBRA Y FUNCIONES

Glaciar Perito Moreno. Santa Cruz, Argentina. Patrimonio de la Humanidad.

En esta Unidad aprenderás sobre ecuación y función cuadrática, sus propiedades, representación gráfica y aplicaciones en la vida cotidiana. Además, comprenderás el concepto de función inversa y cambio porcentual.

1. ¿Por qué crees que el glaciar Perito Moreno es el más visitado? Comenta con tu curso.

2. ¿Qué otros efectos tiene el calentamiento global? Investiga y comenta.

3. ¿Es un efecto reversible el cambio climático? ¿Qué podemos hacer para evitar sus efectos?

Los glaciares son masas de hielo acumuladas durante miles de años. Junto con los casquetes polares, son la mayor reserva de agua fresca en la Tierra. Sin embargo, debido al cambio climático, se han visto reducidos en tamaño. Efectos como precipitaciones, temperatura media y nubosidad afectan directamente a la masa glacial, por lo que su alteración es considerada el indicador más sensible del cambio climático.

El área de Campo de Hielo Sur se estimó en 13.500 km^2 el año 1945.

Luego se redujo a 13.000 km^2 en 1986 y a 12.550 km^2 en 2010. Entre 1975–1995 se perdieron 13,5 km^3/año, lo que aumentó a 38,7 km^3/año en 1995–2000.

El más afectado corresponde al glaciar O'Higgins. Este retrocedió 12 km en el periodo 1946–1995. Además, perdió 2 km entre los meses de junio y julio de 2017. El glaciar Perito Moreno es uno de los pocos que se encuentra en equilibrio y es el más visitado de toda la Patagonia.

4. ¿El cambio en los glaciares en la Patagonia puede ser modelado por una función lineal? ¿Por qué?

5. ¿Cuánto debiese avanzar anualmente para recuperarse el glaciar O'Higgins en los próximos 50 años? ¿Crees que sucederá?

Activo lo que sé: Evaluación diagnóstica

1. Calcula:

a. El 30% de 125.

b. El 80% de 4.960.

c. El 20% del 50% del 10% de 36.

d. ¿Qué porcentaje es 600 de 800?

e. ¿Qué porcentaje es 400 de 600?

f. ¿Qué porcentaje es 200 de 800?

g. El 12% de un número es 8,4. ¿Cuál es el número?

h. El 2% de un número es 68. ¿Cuál es el número?

2. Multiplica e identifica el nombre del producto notable.

a. $(x-5) \cdot (x-7)$

b. $(x+10) \cdot (x-6)$

c. $(x-6) \cdot (x-6)$

d. $(x-11) \cdot (x+11)$

e. $(4x+11) \cdot (4x-2)$

f. $(2x-5) \cdot (2x+5)$

g. $\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$

h. $\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{x}{2} - 4\right)$

3. Plantea una ecuación y resuelve los siguientes problemas:

a. En una caja hay 4 docenas de bombones, de los cuales el 25% está envuelto en papel de aluminio. ¿Cuántos bombones no están envueltos?

b. El perímetro de un rectángulo mide 48 cm. Calcula sus dimensiones sabiendo que el largo es el triple de su ancho.

c. El IVA (impuesto al valor agregado) corresponde al 19% de todas las compras que se realizan. Si un libro cuesta $9.000 sin IVA, ¿cuál será su valor final?

d. El valor mensual, con IVA, de un servicio digital en línea es \$9.520. ¿Cuál es su valor sin IVA?

4. El estiramiento o compresión de un resorte es directamente proporcional a su fuerza de restitución. Esta relación, conocida como ley de Hooke, está dada por $F= -kx$. En esta F es la fuerza de restitución; x, su deformación (estiramiento o compresión) y k es la constante de deformación del resorte. Para el resorte de la imagen, la relación es $F = -100$ x.


x = –0,6 cm


x = 0 cm


x = 0,4 cm

a. Calcula la fuerza de restitución del resorte para cada distancia que este se estira o comprime en las imágenes.

b. A partir de los datos obtenidos, traza la gráfica que representa la relación entre la fuerza de restitución y la elongación del resorte.

c. ¿Cómo se modificaría la gráfica si el coeficiente del resorte fuera k=50?

d. ¿Corresponde a una función la relación entre ambas magnitudes? ¿Por qué?

▶ Reflexiono

- ¿Lograste realizar todas las actividades sin problemas? ¿Crees que debes reforzar algún contenido? Si es así, ¿cuál?

- ¿Te sientes preparado para comenzar esta Unidad? ¿Qué conceptos te resultaron más fáciles de comprender?

Lección 4: Cambio porcentual constante

Definición de cambio porcentual

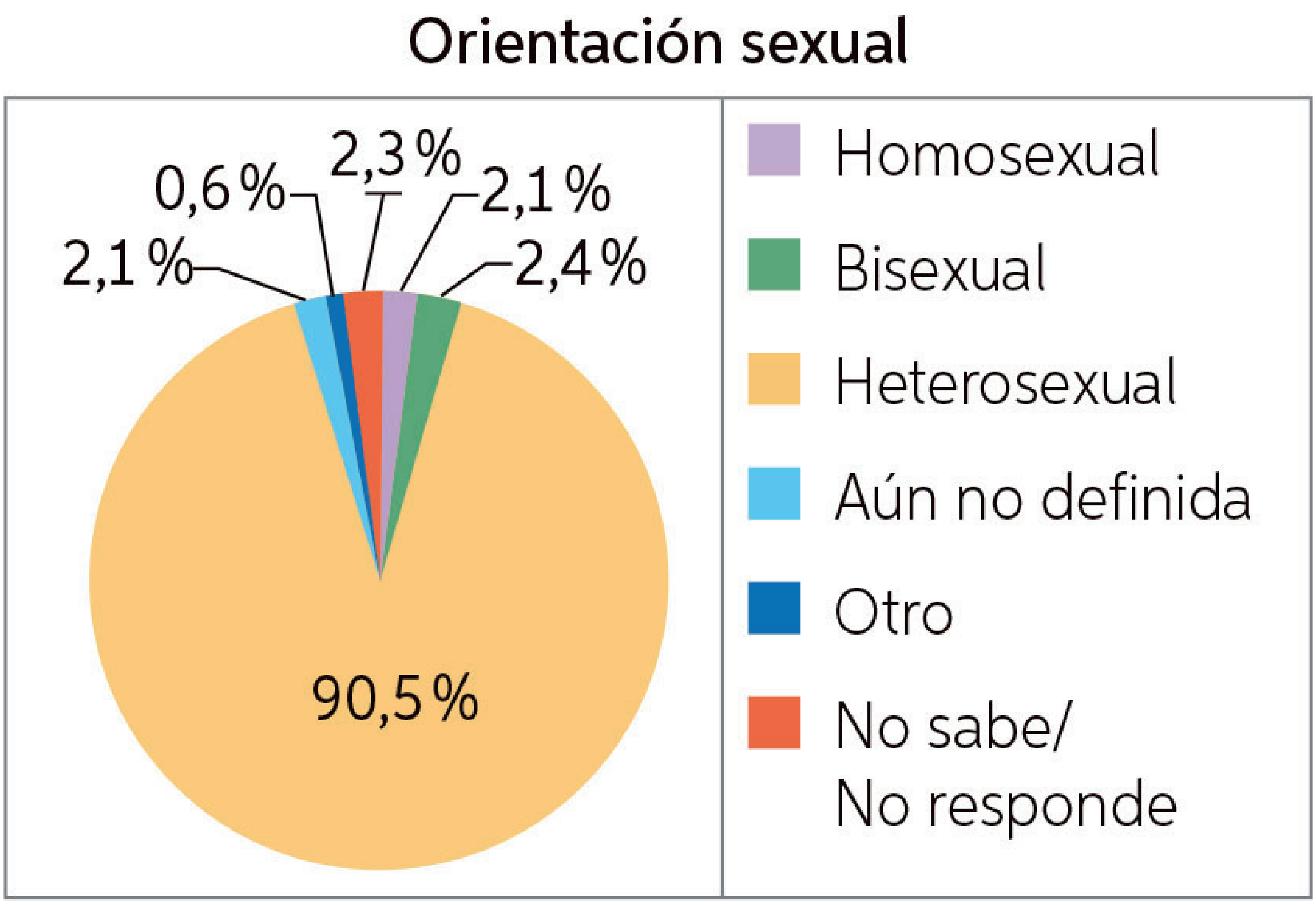
¿Cómo pueden representarse los porcentajes de forma algebraica?

¿Cómo pueden representarse los porcentajes de forma gráfica?

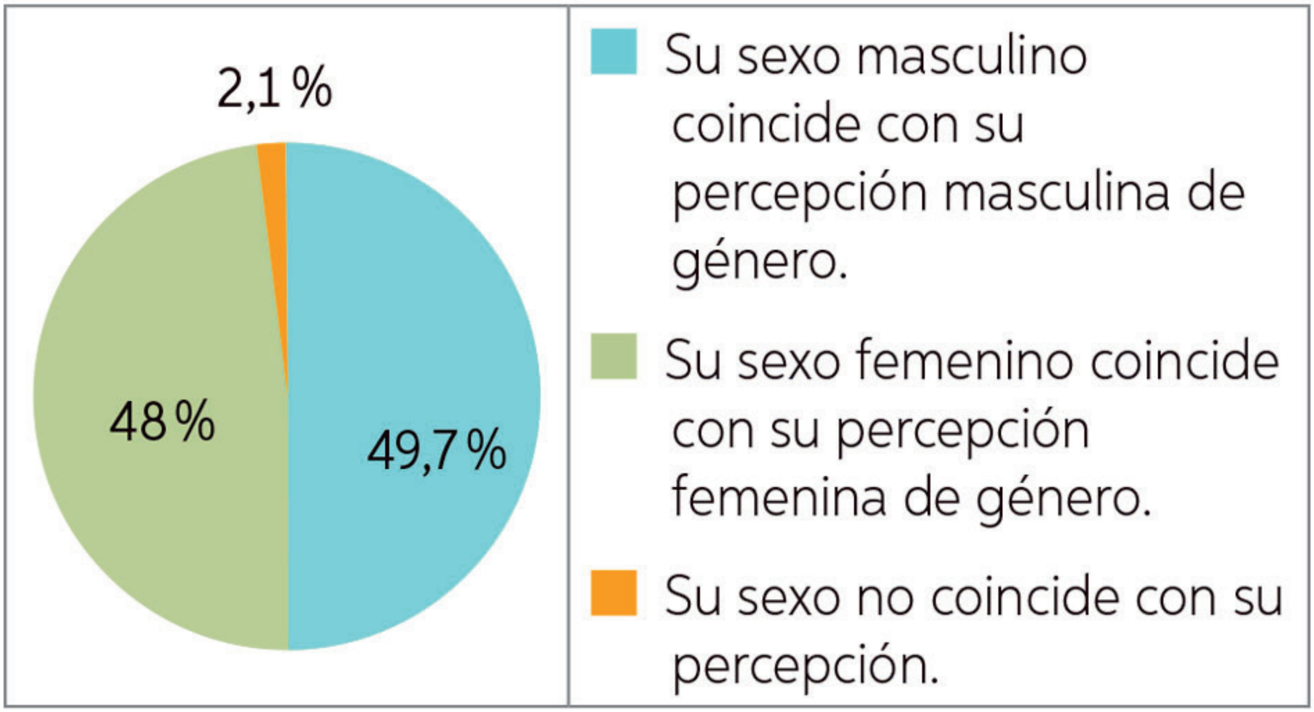
Objetivo: Comprender y analizar el cambio porcentual de una magnitud en el tiempo.

Ciencias sociales

1. La IX Encuesta Nacional de Juventud fue aplicada a 9.700 jóvenes entre los 15 y 29 años. Los resultados se presentan a continuación.



Identidad



a. ¿A cuántas personas encuestadas corresponde cada una de las categorías de orientación sexual?

b. ¿A cuántas personas encuestadas corresponde cada una de las categorías de identidad?

c. La VIII Encuesta se aplicó también a 9.700 jóvenes. De ellos, 8.042 declararon su orientación como heterosexual. ¿En cuánto varió el porcentaje?

- ¿Por qué crees que es importante realizar este tipo de encuestas? Comparte tu respuesta con tu curso.

El **cambio porcentual** es la variación de un número o cantidad inicial en un periodo de tiempo. El **índice de variación** (Iv) es un número decimal positivo que se define como el cociente entre dos valores consecutivos de una variable. Por ejemplo, el índice de variación entre el periodo actual y el periodo anterior se calcula mediante:

$$Iv = \frac{\text{Valor actual}}{\text{Valor anterior}}$$

Indicando el crecimiento o decrecimiento de la variable. Si $0 < Iv < 1$, la variable decrece en el tiempo. Si $1 < Iv$, la variable crece en el tiempo.

¿Qué ocurre con una variable si el índice de variación es 1? Explica con tus palabras.

2. Analiza el siguiente titular y responde.

> El índice de variación del precio de los combustibles entre marzo y abril fue de 1,03.

a. ¿El valor de los combustibles aumentó o disminuyó? ¿En qué porcentaje?

b. En marzo el precio de un litro de combustible era de $780. ¿Cuánto costará en abril?

c. Supongamos que el índice de variación se mantiene constante en mayo. ¿Cuánto habrán aumentado los precios respecto de marzo?

3. Analiza y responde.

La tabla muestra la cantidad de animales (en miles) en estado salvaje durante los últimos 4 años, en cierta región.

Año	2017	2018	2019	2020
Cantidad de animales	5	4	3,2	2,56

a. Calcula el índice de variación entre cada año.

b. ¿La variable crece o decrece en el tiempo? ¿Cómo se evidencia en el índice de variación?

c. ¿Es correcto decir que, durante dos años consecutivos, la disminución en la cantidad de animales fue la misma? ¿Por qué? Justifica.

d. Si el índice de variación se mantiene, ¿qué se podría esperar a futuro de la vida silvestre en esa zona? Justifica tu respuesta construyendo una tabla para los valores desde el año 2020.

4. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

El crecimiento de un árbol nativo plantado en 2013 se muestra en la siguiente tabla.

Año	2016	2017	2018	2019	2020
Altura (m)	2	2,4	2,88	3,456	4,1472

a. Calcula el índice de variación entre cada año. ¿Es constante? Justifica.

b. Si el índice de variación se mantiene constante, ¿qué altura tendrá el árbol en 2021?

c. Si el índice de variación se mantiene constante, ¿en qué año el árbol medirá aproximadamente 10,3 metros?

d. Encuentra una expresión algebraica que relacione cualquier par de años consecutivos t y t+1 con el índice de variación del problema.

Podemos representar algebraicamente un fenómeno que involucre un cambio porcentual constante mediante la **ecuación recursiva**:

$$f(t + 1) = Iv \cdot f(t)$$

Donde t representa un periodo (medido en días, décadas, horas, etc…), $t + 1$ el periodo siguiente y $f(t)$ es la cantidad en el periodo t.

5. Encuentra el índice de variación para cada situación. Luego, escríbelo de forma recursiva. Considera que el índice de variación es constante en el tiempo.

Ejemplo: La población (P) de una ciudad aumenta 4% cada año.

El Iv de un año a otro es 104%=1,04. De forma recursiva: $P(t + 1) = 1,04 \cdot P(t)$

a. El volumen (V) de un glaciar se reduce en 8,9 % cada año.

b. La tasa de desempleo (d) en Chile aumentó en 7,1% en el primer trimestre de 2019.

c. El índice de obesidad (O) en un país aumenta en 2,7% cada año.

Considera que la altura del árbol en el año t es igual a f(t).

d. La tasa de personas diagnosticadas (D) con VIH en Chile aumentó en 30,9% el año 2019 respecto de 2018.

Economía

6. Analiza y responde en parejas.

Cierta camioneta para trabajos pesados tiene un valor de $12.000.000 nueva. Su devaluación es de 10% al año.

a. ¿Qué significa que el precio de la camioneta se devalúe? Explica.

b. Identifica el índice de variación y escribe el cambio porcentual de forma recursiva.

c. Construye una tabla de valores para el precio de la camioneta en los próximos 5 años.

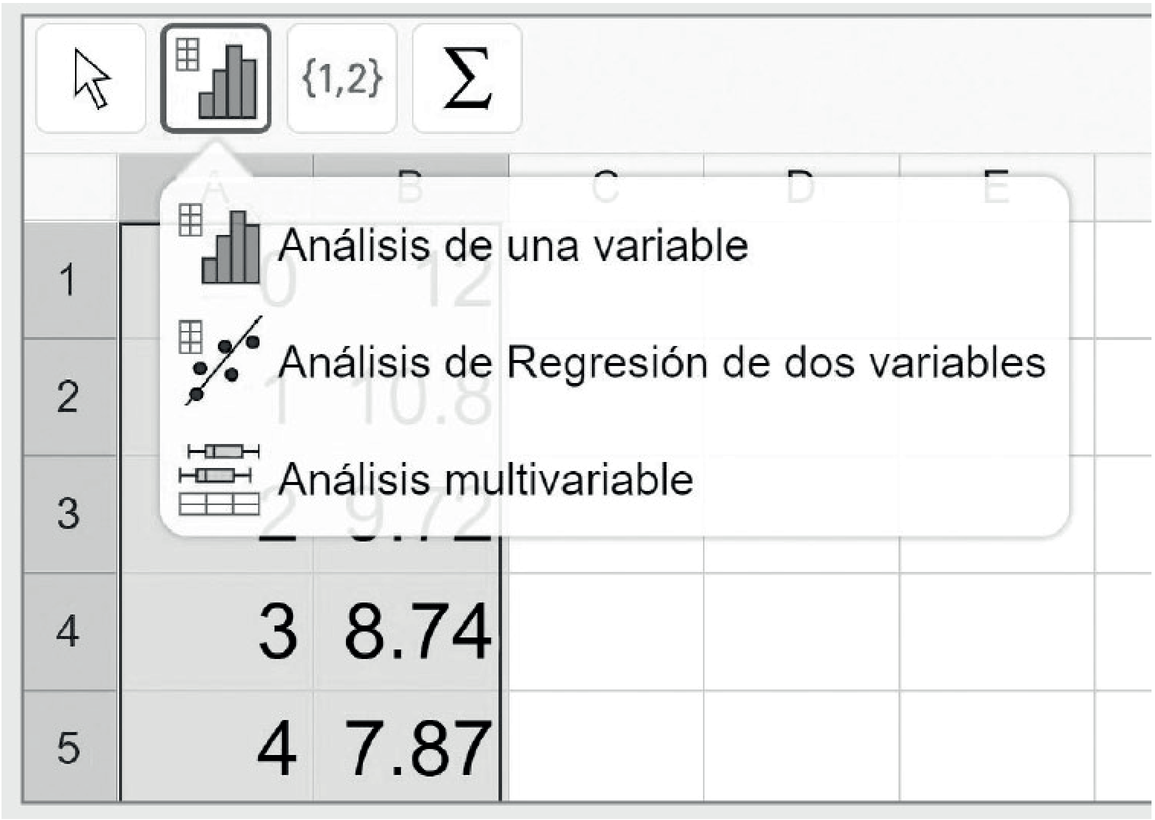
d. Ubica los datos de la tabla anterior en un plano cartesiano y únelos con una curva a mano alzada. ¿Cómo describirías la curva?

e. Analiza el siguiente procedimiento para construir un gráfico de cambio porcentual utilizando GeoGebra. Luego, compáralo con el gráfico obtenido

Paso 1: Ingresa los valores en la tabla.

	A	B	C	D	E	F
1	0	12				
2	1	10.8				
3	2	9.72				
4	3	8.74				
5	4	7.87				
6	5	7.09				

Paso 2: Selecciona los datos y abre la herramienta “Análisis de regresión”.



Paso 3: Aparecerán los datos de la tabla graficados. Selecciona “Modelo de regresión” y luego la opción “Crecimiento”.

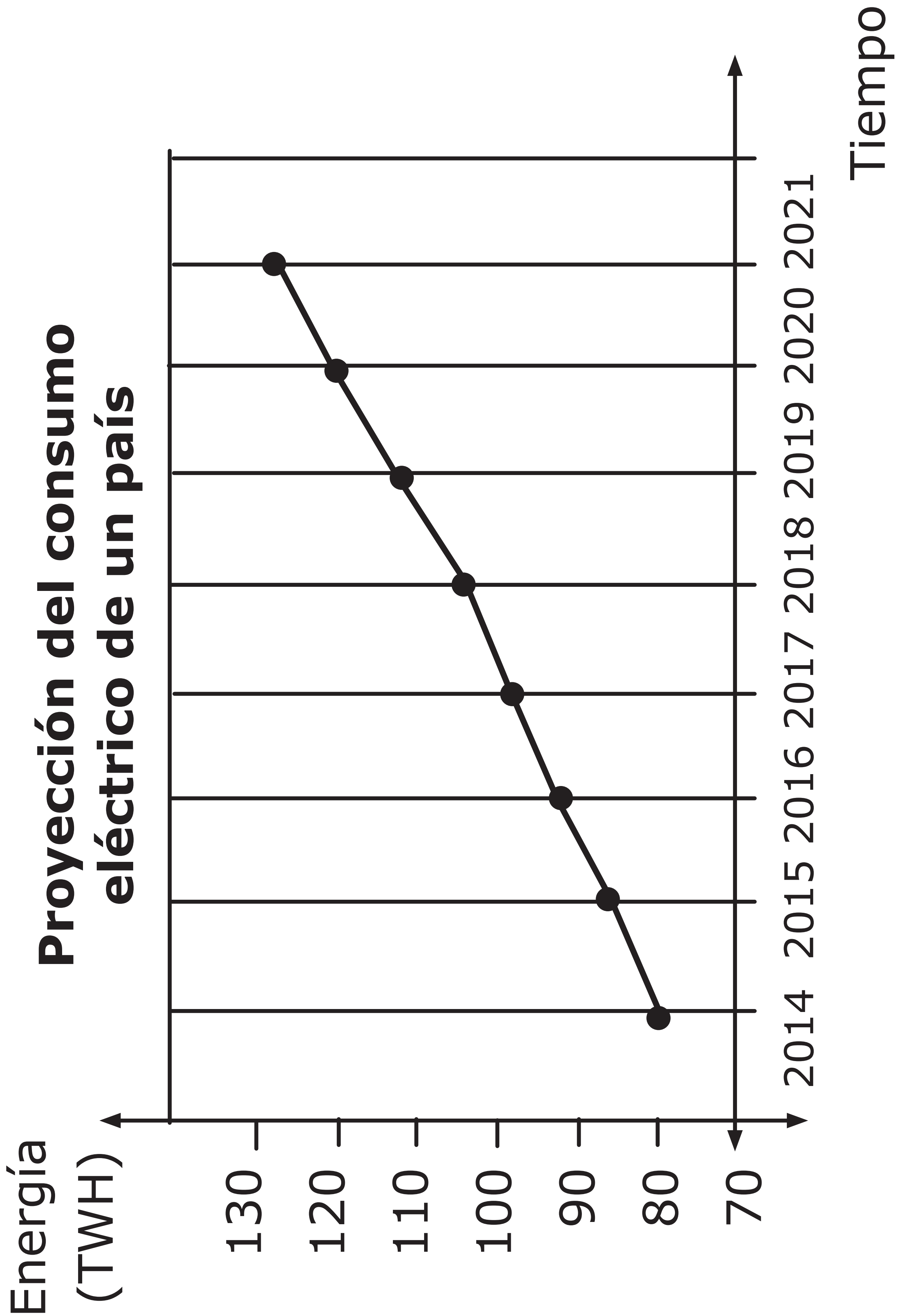
f. ¿Qué representan las variables x e y de la ecuación anterior?

45-46

¿Cómo fue el desarrollo del trabajo colaborativo de la actividad anterior?, ¿qué podrías hacer para mejorarlo? Comenta en parejas algunas estrategias para mejorar.

7. Analiza el gráfico y responde. Considera constante el cambio porcentual entre los años 2014 y 2021.

Tiempo (año)	Energía (TWh)
2014	80
2015	85,6
2016	91,6


Proyección del consumo
eléctrico de un país
Energía
(TWH)
130
120
110
100
90
80
70
2014
2015
2016
2017
2018
2019
2020
2021
Tiempo

46

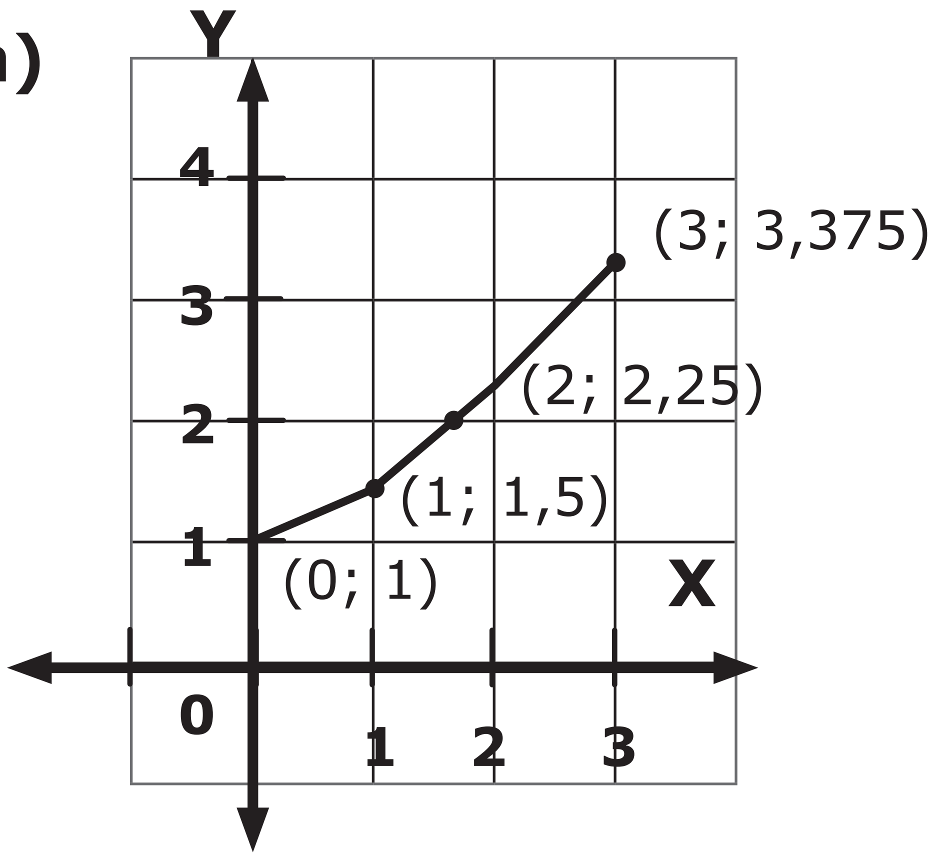
a. ¿Aumenta o disminuye el consumo de energía eléctrica en ese país? ¿En qué intervalo esperarías que se encuentre el índice de variación? Justifica.

b. Encuentra el índice de variación y la ecuación de cambio porcentual que describen la situación planteada. Luego, compáralo con tu respuesta anterior.

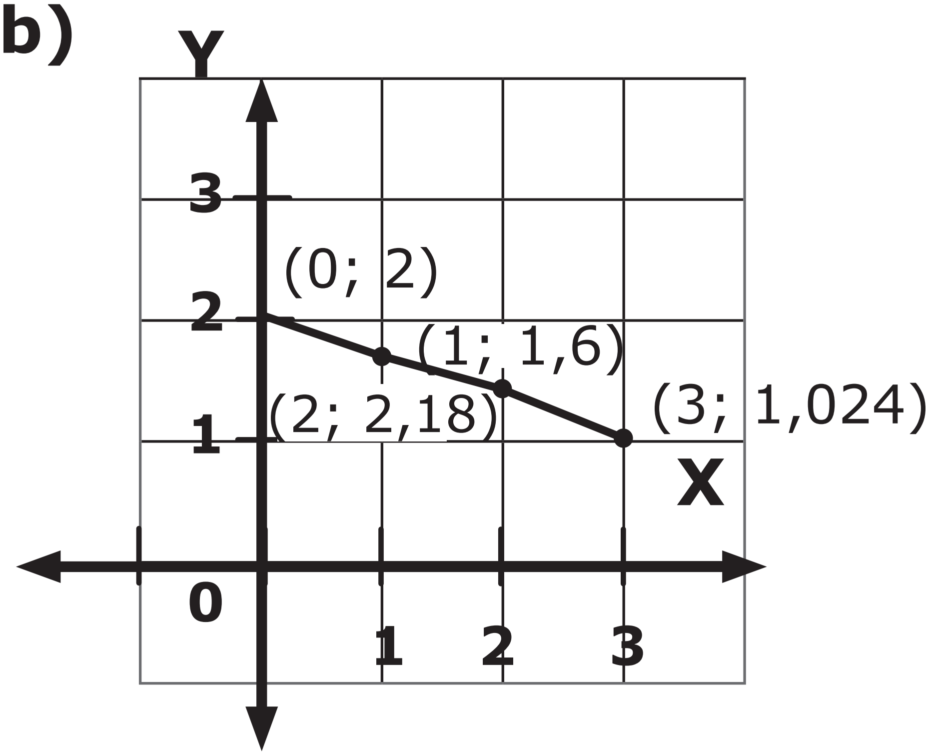
c. Si esta situación se mantiene, ¿a qué niveles de consumo energético llegará el país en 2030?

8. Analiza los siguientes gráficos y determina el índice de variación.

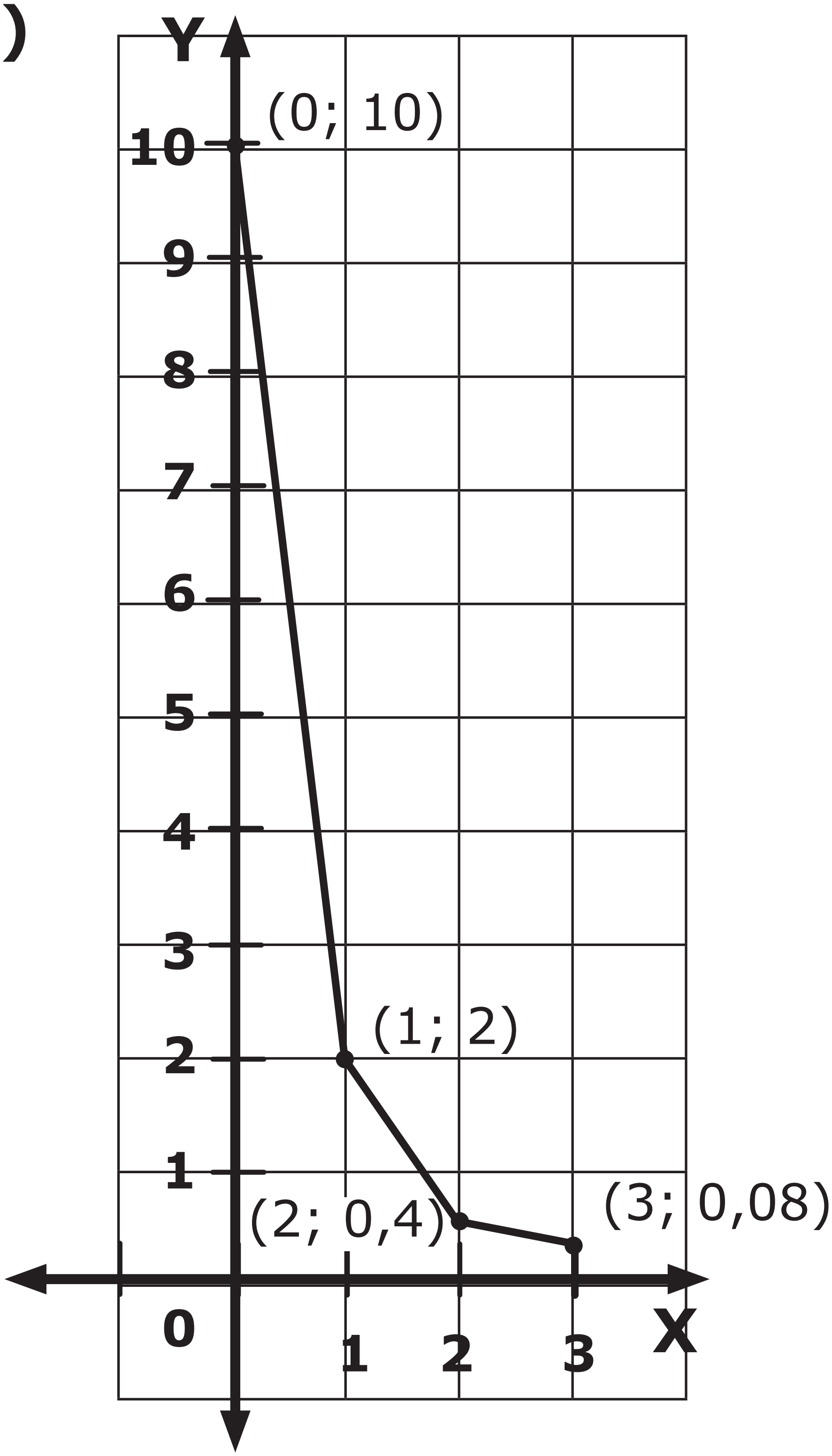
a)



b)



c)



▶ Para concluir

a. Imagina que el índice de variación no fuera constante. ¿Qué sucedería con la representación gráfica del cambio porcentual?

b. ¿En qué se diferencian los gráficos de una situación de crecimiento porcentual y uno de decrecimiento porcentual?

Aplicaciones de cambio porcentual

¿Qué propiedades debe cumplir un fenómeno para ser modelado por una situación de cambio porcentual?

Objetivo: Estudiar fenómenos de cambio porcentual en la vida cotidiana y otras asignaturas.

Para el cambio porcentual constante debes considerar los siguientes aspectos:

- Identificar las variables y su relación.
- Comprobar que los datos satisfacen las formas algebraicas asociadas.

- Aplicar la expresión algebraica para proyectar resultados o valores a futuro.
- Representar los datos de manera gráfica o mediante tablas favorece la comprensión del fenómeno y su comportamiento.

En problemas de esta índole es común que las incógnitas se encuentren en el exponente o en la base de una potencia. Por ello, es importante recordar nociones de logaritmos y raíces enésimas, para despejarlas y responderlas.

Economía

1. En el interés compuesto, los intereses obtenidos al final de un período se suman al capital inicial, y el monto así conseguido se considera el nuevo capital para el cálculo de los intereses en el siguiente período. Por ejemplo, si se pide un crédito de $1.000.000 con un interés compuesto del 3% mensual. Podemos calcular el interés compuesto de forma recursiva:

$C(t + 1) = r \cdot C(t)$; donde

$C(0) = 1000\ 000$ y r = 3%

a. ¿Cuál es valor obtenido luego de un periodo?

b. Determina el valor obtenido luego de dos periodos.

c. ¿Cuántas veces hay que multiplicar C(0) por el índice de variación para obtener C(2)?

d. ¿Cuántas veces hay que multiplicar C(0) por el índice de variación para obtener C(t)? Exprésalo utilizando potencias.

e. Analiza el siguiente procedimiento.

La fórmula de interés compuesto es:

Períodos

Capital final

$$\boxed{C_f(t) = C_i \cdot (1 + r)^t}$$

Tasa de interés por período

Capital inicial

Podemos predecir el valor de un monto inicial de \$1.000.000 (C_i) bajo un interés compuesto mensual del 3% (r = 0,03) luego de 6 meses (t = 6) se tendrá:

$C_f(6) = 1.000.000 \cdot (1 + 0,03)6 = 1.000.000 \cdot (1,03)6 \approx 1.194.052$

¿Cuál será el capital final luego de un año?

f. Utiliza la formula anterior para calcular C(0) = \$10.000.000, con r = 4% luego de 3 meses.

Ciencias sociales

2. En cierta zona rural en 1970 habitaban solo 500 personas. En ese entonces, la tasa de crecimiento poblacional era de 3% anual. El modelo matemático que rige el crecimiento porcentual de la población es $P(t) = A \cdot rt$

a. ¿Qué representan los parámetros A y r en esta expresión? ¿Cuáles son sus valores en esta situación?

b. Escribe la ecuación recursiva que describe el aumento de la población año a año en dicha zona. Luego, determina la ecuación explicita.

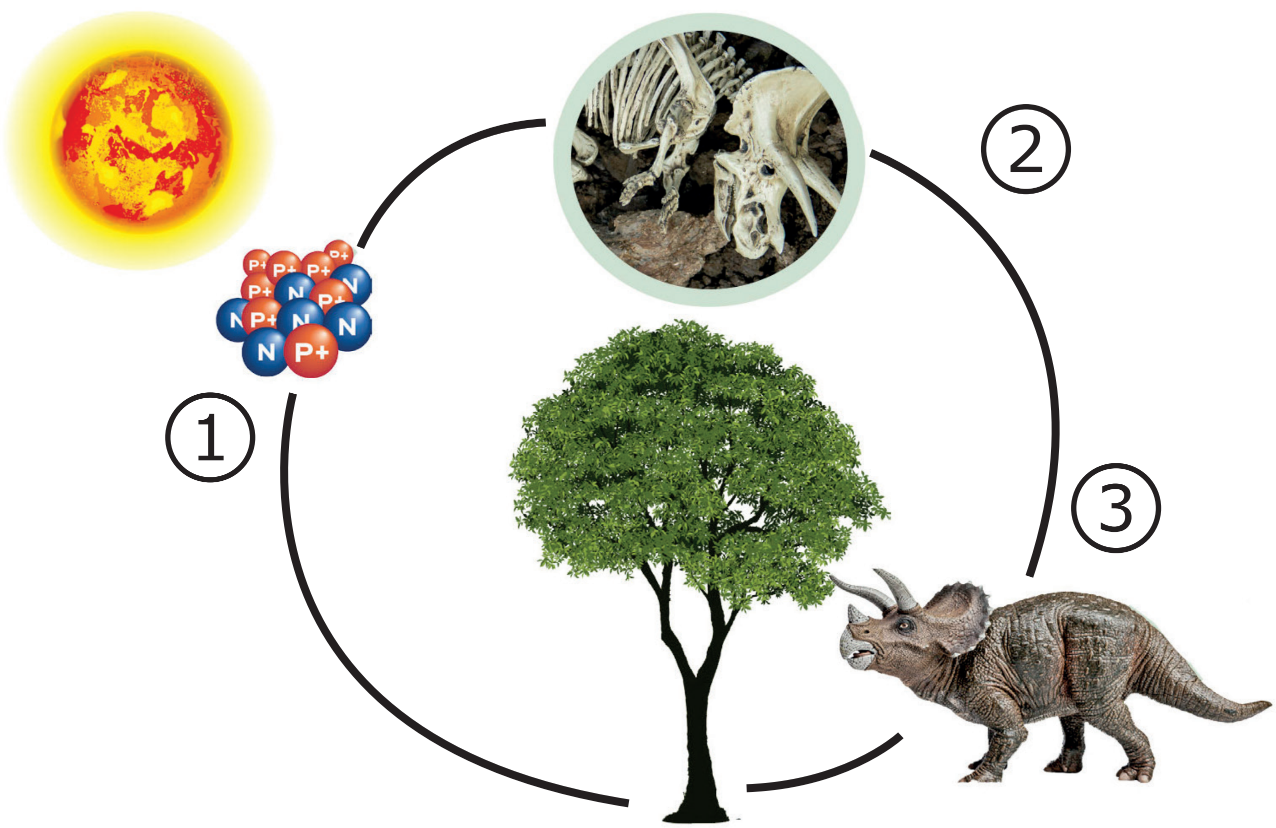
c. ¿Qué significa $P(8)$? Explica y encuentra su valor.

d. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla:

Año	t	P(t)
1970	0	500
1971		
1972		
1973		
1974		

Actividades de profundización

3. La cantidad de núcleos radiactivos N existentes en el tiempo t sigue el modelo:



1. Carbono-14

El carbono-14 es un isótopo creado por un átomo de nitrógeno con un neutrón proveniente de la radiación solar.

2. Al morir, dejan de absorber carbono. El carbono-14 se transmuta en nitrógeno.

3. Las plantas y animales incorporan el carbono-14 en sus cuerpos a través de la fotosíntesis de las plantas.

a. El isótopo radioactivo carbono-14 tiene una vida media de 5.730 años. ¿Qué significa esto?

b. Completa la tabla en tu cuaderno:

t (años transcurridos)	Porcentaje de carbono - 14
0	100%
5730	
11460	
17190	
22920	
28650	
34380	

c. ¿Qué porcentaje de átomos de carbono-14 permanecerán en una muestra tras 57.300 años?

d. Se encuentran restos arqueológicos con 20% de carbono-14 en relación con una muestra viva. ¿Qué antigüedad tienen estos restos?

Economía

4. Los intereses bancarios se aplican al final de cada periodo sobre una cantidad adeudada o ahorrada a la fecha. En tal caso, se dice que se está aplicando un interés compuesto. El capital *C* luego de cada periodo de tiempo t se modela por la expresión.

$$C(t) = C_0 \cdot (1 + i)^t$$

Donde C_0 corresponde al capital inicial del periodo e i es a la tasa de interés que aplica la entidad bancaria. Reúnanse en grupos y respondan:

a. Expliquen qué significa que una tasa de interés sea aplicada de manera: mensual, trimestral, semestral y anual.

b. Una institución financiera ofrece a sus clientes un depósito a plazo con 6% de interés anual por depósitos realizados a 2 años. Si se invierte $1.000.000:

I. Identifiquen el índice de variación.

II. ¿Cuál será el capital después de 2 años?

III. ¿Cuánto será luego de 4 años?

c. Tres personas depositan cada una \$53.000 en sus cuentas bancarias con un interés compuesto. La primera depositó su dinero al 3% anual por 6 años. La segunda lo hizo al 5% anual por dos años y la tercera al 2% semestral por 3 años. ¿Quién tendrá más dinero al momento de retirarlo? Justifica.

d. Una abuela planea dejar una herencia a su nieto. Para ello, deposita \$200.000 en una cuenta de ahorros que ofrece un interés compuesto del 2,1% semestral.

I. Construye una tabla de datos con el capital adquirido para los 13 años siguientes.

II. Utilizando un software, gráfica el cambio porcentual anterior.

e. Una institución bancaria ofrece otro tipo de interés, el interés simple, el cual está modelado por la expresión $C(t) = C_0 (1 + i \cdot t)$. Comparen el interés simple y el compuesto construyendo una tabla para mostrar la evolución de una deuda de \$1.000.000 con un tasa de interés del 10% anual.

▶ Para concluir

a. ¿Qué otros fenómenos de la vida cotidiana pueden ser representados mediante una ecuación de cambio porcentual? Da 3 ejemplos.

b. ¿Cómo describirías la diferencia en el crecimiento entre el interés simple y el compuesto?

Antes de continuar: Evaluación intermedia

¿A dónde va el dólar?

En grupos de 3 integrantes, analizarán el cambio porcentual del precio del dólar en los últimos 20 días. Utilicen una planilla de cálculo.

Materiales:

- Acceso a Internet para buscar la información.
- Computador con Microsoft Excel o similar.

Paso 1: Busquen en Internet el registro del precio del dólar en los últimos 20 días. Anótenlos en una planilla de Excel, como la del ejemplo.

	A	B	C
1	Precio Euro Febrero 2020		
2	Día	Precio	Variación porcentual
3	6	854,96	
4	7	855,42	
5	8	855,42	
6	9	855,42	
7	10	863,59	
8	11	868,67	

En el ejemplo se utiliza el precio del euro desde el 6 al 11 de febrero de 2020 (***https://si3.bcentral.cl/***)

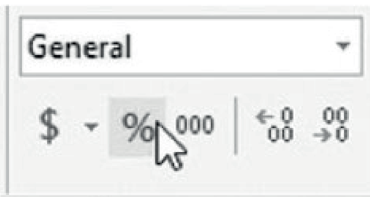
Paso 2: Se asigna inicialmente 0 en la primera casilla de la variación porcentual.

a. ¿Por qué se asigna este primer valor? ¿Se podría haber asignado otro valor? Expliquen.

	A	B	C
1	Precio Euro Febrero 2020		
2	Día	Precio	Variación porcentual
3	6	854,96	0
4	7	855,42	=1-B3/B4
5	8	855,42	
6	9	855,42	
7	10	863,59	
8	11	868,67	

Paso 3: Calculen la variación porcentual en cada caso.

b. ¿Cómo obtienen esta fórmula para el cálculo de la variación porcentual?



	A	B	C
1	Precio Euro Febrero 2020		
2	Día	Precio	Variación porcentual
3	6	854,96	0
4	7	855,42	0,000538
5	8	855,42	0,000000
6	9	855,42	0,000000
7	10	863,59	0,009461
8	11	868,67	0,005848

Paso 4: Traspasen a porcentaje los valores obtenidos.

c. Elijan un par de datos de la tabla. Comprueben manualmente el cambio porcentual.

d. Construyan un gráfico que permita visualizar el cambio porcentual del dólar.

e. ¿Podrían predecir qué pasará con el valor del dólar en los próximos días? ¿En qué basan su respuesta? Justifiquen.

	A	B	C
1	Precio Euro Febrero 2020		
2	Día	Precio	Variación porcentual
3	6	854,96	0
4	7	855,42	0,05%
5	8	855,42	0,00%
6	9	855,42	0,00%
7	10	863,59	0,95%
8	11	868,67	0,58%

▶ Reflexiono

a. ¿Cómo evalúo mi participación en esta actividad?

b. ¿Qué utilidad tiene Excel u otra planilla de cálculo en la asignatura? Justifica

c. ¿Qué importancia tiene la variación del dólar en nuestro país?

Lección 5: Ecuaciones de segundo grado

La ecuación de segundo grado

¿Cómo describirás una ecuación?

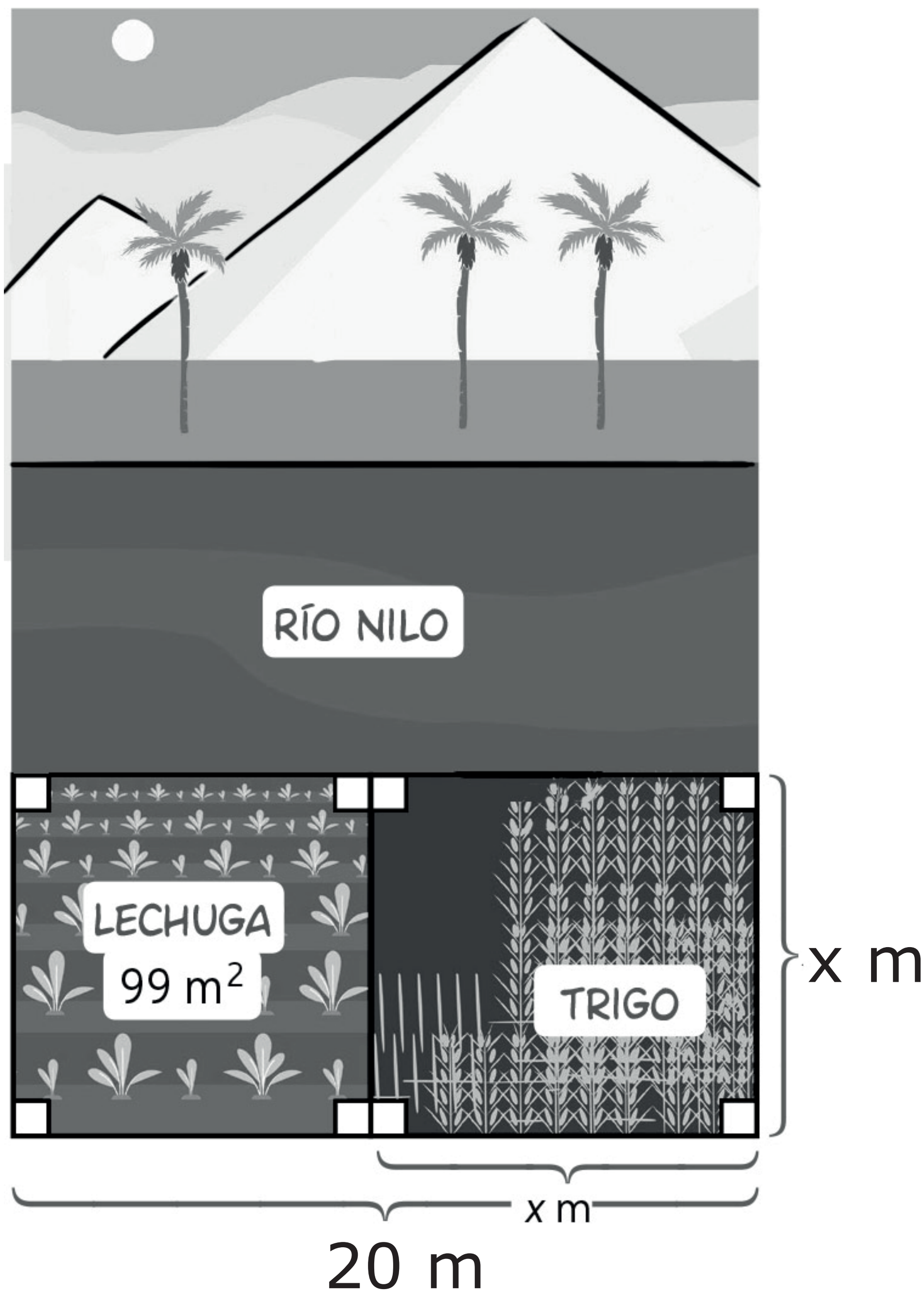
¿Qué significa que una expresión está al cuadrado?

¿Cómo se calcula el área de un rectángulo?

Objetivo: Identificar una ecuación de segundo grado y sus componentes.

1. Analiza la información. Luego, realiza las actividades.

En el antiguo Egipto, debido a las crecidas del río Nilo, las divisiones entre los terrenos aptos para la agricultura eran periódicamente borradas. Para ello, existían agrimensores especializados en realizar las mediciones de terrenos.



a. ¿Cuál es el área total destinada a lechugas? ¿Qué expresión algebraica representa el área destinada a sembrar trigo?

b. ¿Qué expresiones algebraicas puedes plantear para el área total de ambos terrenos? Compara tu respuesta.

c. Iguala la suma de las expresiones obtenidas en a con la expresión obtenida en b. Luego, despéjala de tal forma que quede 0 a un lado de la ecuación. ¿Qué características tiene la ecuación? ¿Qué diferencias tiene con una ecuación lineal?

d. Luego de algunos cálculos, un agrimensor determina que el lado del terreno destinado a sembrar trigo debería medor 11 m o 9 m, Reemplaza estos valores en la expresión anterior. Luego, responde: ¿cuál es correcto?, ¿por qué?

Una **ecuación de segundo grado** o **ecuación cuadrática** tiene la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a, b, c \in \mathrm{R} \text{ y } a \neq 0$$

Donde a, b y c son llamados coeficientes de la ecuación. Las ecuaciones de segundo grado tienen dos raíces o soluciones, las cuales denotaremos como x_1 y x_2, y se dividen en:

Raíces reales distintas: $x_1, x_2 \in \mathrm{R}$ y $x_1 \neq x_2$

Raíces reales iguales: $x_1, x_2 \in R$ y $x_1 = x_2$

No pertenece a los reales: $x_1, x_2 \notin R$

Por ejemplo, la ecuación $3x^2 + 2x = 0$ es incompleta y tiene coeficientes a = 3, b = 2 y c = 0, mientras que $2x^2 + x - 3 = 0$ es completa con coeficientes $a = 2$, $b = 1$ y $c = -3$.

2. Identifica cuáles de estas ecuaciones corresponden a ecuaciones de segundo grado. Determina sus coeficientes *a, b* y *c* en caso de que lo sean:

a. $x + 3 = 2$

b. $x^2 - \frac{3}{4} = 0$

c. $3x - 25 = 6$

d. $x^2 + 6x = 2$

e. $3x^2 - 5 = 0$

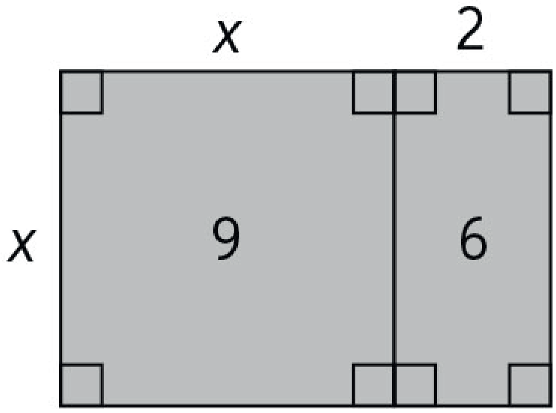
f. $6{,}5x^3 - 9 = 0$

g. $(x - 5)(x + 3) = 0$

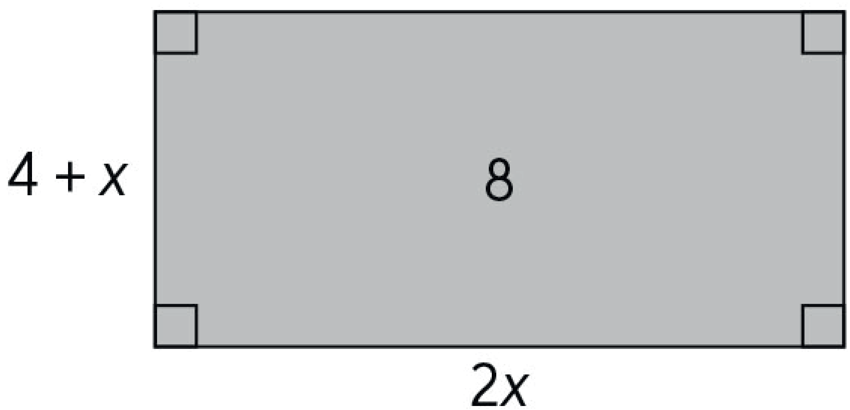
h. $(3x - 2) + 6x = 8$

3. ¿Qué ecuación de segundo grado representa el área de las siguientes figuras?

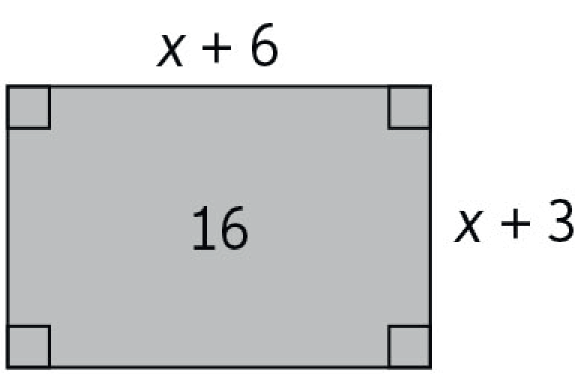
a.



b.



c.



4. ¿Qué significa que la solución de la ecuación $x2 + 2x + 1 = 0$ es $x=-1$? Argumenta.

5. Considera las siguientes ecuaciones y sus posibles raíces:

Ecuación	Posibles raíces		
$x(x - 5) = 0$	7	−5	0
$(x + 1)x = 0$	2	1	−7
$(x + 10)(x + 2) = 0$	5	2	−2

Ecuación	Posibles raíces		
$(x - 14)(x - 8) = 0$	12	8	−8
$(x + 7)(x - 5) = 0$	2	5	−7
$2x(x - 2) = 0$	0	1	−1

a. ¿Cuáles son las posibles raíces que satisfacen la ecuación en cada caso?

b. ¿Qué estrategia utilizarías para determinar las soluciones anteriores?

Física

6. Analiza la siguiente información. Luego, responde.

Para conocer la altura h a la cual se encuentra un cuerpo que es lanzado verticalmente hacia arriba, despreciando el roce con el aire, se emplea la siguiente expresión:

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

h_0: Altura inicial
v_0: Rapidez inicial
t: Tiempo transcurrido
g: Aceleración debida a la gravedad
$\rightarrow$: Considera g como $10 m/s^2$

Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial 50 m/s desde una altura de 5 metros.

a. ¿Cuál es la ecuación que representa su altura?

b. ¿A qué altura se encuentra el cuerpo al cabo de 3 segundos? ¿Y a los 7 segundos?

c. ¿En cuántos segundos vuelve a tener la altura inicial?

d. Compara la expresión anterior con la forma de la ecuación de segundo grado. ¿Cuáles son los valores de los coeficientes a, b y c?

▶ Para concluir

a. ¿Qué es una ecuación cuadrática? Explica con tus palabras.

b. ¿Qué son las raíces de una ecuación cuadrática?

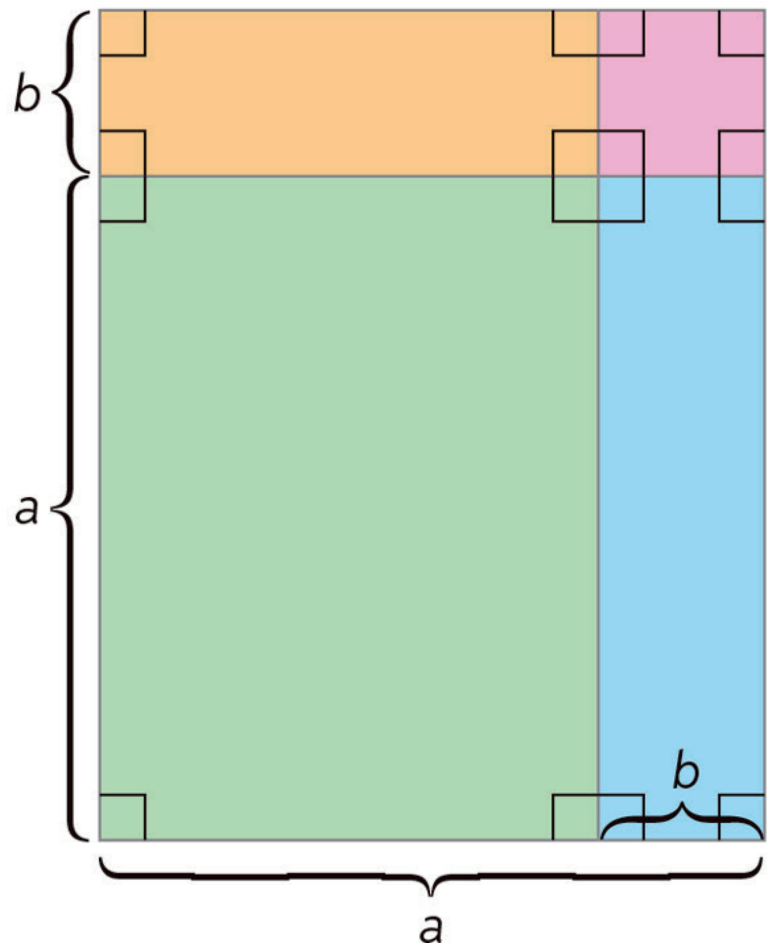
Resolución de una ecuación de segundo grado por factorización

¿Qué es una factorización?

¿Qué son los productos notables y cuáles conoces?

Objetivo: Resolver ecuaciones cuadráticas mediante factorización.

1. Copia la figura e identifica los colores de los cuadriláteros cuyas áreas sean equivalentes a:



a. b^2

b. a^2

c. $a^2 + ba$

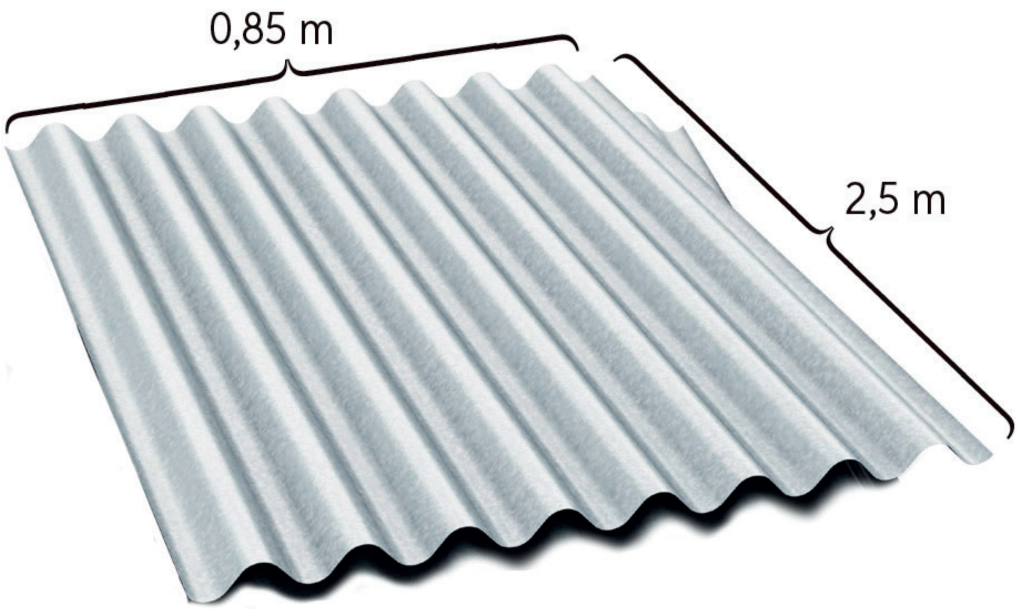
d. $b^2 + ba$

e. $a^2 - ba$

f. $ba - b^2$

2. Lee la siguiente información. Luego, responde:

Se quiere techar una casa. Se sabe que el largo del techo es tres metros más que su ancho y su área es 10 m^2.



a. Si el ancho del techo es x metros, ¿cuáles son sus dimensiones? Escríbelas en términos de x.

b. ¿Cuál es la ecuación cuadrática que relaciona el área del techo con sus dimensiones?

c. Ordena la ecuación anterior de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y factoriza. ¿Cuáles son los factores?

d. Iguala cada factor a cero. Luego, resuelve para obtener los valores de x_1 y x_2.

Si la multiplicación de dos números A y B es 0, entonces se cumple que al menos uno de los dos es igual 0, es decir:

Si $A \cdot B = 0$, se tiene:
$A = 0$, $B = 0$ o $A = B = 0$.

Recuerda las factorizaciones:

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$a^2 + (p + q)a + pq = (a + p)(a + q)$
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b)$

e. Reemplaza los valores de x1 y x2 en las dimensiones del techo. ¿Son ambas soluciones adecuadas para determinar las dimensiones del techo?

f. ¿Cuáles son las dimensiones del techo?

Un método para resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita es la factorización. Este método consiste en factorizar e igualar a cero cada uno de sus factores. De este modo, se despeja la incógnita en cada uno de ellos.

Ejemplo: $x^2 + 4x - 21 = 0$

$$(x + 7)(x - 3) = 0$$

$$x + 7 = 0 \longrightarrow x_1 = -7 \qquad \text{o} \qquad x - 3 = 0 \longrightarrow x_2 = 3$$

“Para el caso de la factorización, resolver una ecuación cuadrática es equivalente a resolver dos ecuaciones lineales". Explica con tus palabras la afirmación anterior.

3. Resuelve las ecuaciones de segundo grado factorizando con el producto notable pedido. Guíate por los ejemplos:

a. Mediante término común:

Ejemplo: $3x^2 - 9x = 0$

Paso 1: Se identifica el término común. En este caso es 3x.

Paso 2: Se reescribe la ecuación utilizando el factor: $3x \cdot (x - 3) = 0$

Paso 3: Se resuelve: $3x = 0 \rightarrow x_1 = 0$ o $x - 3 = 0 \rightarrow x_2 = 3$

I. $x^2 - 7x = 0$

II. $6x^2 + 6x = 0$

III. $18x^2 + 15x = 0$

IV. $5x^2 + 23x = 0$

b. Mediante cuadrado de binomio:

Ejemplo $x^2 - 6x + 9 = 0$

Paso 1: Se busca un número que cumpla con $2k = -6$ y $k2 = 9$. En este caso corresponde a -3.

Paso 2: Se factoriza y resuelve:

$(x - 3)(x - 3) = 0$

$(x - 3)^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 3$

I. $x^2 + 2x + 1 = 0$

II. $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$

III. $4x^2 - 4x + 1 = 0$

IV. $3x^2 + 2x + \frac{1}{3} = 0$

c. Mediante diferencia de cuadrados:

Ejemplo: $9x^2 - 81 = 0$

Paso 1: Identificamos los elementos al cuadrado. Este caso 3x y 9.

Paso 2: Utilizando la factorización, reescribimos:

$$(3x)^2 - (9)^2 = 0 \rightarrow (3x - 9)(3x + 9) = 0$$

Paso 3: Resolvemos:

$3x - 9 = 0 \rightarrow x_1 = 3$ o

$3x + 9 = 0 \rightarrow x_2 = -3$

I. $x^2 - 16 = 0$

II. $4x^2 - \frac{1}{9} = 0$

III. $25x^2 - 2 = 0$

IV. $3x^2 - \frac{1}{12} = 0$

d. Mediante factorización de trinomio:

Ejemplo: $5x^2 + 4x - 12 = 0$

Paso 1: Se identifican los factores de $5 \cdot (-12) = -60$ que sumen 4, en este caso, 10 y -6.

54-55

Paso 2: Reescribimos y factorizamos:

$5x^2 + 10x - 6x - 12 =$

$0 \rightarrow 5x(x + 2) - 6(x + 2) =$

$0 \rightarrow (5x - 6)(x + 2) = 0$

Paso 3: Resolvemos:

$5x - 6 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{5}{6}$ o

$x + 2 = 0 \rightarrow x_2 = -2$

I. $-10x^2 - 7x + 12 = 0$

II. $-6x^2 + 7x + 5 = 0$

III. $18x^2 + 17x - 15 = 0$

IV. $6x^2 + 23x + 20 = 0$

4. Determina las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando factorización.

a. $3x^2 - 27 = 0$

b. $4x^2 - 121 = 0$

c. $x^2 - 8x = -12$

d. $100 - 25x^2 = 19$

e. $x^2 - 5x + 6 = 0$

f. $x^2 - 14x + 49 = 0$

g. $x^2 + 4x - 60 = 0$

h. $x(x - 3) = 4$

i. $x^2 - 8x + 3 = x - 5$

j. $5x^2 - 13x = 3x$

¿Qué criterios utilizaste para determinar qué producto notable utilizar en cada caso? Comenta con tu curso.

5. Plantea la ecuación cuadrática para cada situación y resuélvela. Luego, comprueba tus resultados e indica la pertinencia de sus soluciones.

a. El ancho de un cuadro de pintura es 3 metros menos que su largo y su área es 18 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones del cuadro?

b. Dos números sumados dan como resultado 10, pero al multiplicarlos se obtiene –24. ¿Cuáles son dichos números?

c. Rayen construirá su casa en un terreno rectangular de 96 m^2. Para concederle un permiso de construcción le solicitan las dimensiones del terreno. Si el ancho del terreno es seis veces su largo, ¿cuáles son las medidas?

d. Mauricio sabe que las soluciones de una ecuación cuadrática son $x_1 = 5$ y $x_2 = -1$. ¿Cuál puede ser la ecuación cuadrática?

¿Es única la ecuación anterior? ¿Por qué?

▶ Para concluir

a. Describe el proceso general utilizado para resolver una ecuación de segundo grado con factorización. ¿Qué aspectos debes considerar para que la ecuación se pueda factorizar?

b. Considera la ecuación.

$$x^2 + kx - 5 = 0.$$

¿Qué valor debe tener k para que, al factorizar, uno de los factores sea $(x - 5)$?

Resolución de una ecuación de segundo grado por completación de cuadrados

¿Qué es un binomio?

¿Cómo factorizas un cuadrado de binomio?

Objetivo: Resolver ecuaciones cuadráticas mediante completación de cuadrados.

1. Determina en cada caso el valor de k para que la expresión algebraica sea un cuadrado de binomio perfecto.

a. $x^2 + 14x + k$

b. $x^2 - 12x + k$

c. $x^2 - 3x + k$

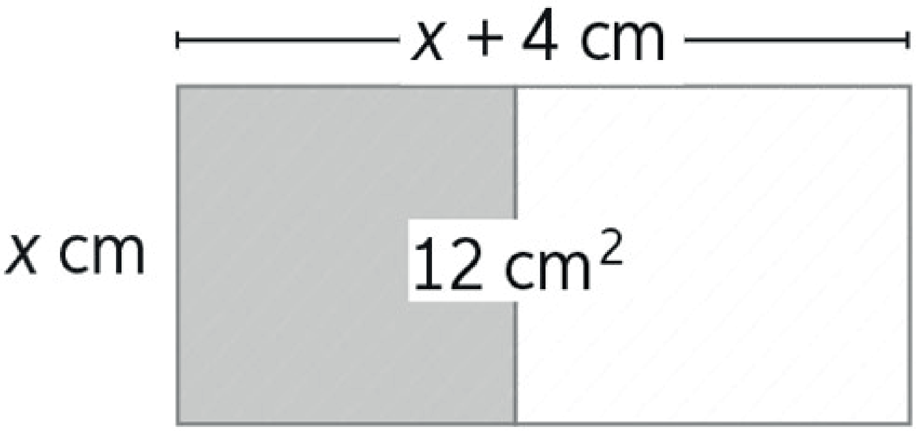
d. $x^2 - 16x + k$

¿Es posible utilizar la misma estrategia para determinar el valor de k en la expresión algebraica $ax^2 + bx + k$? ¿Por qué?

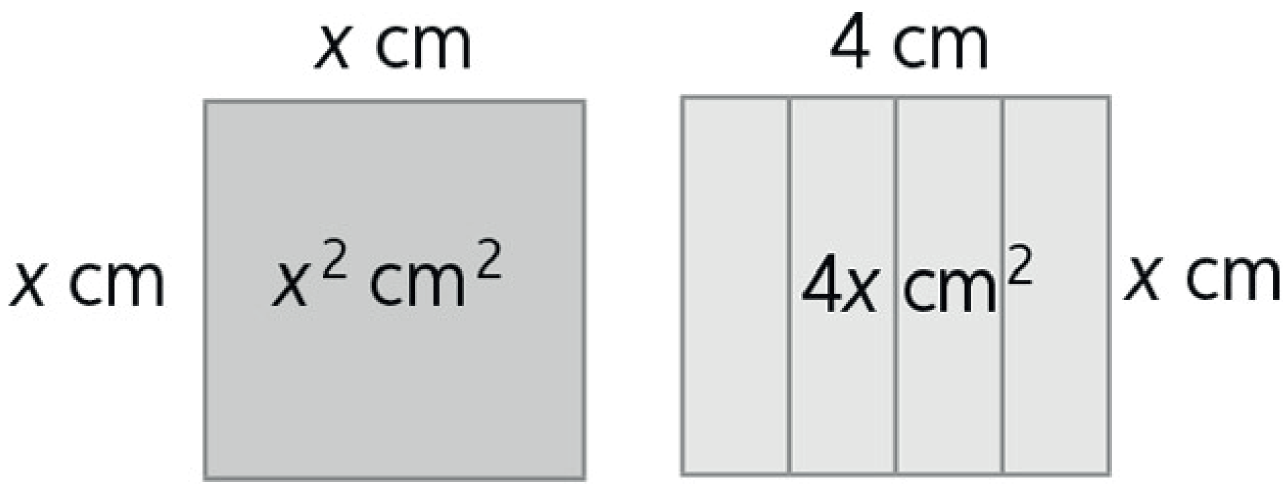
2. Analiza el siguiente procedimiento. Luego, realiza las actividades.

¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo de área 12 cm^2 si uno de sus lados mide 4 cm más que el otro?

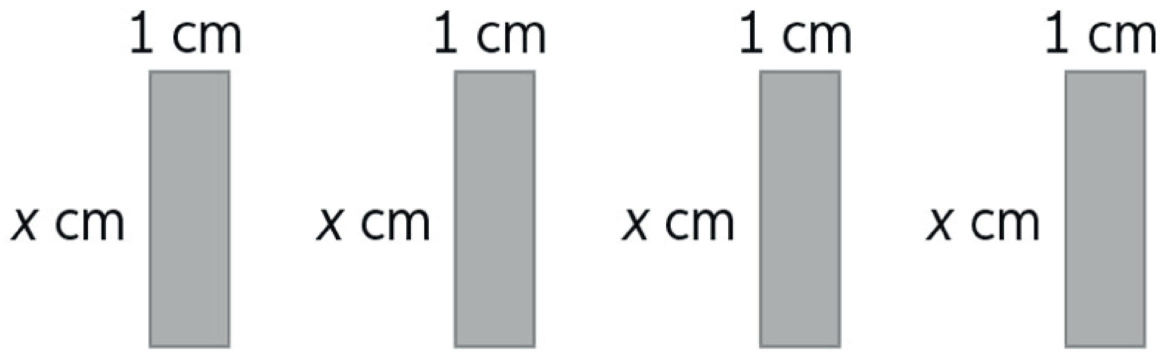
Planteamos:



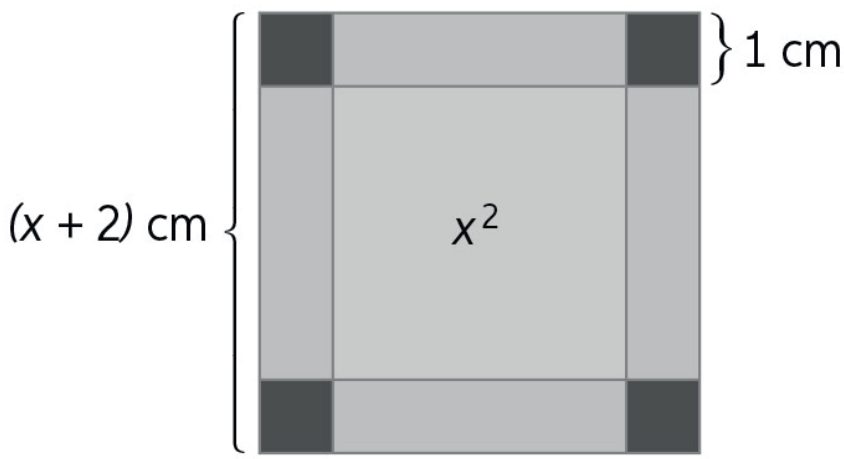
Dividimos la figura:



El rectángulo se vuelve a dividir en 4 rectángulos de lados 1 cm y x cm:



Luego, los acomodamos alrededor del cuadrado de lado x formando la figura:



Finalmente, para completar el área del cuadrado de lado (x + 2) cm debemos agregar 4 cuadrados de lado 1 cm a la figura original.

Algebraicamente tenemos:

$$12 + 4 = (x + 2)2 \rightarrow 16 = (x + 2)^2$$

a. ¿Es posible resolver la ecuación planteada mediante el método de factorización?

b. Describe paso a paso el procedimiento anterior con tus palabras.

c. Desarrolla la expresión final. ¿Es equivalente a la ecuación planteada originalmente?

d. Utilizando la última expresión, determina los valores de x. Luego, responde: ¿cuánto miden los lados del rectángulo?

3. Para resolver la ecuación

$x^2 - 10x + 21 = 0$, Carolina realiza lo siguiente:

Paso 1: $x^2 - 10x = -21$

Paso 2: $x^2 - 10x + 25 = -21 + 25$

Paso 3: $(x - 5)^2 = 4$

Paso 4: $(x - 5)^2 - 2^2 = 0$

$((x - 5) - 2) \cdot ((x - 5) + 2) = 0$

$(x - 5) - 2 = 0$ o $(x - 5) + 2 = 0$

$x - 5 = 2$ o $x - 5 = -2$

$x_1 = 7$ o $x_2 = 3$

a. ¿Por qué en el paso 2 Carolina sumó 25 a ambos lados de la ecuación? ¿cuál fue el propósito?

b. ¿Podría haber resuelto la ecuación utilizando la factorización? Explica.

c. ¿Qué producto notable está involucrado en la resolución? ¿Cuál es su utilidad?

Un método para resolver ecuaciones de segundo grado es utilizar la **completación de cuadrados**. Para ello, sigue estos pasos:

Paso 1: Despejar el término libre de la ecuación.

$$5x^2 - 3x - 2 = 0 \rightarrow 5x^2 - 3x = 2$$

Paso 2: Despeja el término cuadrático del coeficiente a. $5x^2 - 3x = 2 \quad / \cdot \frac{1}{5}$

Paso 3: Completar el cuadrado de binomio sumando a ambos lados el cuadrado de la mitad del coeficiente de *x* para luego factorizarlo.

$$x^2 - \frac{3}{5}x = \frac{2}{5}$$ /Se suma $\frac{9}{100}$ para formar $\left(x - \frac{3}{10}\right)^2$

$$x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{9}{100} = \frac{2}{5} + \frac{9}{100}$$ / Factorizando:

$$\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{49}{100}$$

Paso 4: Encontrar las soluciones de la ecuación mediante la factorización considerando el cuadrado de binomio como uno de los términos.

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, considerando el cuadrado de binomio como uno de los términos.

$$\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 = \left(\frac{7}{10}\right)^2 = 0$$

$$\left(\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 = \left(\frac{7}{10}\right)\right) \cdot \left(\left(x - \frac{3}{10}\right) = \left(\frac{7}{10}\right)\right) = 0$$

$$x - \frac{3}{10} - \frac{7}{10} = 0 \quad \text{o} \quad x - \frac{3}{10} + \frac{7}{10} = 0$$

$$x - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} \quad \text{o} \quad x - \frac{3}{10} = -\frac{7}{10}$$

$$x_1 = 1 \quad \text{o} \quad x_2 = -\frac{2}{5}$$

¿Qué otro procedimiento puedes utilizar en reemplazo de los pasos 3 y 4?

4. Determina las soluciones de las siguientes ecuaciones mediante la completación de cuadrados:

a. $3x^2 + 3x - 6 = 0$

b. $4x^2 + x = 3$

c. $4x - 4x^2 + 3 = 0$

d. $9x^2 - 6x = 0$

e. $12x^2 - 5 + 4x = 0$

f. $x^2 - 10x - 65 = 0$

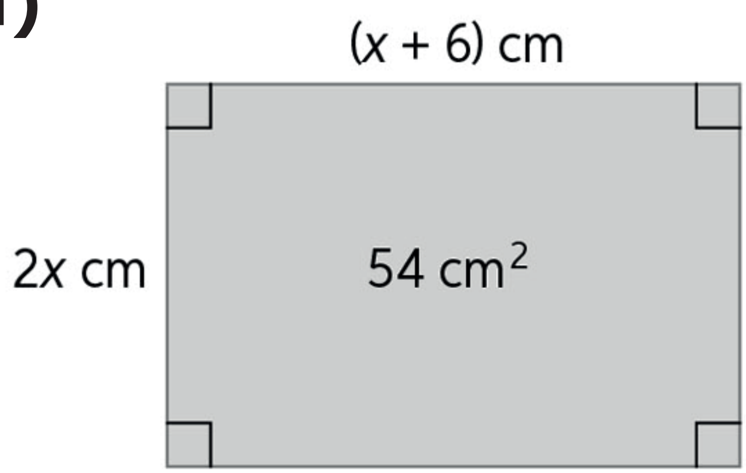
g. $6x^2 - 3 = 16x + 5$

h. $(2x^2 + 5) - (3x + 2) = 6$

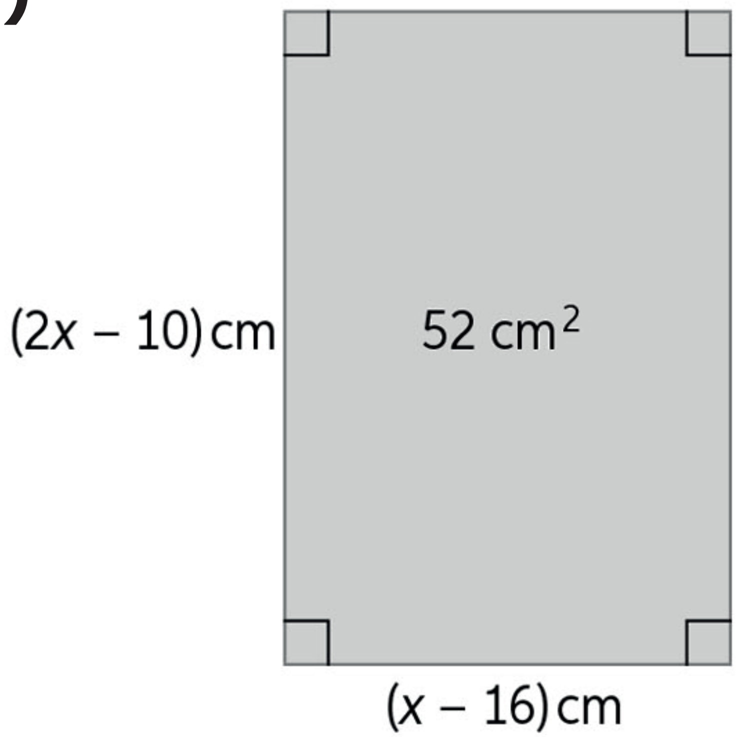
5. Algunas ecuaciones, como $x^2 - 4x + 5 = 0$, no pueden ser factorizadas luego de formar el cuadrado de binomio. Desarrolla la expresión y explica a qué se debe.

6. Plantea la ecuación correspondiente a cada figura. Luego, determina el valor de x mediante el método de completación de cuadrados.

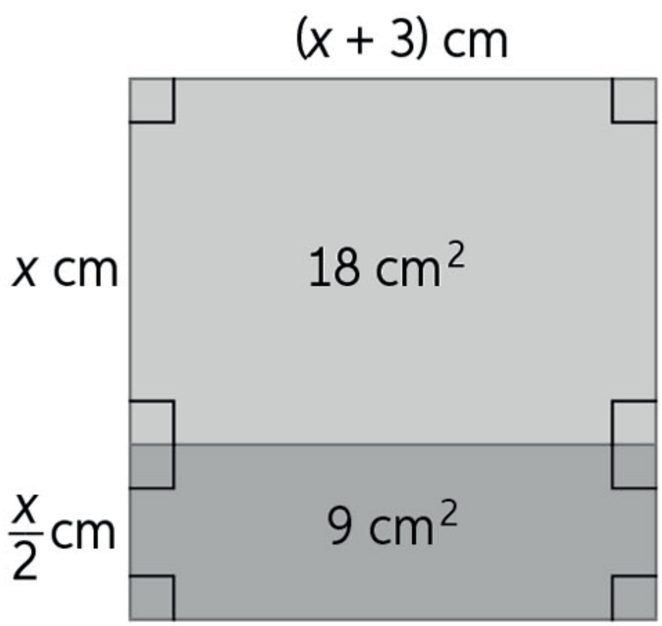
a)



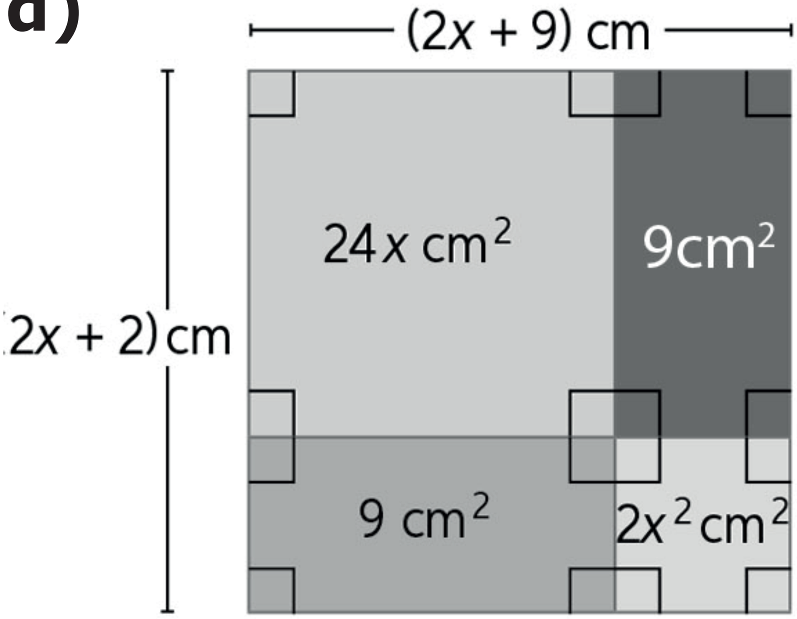
b)


$(2x - 10)$ cm
52 cm^2
$(x - 16)$ cm

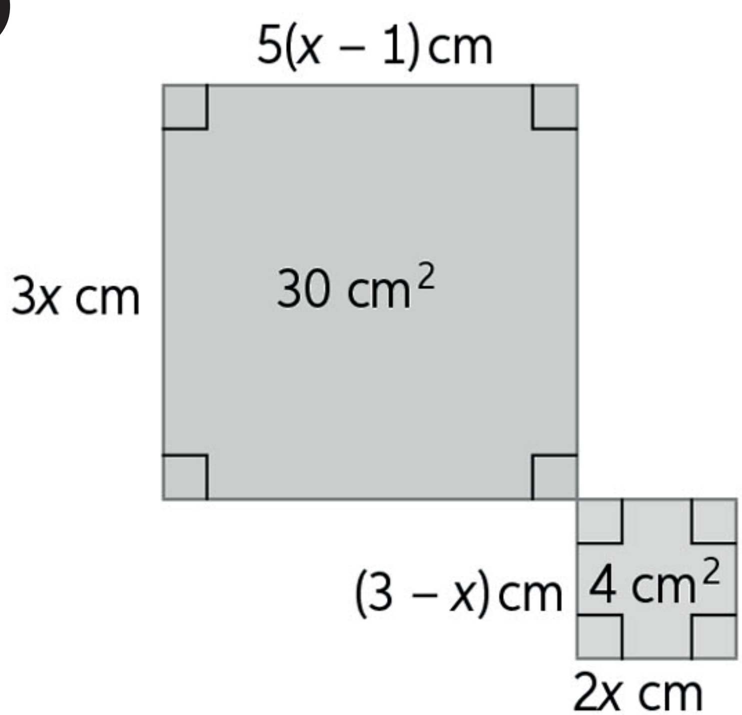
c)


$(x + 3)$ cm
x cm
18 cm^2
$\frac{x}{2}$ cm
9 cm^2

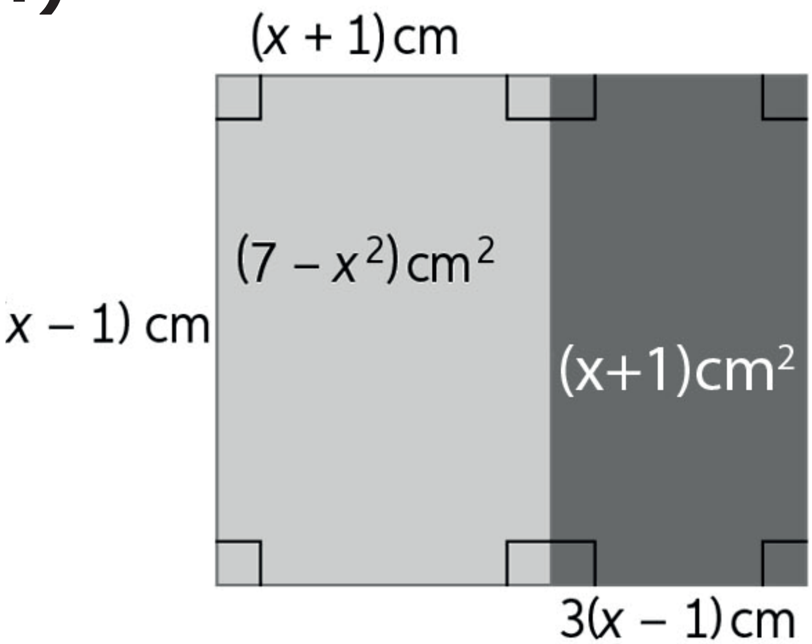
d)


(2x + 9) cm
(2x + 2) cm
24x cm²
9cm²
9 cm²
2x² cm²

e)


5(x – 1) cm
3x cm
30 cm²
(3 – x) cm
4 cm²
2x cm

f)



▶ Para concluir

a. ¿Qué método te parece más útil para resolver las ecuaciones de segundo grado? ¿Por qué? Comparte tu respuesta con tu curso.

b. ¿Es posible resolver todas las ecuaciones con este método?

Resolución de una ecuación de segundo grado por fórmula general

¿Se puede aplicar el método de completación de cuadrado a cualquier ecuación de segundo grado? ¿Por qué?

¿Qué características crees que tienen las ecuaciones sin solución en reales?

Objetivo: Resolver ecuaciones cuadráticas mediante fórmula general.

1. Analiza los siguientes pasos para resolver la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad / \cdot \frac{1}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \longrightarrow \quad x^2 + 2\frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a. ¿A qué estrategia de resolución corresponden los pasos anteriores?

b. ¿Qué operaciones se realizaron para llegar a la fórmula final?

c. ¿Por qué se agrega el signo $\pm$ a $\sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$?

d. ¿Cuáles son las soluciones x_1 y x_2 obtenidas de la fórmula?

2. Identifica los coeficientes de las ecuaciones y resuelve utilizando la fórmula anterior. Guíate por el ejemplo:

Ejemplo: $3x^2 - 5x + 1 = 0$ Identificamos los coeficientes de la ecuación: $a = 3$, $b = -5$ y $c = 1$

Reemplazamos los valores:

$$\frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} =$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Se obtienen las soluciones:

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{6} \qquad x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$$

a. $12x^2 + 3x - 5 = 0$

b. $6x^2 + 3x - 1 = 0$

c. $12x - 5 = -4x^2$

d. $14x^2 - 8 = 0$

e. $a^2 + 48a + 576 = 0$

f. $6b^2 - 4b - 2 = 0$

g. $x^2 + 6x = 27$

h. $1 + 9x^2 = 6x$

i. $10x^2 + 31x - 14 = 0$

j. $9 = 7x^2 - 2x$

En toda ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, es posible obtener sus soluciones mediante la fórmula general:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3. Resuelve la ecuación $x^2 + 7x + 12 = 0$ utilizando factorización, completación de cuadrados y fórmula general. Luego, realiza las actividades.

a. Compara los resultados obtenidos por cada método. ¿Qué puedes concluir sobre ellos?

b. ¿Cuál de los métodos te resultó más fácil de utilizar en este caso? ¿Por qué?

4. Considera las ecuaciones cuadráticas:

Ecuación 1: $\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{24}x - \frac{1}{4} = 0$

Ecuación 2: $x^2 - \frac{5}{6}x - 1 = 0$

a. Resuélvelas mediante la fórmula general.

b. ¿Cómo son las soluciones de ambas ecuaciones? ¿A qué se debe? Explica con tus palabras.

c. Crea otra ecuación equivalente y resuélvela.

5. Aplica la fórmula general a las siguientes ecuaciones. Luego, responde.

a. $2x^2 - 5x - 3 = 0$

b. $5x^2 - 10x + 5 = 0$

c. $3x^2 + 5x + 4 = 0$

d. ¿Qué tipo de soluciones tiene cada una de las ecuaciones anteriores?

Recuerda que las soluciones pueden ser:

- Reales iguales
- Reales distintas
- No pertenecen a reales

e. ¿Qué parte de la fórmula general es la que discrimina los tipos de soluciones?

f. ¿Qué condiciones debe cumplir a, b y c para que tengan soluciones reales?

El discriminante (Δ) de una ecuación cuadrática de fórmula general $ax^2 + bx + c = 0$ es:

$$\triangle = b^2 - 4ac$$

Mediante el valor del discriminante de una ecuación cuadrática, es posible determinar la existencia de las soluciones. Se pueden dar tres casos:

$\triangle > 0$: La ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

$\triangle = 0$: La ecuación tiene dos soluciones reales iguales.

$\triangle < 0$: La ecuación no tiene solución en los reales.

6. Calcula el discriminante y determina el tipo de solución de las ecuaciones.

Ejemplo: $3x^2 - 5x - 2 = 0$

Identificamos los coeficientes de la ecuación: $a = 3$, $b = -5$ y $c = 2$.

Determinamos el discriminante:

$\triangle = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 - 24 = 1.$

Respondemos: $\triangle = 1$ y la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

a. $21 + 27x^2 = 0$

b. $16x^2 + 16x = -4$

c. $6x^2 + 11x + 3 = 0$

d. $3x - 4x^2 - 5 = 0$

e. $\frac{6}{5}x^2 + 1 = \frac{x}{2}$

f. $x^2 + 3x - 10 = 0$

g. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{4} = -\frac{4}{9}x^2$

7. Determina el valor de m para que las siguientes ecuaciones cuadráticas cumplan con las condiciones pedidas:

Ecuación 1: $4x^2 + 4x + m = 0$

Ecuación 2: $2x^2 + m^2 = 3mx$

Ecuación 3: $2mx^2 - 3mx + 7 = 0$

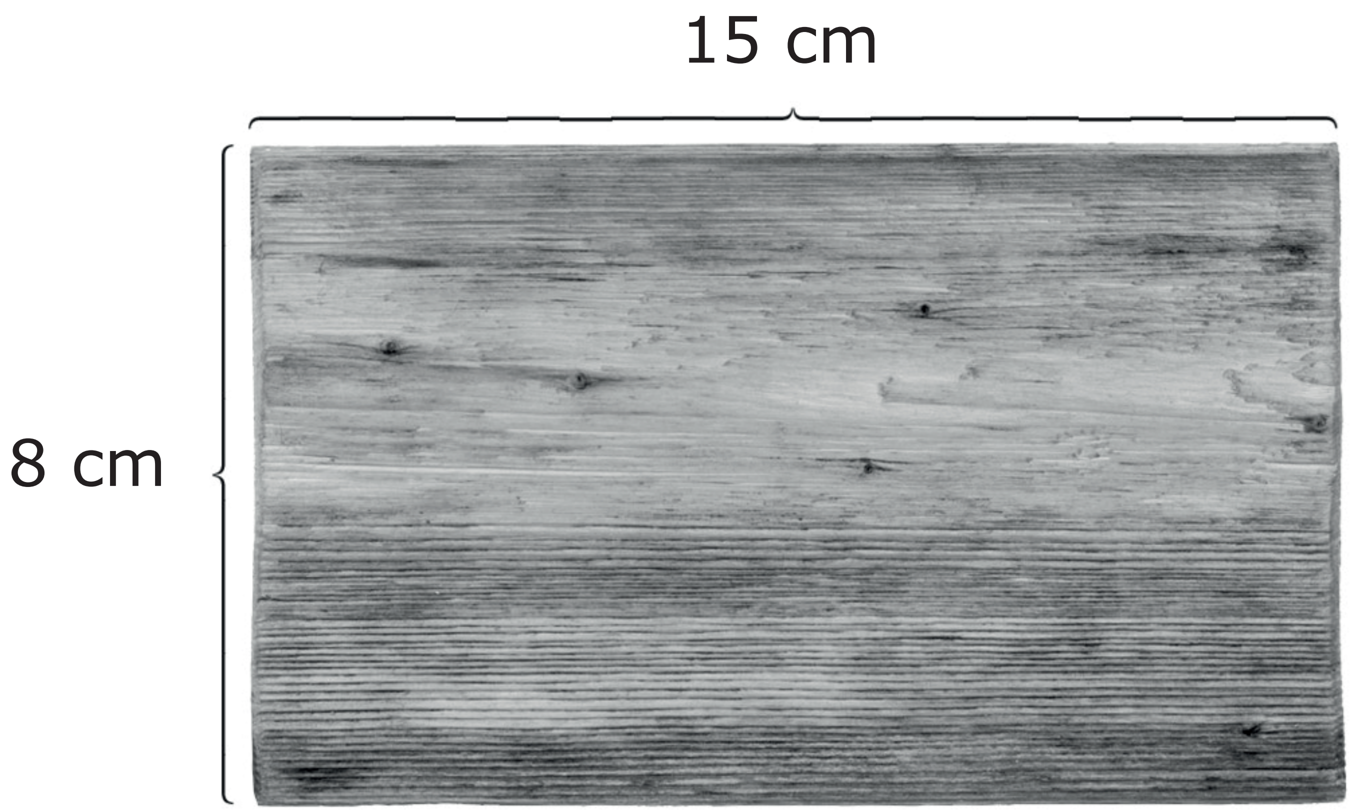
Ecuación 4: $mx^2 + (m + 1)x + \frac{m}{2} = 0$

a. No tenga solución.

b. Tenga dos soluciones reales e iguales.

c. Tenga dos soluciones reales y distintas.

8. Se tiene un trozo de madera de forma rectangular como el de la imagen. Se quiere cortar x cm de largo y ancho tal que la diagonal del rectángulo sea 4 cm menor.



a. ¿Cuál es la ecuación que modela el problema?

b. ¿En cuántos centímetros se debe cortar el largo y el ancho para obtener esta medida?

c. ¿En cuánto se reduce el área?

Actividades de profundización

9. Analiza la siguiente proposición. Luego, realiza las actividades.

Si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, se cumplen las propiedades:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

a. Selecciona o crea dos ecuaciones (con solución en reales) y comprueba las propiedades anteriores.

b. Utilizando que $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

y $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ demuestra las propiedades anteriores.

c. Crea una ecuación en que la suma sea 0 y el producto de sus raíces sea –1.

En parejas, comparen el resultado de la actividad anterior. ¿Utilizaron la misma estrategia para crear la ecuación? ¿Crearon la misma ecuación?

▶ Para concluir

a. ¿Cómo podrías determinar el método más conveniente para resolver cada caso?

b. ¿Qué característica debe tener el discriminante para que las soluciones sean números racionales? ¿Y para que sean irracionales?

Antes de continuar: Evaluación intermedia

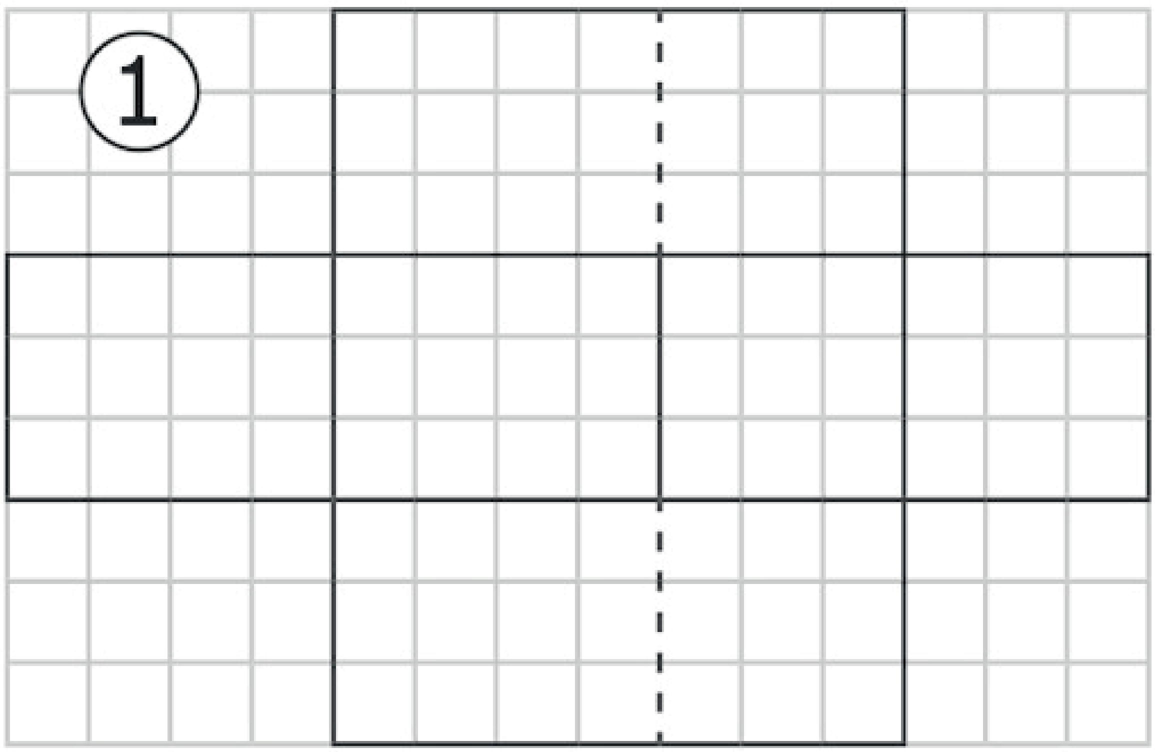
Papel, flechas y ecuaciones cuadráticas

A continuación, construirás un material para identificar los distintos tipos de ecuaciones cuadráticas (en función del valor de sus coeficientes) y su resolución.

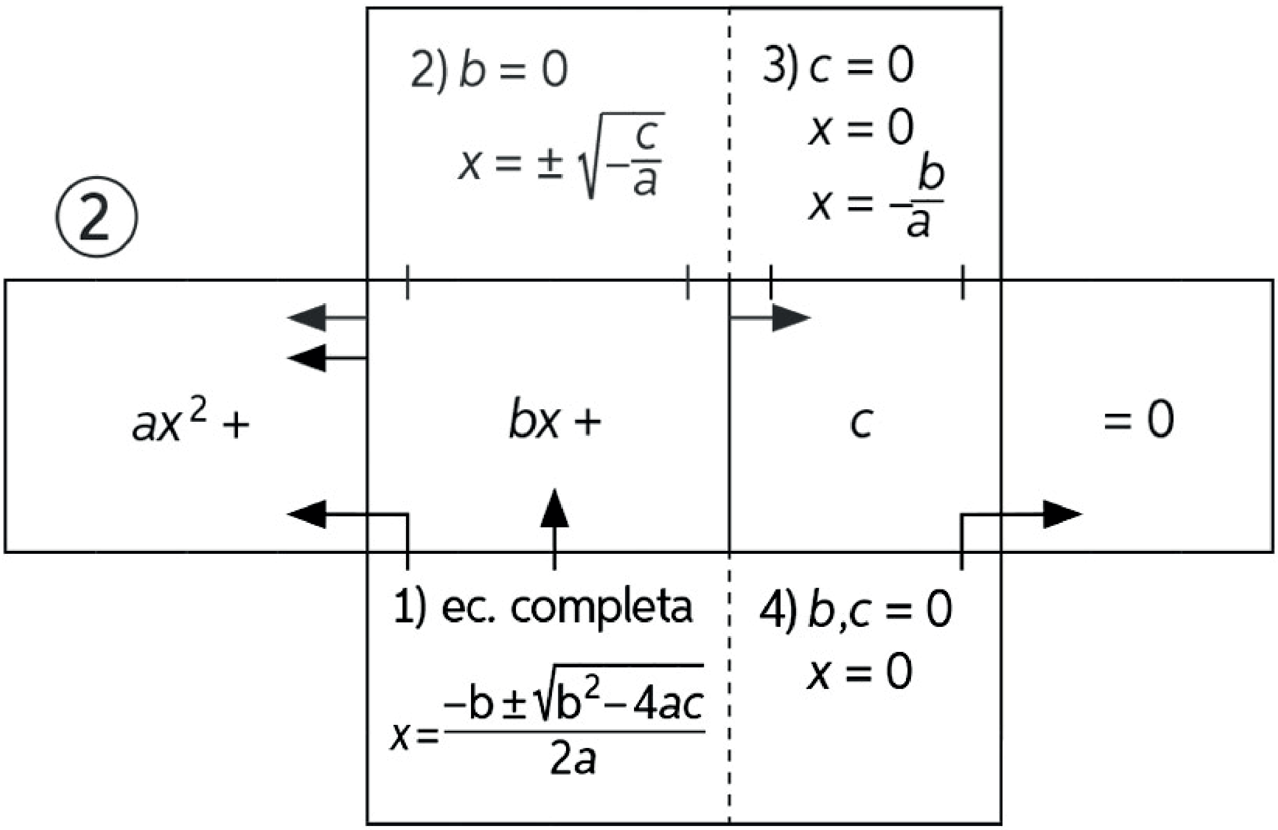
Materiales:

- Cartulina o papel lustre de colores.
- Plumones.
- Lápices de colores.
- Tijeras.
- Pegamento.

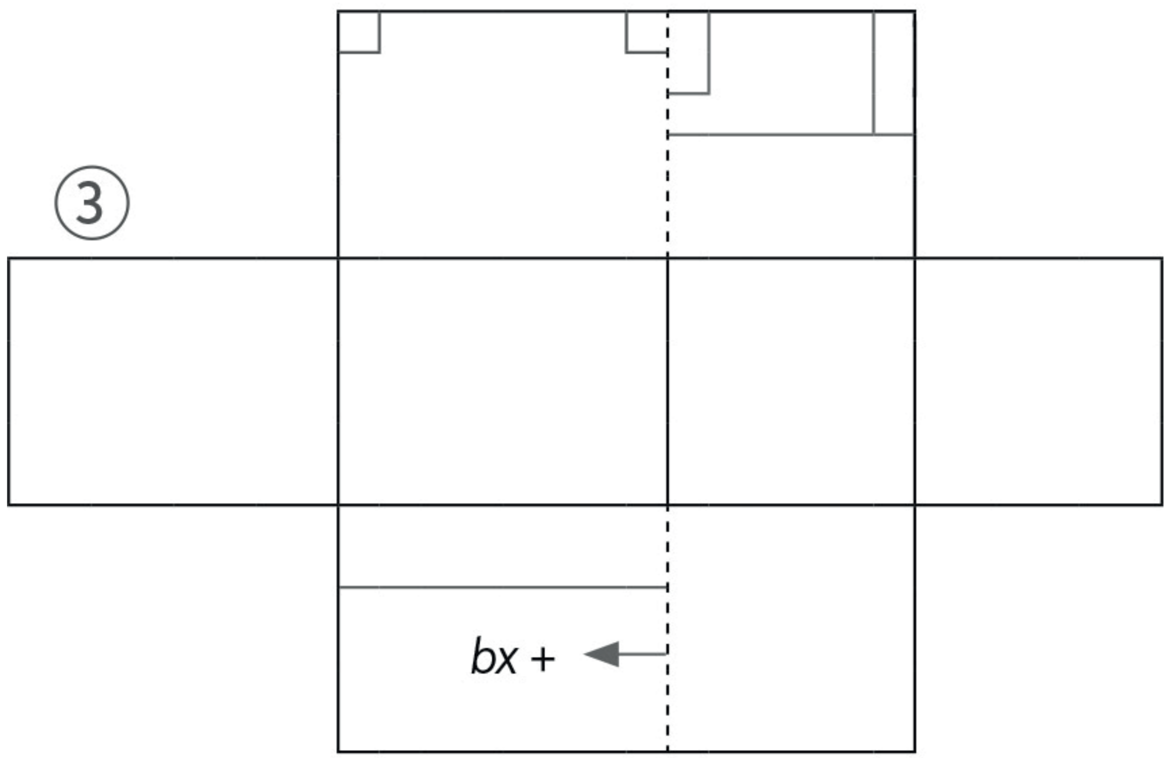
Paso 1: corta un trozo de cartulina con el diseño 1, respetando las proporciones de la cuadrícula en cada cuadrado y rectángulo. Asegúrate de cortar también las líneas para crear pestañas.



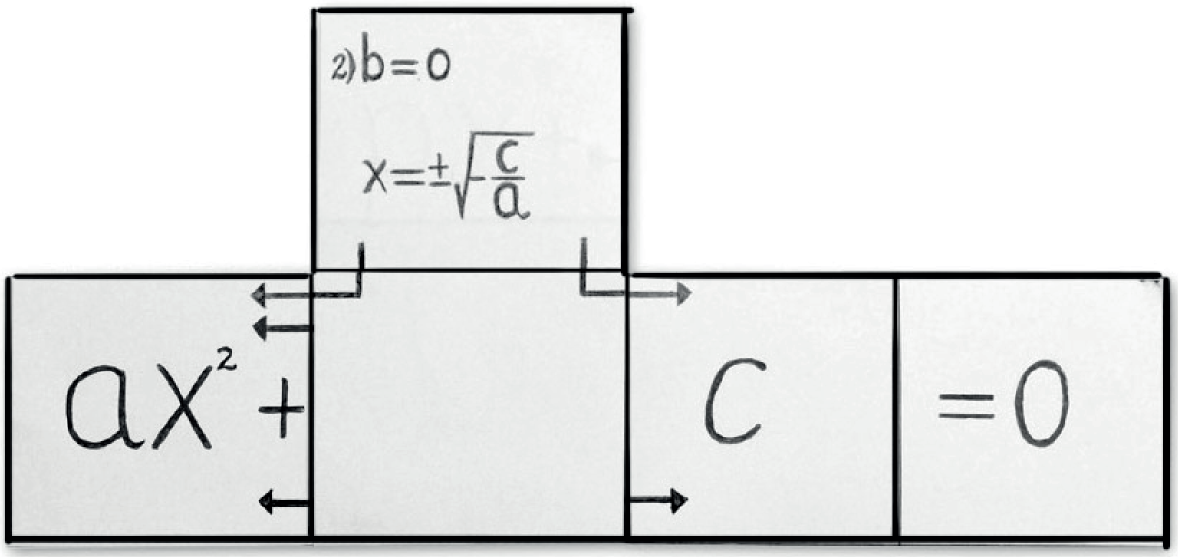
Paso 2: Cuidando siempre de utilizar el mismo código de colores, dibuja por el frente de la pieza el diseño 2.

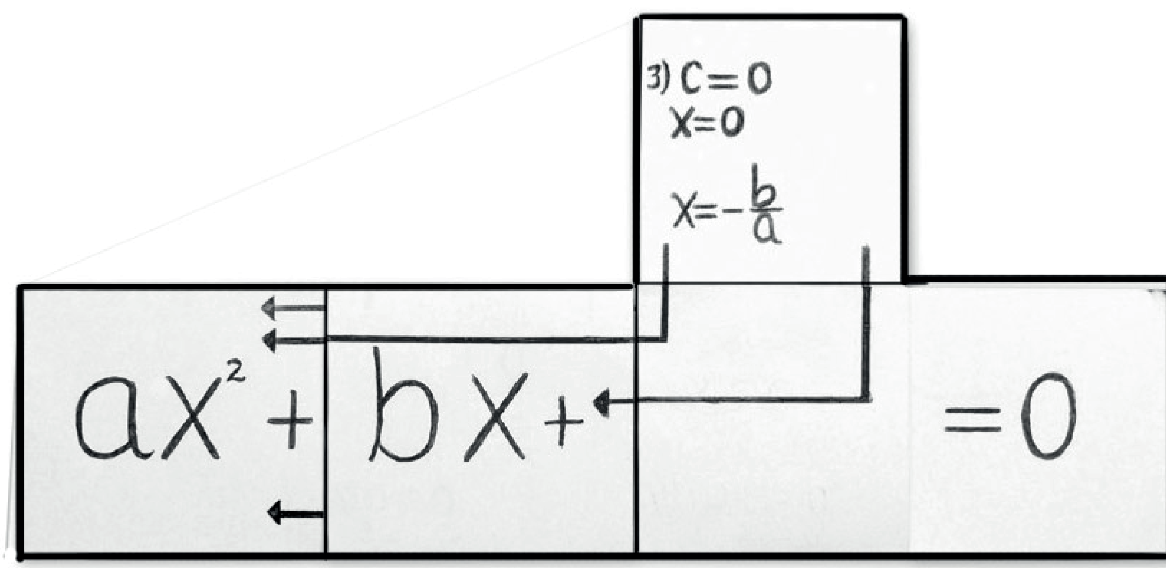


Paso 3: Da vuelta la pieza hacia abajo, de modo que la cara “= 0” siga a la derecha. Luego, dibuja por el revés de la pieza el diseño 3.



Paso 4: Ahora, dobla las pestañas convenientemente para mostrar cada caso (1, 2, 3 o 4). Guíate por las siguientes fotografías:





Utilizando el material, guíate para identificar y resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a. $x^2 - 1 = 0$

b. $x^2 - 2x + 1 = 0$

c. $3x^2 - 12x = 0$

d. $20 - 2x^2 + 3x = 0$

e. $x^2 = 9$

f. $8x^2 - 3x = 0$

▶ Reflexiono

a. Identifica los problemas que podrías tener al construir este material.

b. ¿Crees que este material te permitirá trabajar mejor las ecuaciones?

Lección 6: Funciones de segundo grado

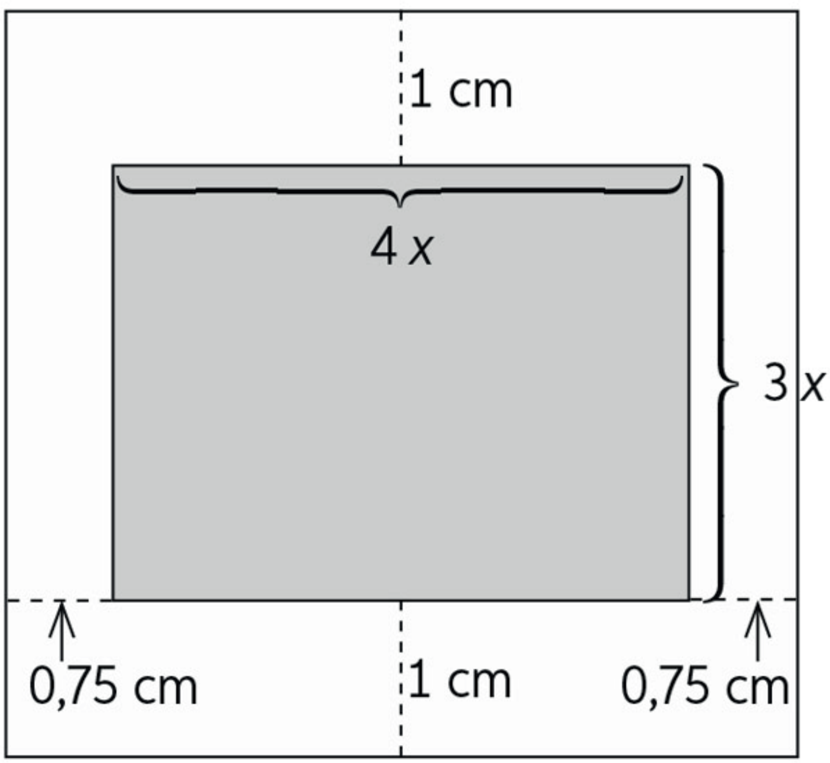
Función cuadrática

¿Qué es una función? ¿Qué la diferencia de una ecuación? Explica con tus palabras.

¿Qué es una función lineal? ¿y una función afín?

Objetivo: Identificar la función cuadrática y sus componentes.

1. Analiza la siguiente situación y responde: Se quiere pintar un cuadro cuyos lados están en la razón 4:3. El área total incluyendo el borde del marco está dado por:



Total vertical:

$3x + 2$

Total horizontal:

$4x + 1,5$

Área total: $A_t = (3x + 2)(4x + 1,5)$

$$A_t = 12x^2 + \frac{25}{2}x + 3$$

a. Completa la siguiente tabla en tu cuaderno:

x	Largo	Ancho	Área
1			
2			
3			
4			
5			

b. Si el área total es de 27,5 cm^2, ¿cuáles serán las medidas de los lados de la viñeta?

c. El precio fijado es $1.000 por cm^2 de ilustración. ¿Qué cambios es necesario realizar en la fórmula?

d. ¿Cómo describirías el crecimiento del área a medida que aumenta el valor de x? ¿Y el del precio por ilustración?

Se llama **función cuadrática** o de **segundo grado** a las funciones de la forma:

$f(x) = ax^2 + bx + c$,

con a, b y $c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Donde a, b y c corresponden a los coeficientes de la función. El dominio de la variable x de la función es $\mathbb{R}$, mientras que su recorrido es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Por ejemplo: $g(x) = 2x^2 + 2x + 0,5$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y recorrido los reales mayores o iguales a 0.

2. Identifica si las expresiones corresponden a funciones cuadráticas. Justifica.

a. $f(x) = 3x - 2$

b. $g(x) = 2x^3 - 4$

c. $h(x) = (5x - 2)(-3)$

d. $i(x) = (2x + 3)(x + 1)$

e. $j(x) = (x + 2)(3x - 1)$

f. $k(t) = 12\sqrt{t} - 1$

3. Considera las funciones y sus coeficientes para completar la siguiente tabla en tu cuaderno.

Función	a	b	c
$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$			
	2	5	16
$t(x) = (4x - 1)(2x + 3)$			

4. En cada una de las funciones, calcula la imagen para $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 0$ y $x = -1$.

Recuerda que:

- preimagen: valor de x.
- imagen: valor de y.

a. $f(x) = 12x^2 - 3x - 1$

b. $g(x) = x^2 - 5x + 1$

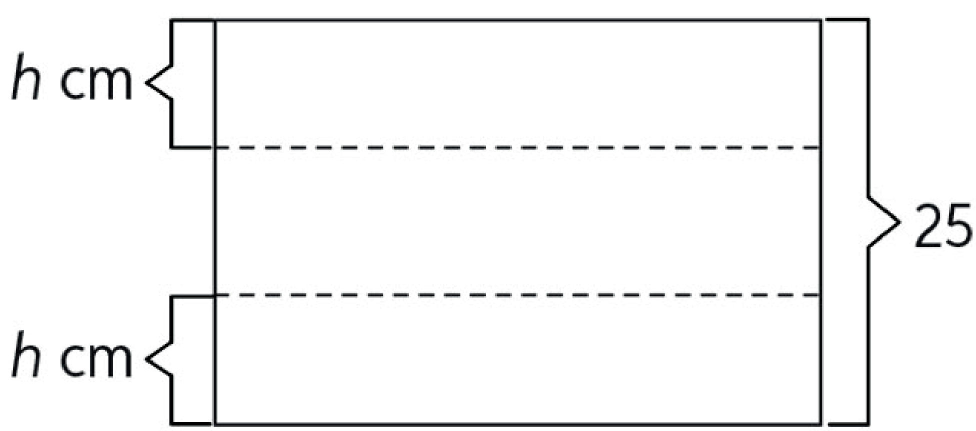
c. $a(x) = 4x^2 - 6x + 1$

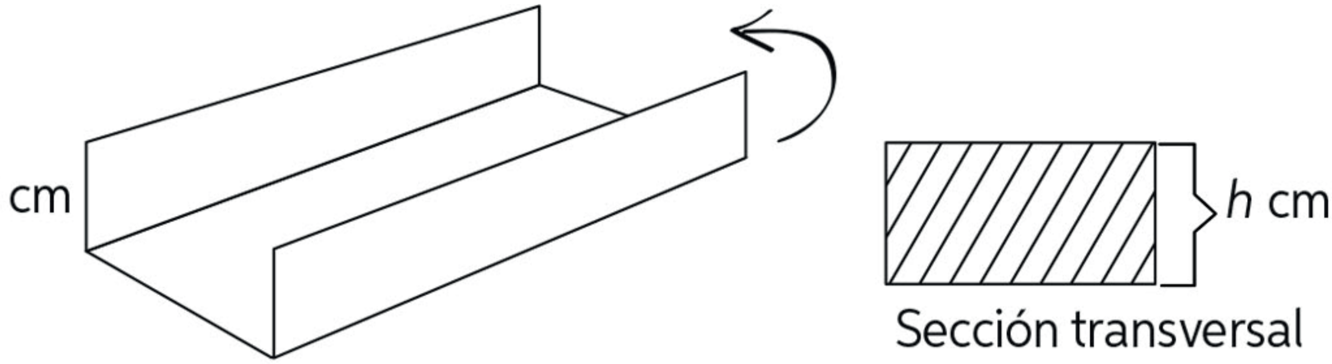
d. $\underline{h}(x) = (7x - 2)(9 - 3x)$

Actividades de profundización

5. Analiza la siguiente situación y responde.

Se quiere construir una canaleta con una lámina de aluminio de 25 centímetros de ancho. Para ello, se la doblará h cm en ambos lados, como se muestra en la imagen.





a. ¿Cuál es la expresión para el área de la sección transversal de dicha canaleta en función de su altura h?

b. ¿Qué valores puede tomar h para que el área de la sección transversal sea 75 cm^2?

c. ¿Entre qué intervalo de valores se encuentra h? Discute con tu curso.

▶ Para concluir

a. Explica con tus palabras: ¿Qué relación existe entre función y ecuación cuadráticas?

b. ¿Cuál es la importancia de corroborar los resultados al resolver una ecuación de segundo grado?

Representación de una función cuadrática

¿Cuáles son las variables dependientes e independientes de una función?

¿Qué pasos realizas para graficar una función lineal?

Objetivo: Representar la función cuadrática en el plano cartesiano.

1. Analiza el siguiente contexto. Luego, realiza las actividades.

Fernanda y Rodrigo practican con su patineta en la rampa de un parque. Sus velocidades (en m/s) en función del tiempo s (medido en segundos) se representan por las funciones:

$v_F(t) = -t^2 + 4t$

$v_R(t) = -t^2 + 3t$

a. Completa las tablas de datos para cada función.

t	$v_F(t)$
0	
1	
2	
3	
4	

t	$v_R(t)$
0	
1	
2	
3	
4	

b. Grafica los datos de las tablas anteriores en un plano cartesiano. Ubica la variable tiempo (segundos) en el eje X y la variable velocidad (v) en el eje Y.

c. ¿Para qué valores de t se cumple v(t) = 0? ¿cómo lo interpretarías según el contexto del problema?

d. ¿Qué forma tienen las gráficas anteriores? ¿Cómo trazarías el resto de la función?

e. Según la gráfica anterior, ¿cuál es la mayor velocidad que alcanza cada uno? ¿Tiene alguna relación con los parámetros de cada ecuación?

Para comprobar.
gbit.cl/T21M2MP065A

2. Construye una tabla de datos para cada función. Identifica 5 puntos (x, y) de cada una y luego grafícalos en tu cuaderno.

a. $f(x) = -x^2 + 1$ para $0 \leq x \leq 5$.

b. $g(x) = x^2 + 2x$ para $-3 \leq x \leq 3$.

c. $h(x) = -2x^2 + 3x - 2$ para $-2 \leq x \leq 4$.

d. $i(x) = -4x^2 + 4x - 2$ para $-5 \leq x \leq 5$.

e. $j(x) = 5x^2 + 10x - 15$ para $-5 \leq x \leq 5$.

f. $k(x) = -3x^2 + 6x + 9$ para $-5 \leq x \leq 5$.

g. Une los puntos y responde ¿”se abren” hacia arriba o hacia abajo las curvas? ¿Qué relación existe entre lo anterior y el coeficiente a de cada función?

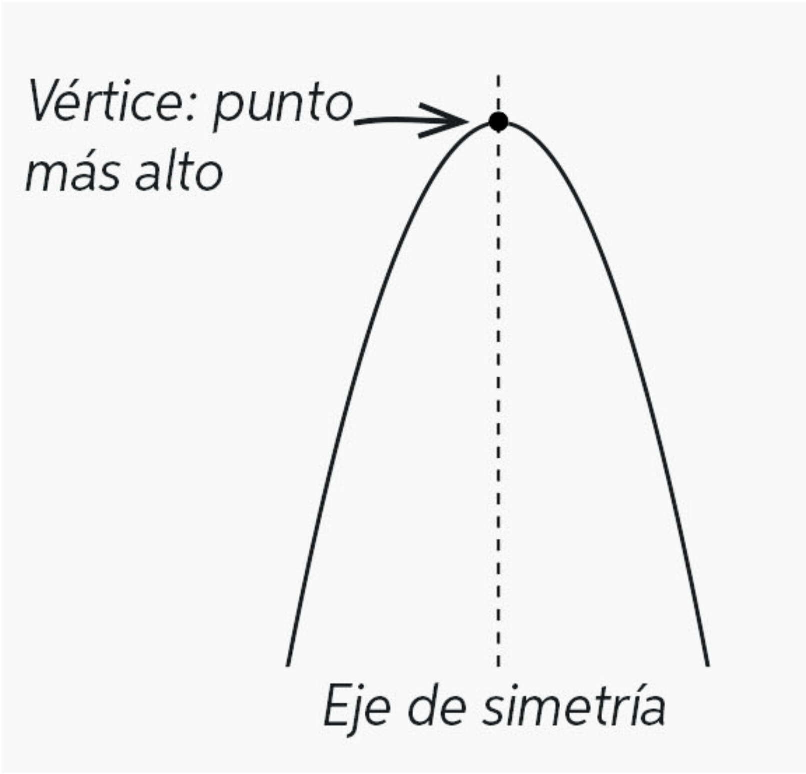
h. ¿Cuál es el dominio y recorrido de cada función?

El gráfico de una función cuadrática se representa mediante una parábola. Esta curva cumple con lo siguiente:

- Tiene un vértice, que corresponde a su punto más alto o más bajo.
- Es simétrica respecto del eje Y o a una recta paralela a esta, llamada **eje de simetría**.

Su concavidad está determinada por el coeficiente a de la función.

- Si a > 0, la gráfica es cóncava hacia arriba o convexa.
- Si a < 0, la gráfica es cóncava hacia abajo.



Por ejemplo:

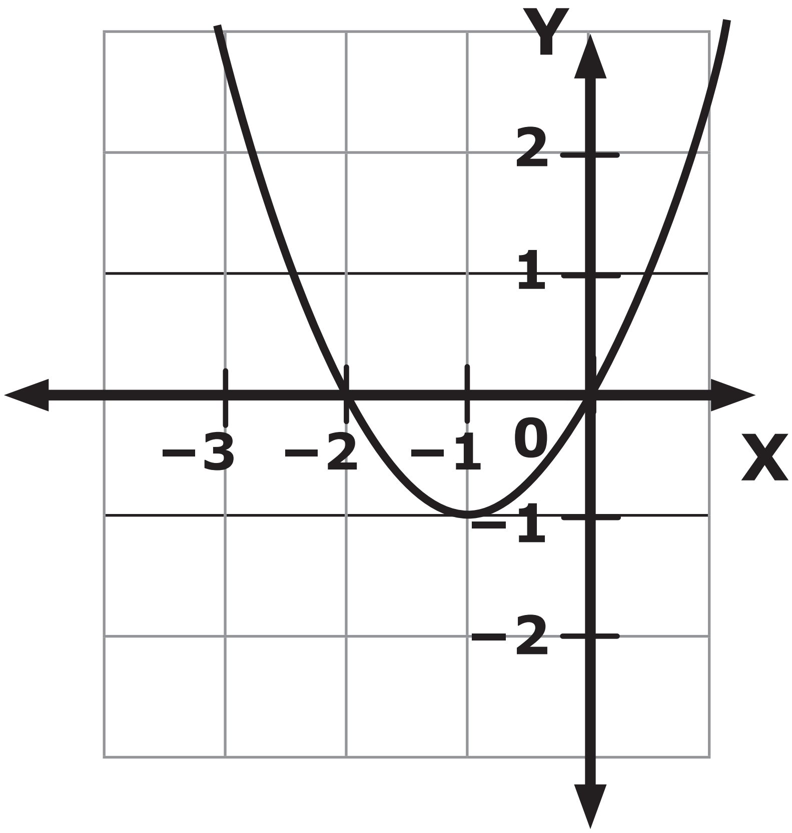
$f(x) = x^2 + 4x + 1$

Identificamos el vértice $(-2, -3)$ y el valor de $a = 1$. Cómo $a > 0$, la función es cóncava hacia arriba y el vértice corresponde al punto más bajo.

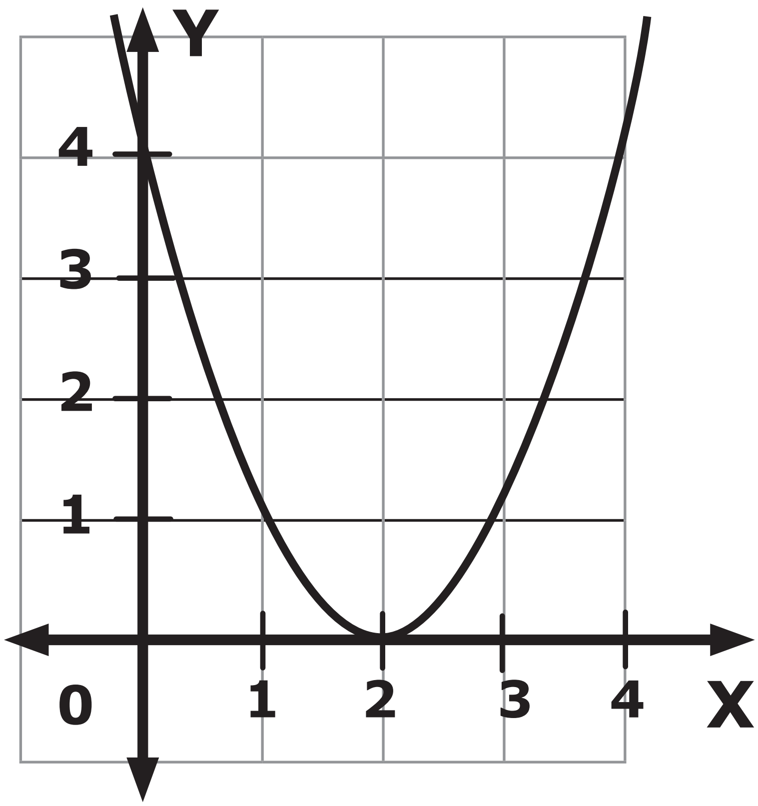
¿Fue acertada tu deducción en la actividad g? ¿Qué debes corregir?

3. Analiza las siguientes gráficas:

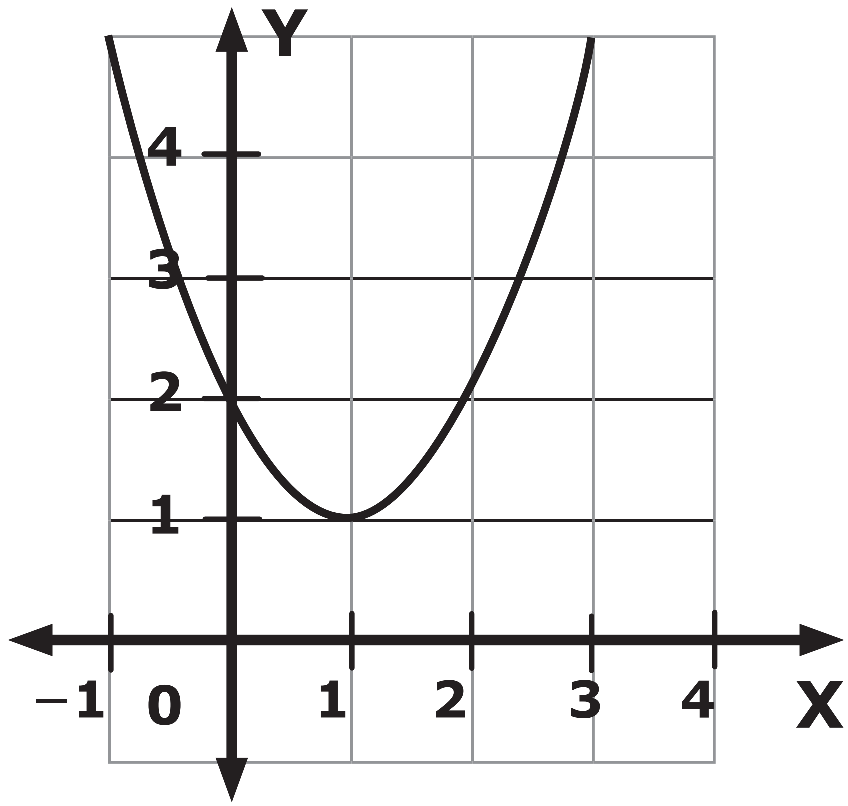
I. $f(x) = x^2 + 2x$



II. $g(x) = x^2 + 4x + 4$



III. $h(x) = x^2 - 2x + 2$



a. Construye una tabla para cada una de las funciones. Identifica al menos 4 puntos que pertenezcan a la función.

b. ¿En qué puntos intersecan el eje X?, ¿y el eje Y?

c. Reemplaza en las ecuaciones el valor x = 0 y obtén los puntos (0, f(0)), (0, g(0)) y (0, h(0)). ¿A qué corresponden gráficamente?

d. Obtén los discriminantes de las ecuaciones $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ y $h(x) = 0$. ¿Cómo se relacionan sus discriminantes con la cantidad de puntos en que las funciones intersecan el eje X?

El gráfico de una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ siempre interseca el eje Y en el punto (0, c).

Además, al asociar una ecuación de segundo grado a una función cuadrática, las soluciones corresponden a los puntos en que la gráfica de la función interseca el eje X. Esto, dependiendo del valor del discriminante (Δ). Estas soluciones también se conocen como “raíces” o “ceros” de la función. Se observan tres casos al respecto:

- $\Delta > 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1 \neq x_2$, el gráfico de la función interseca el eje X en los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.

- $\Delta = 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1 = x_2$, el gráfico de la función interseca el eje X en $(x_1, 0)$.
- $\Delta < 0 \Rightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$ y el gráfico de la función no interseca el eje X.

¿Fue acertada tu reflexión en las actividades c y d? ¿Qué debes corregir?

Física

4. La altura de una pelota que encesta en el aro de básquetbol es modelada por la ecuación:

$h(t) = -10t^2 + 10t + 1{,}5$; donde t es el tiempo.

a. Construye una tabla de valores y grafica los datos en un plano cartesiano.

Puedes ayudarte ingresando la función en GeoGebra u otro software.

b. ¿Cuál fue la mayor altura que alcanzó la pelota?

c. ¿En qué punto(s) interseca(n) la función en el eje X? ¿y en el eje Y?

d. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola?

e. ¿Cuál es el dominio y recorrido de la función?

f. ¿Qué ecuación es necesario resolver para determinar el momento en el que la pelota alcanza la altura del aro? plantéala y resuelve.

g. ¿Cuál de los dos resultados es adecuado para el contexto? ¿Por qué?

Las coordenada x del vértice *V* de una parábola cuya función es

$f(x) = ax^2 + bx + c$ corresponde a las coordenadas $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. De manera abreviada: $V(h, k)$, donde $h = \frac{b}{2a}$ y $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. Su eje de simetría es la recta $x = -\frac{b}{a}$.

5. Identifica el tipo de concavidad, vértice, eje de simetría e intersección con los ejes. Luego, deduce y bosqueja su gráfica utilizando la información obtenida.

a. $f(x) = x^2$

b. $g(x) = -x^2 + 9$

c. $h(x) = 6x^2 - 4x - 8$

d. $p(x) = -(x + 1)^2 + 2$

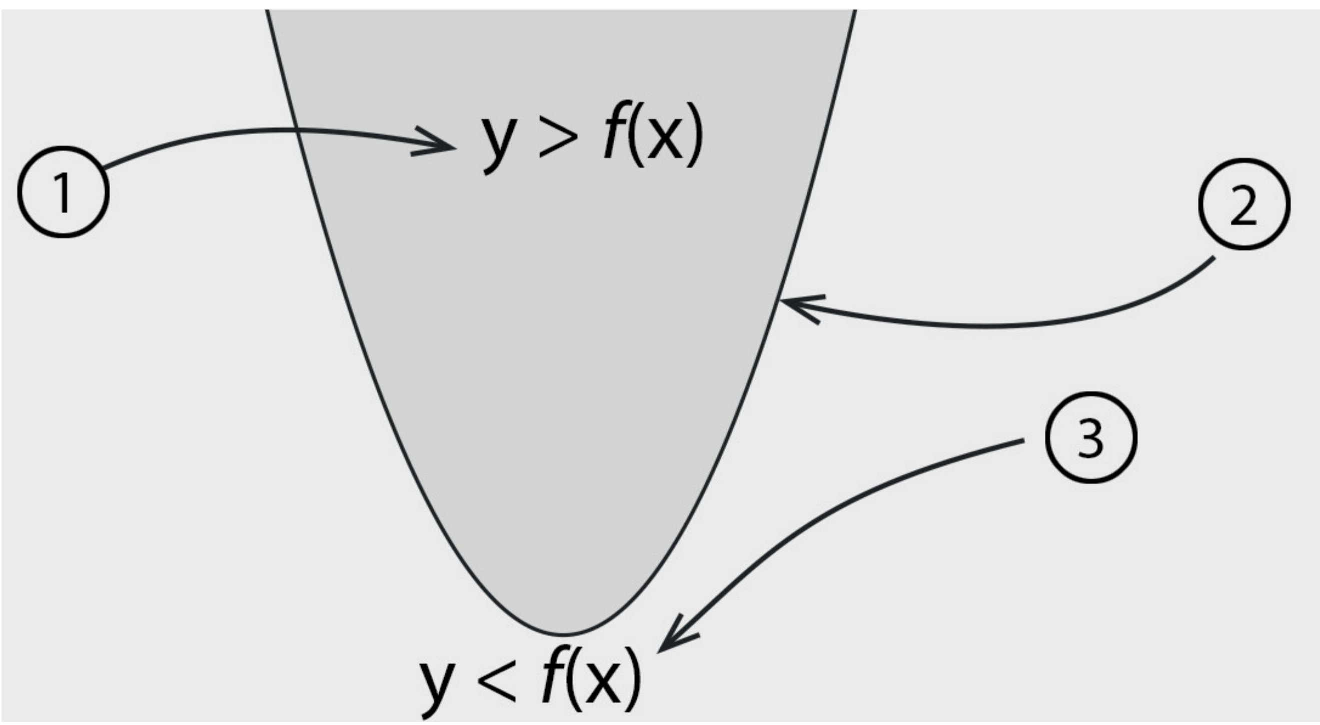
e. $q(x) = -2x^2 - 5x - 3$

f. $r(x) = -\left(x + \frac{3}{2}\right) - \frac{40}{9}$

Actividades de profundización

6. Analiza la siguiente información.

La parábola divide el plano en tres secciones, tal como lo muestra la imagen.



1: Los puntos (x, y) en la curva cumplen que su coordenada en y es igual que f(x).

2: Los puntos (x, y) por sobre la curva cumplen que su coordenada en y es mayor que f(x).

$$y > f(x)$$

3: Los puntos (x, y) debajo la curva cumplen que su coordenada en y es menor que f(x).

Por ejemplo, si reemplazamos la coordenada x del punto (3, −3) en $f(x) = -2(x - 2)^2$, obtenemos que $f(3) = -2$, es decir, mayor que −3. Por lo tanto, (3, −3) se encuentra bajo la curva.

Identifica dónde se encuentran los siguientes puntos con respecto a la función $f(x) = 2x^2 + x - 5$:

a. $(-1, -6)$

b. $(0, -5)$

c. $(-2, 1)$

d. $(1, 5)$

▶ Para concluir

a. Considerando la función $f(x)=x^2+x$, ¿qué representan gráficamente las soluciones de la ecuación $0 = x^2 + x$? ¿Y las soluciones de $2 = x^2 + x$?

b. ¿Qué características de la parábola te resulta más difícil deducir de la fórmula de una fracción cuadrática? ¿Qué puedes hacer para mejorar?

Variación de parámetros de una función cuadrática

¿Cuáles son las coordenadas del vértice de una función cuadrática?

¿Cómo completarías el cuadrado de binomio de la expresión a x^2 + bx?

Objetivo: Reconocer la forma canónica de una función cuadrática y la variación de parámetros.

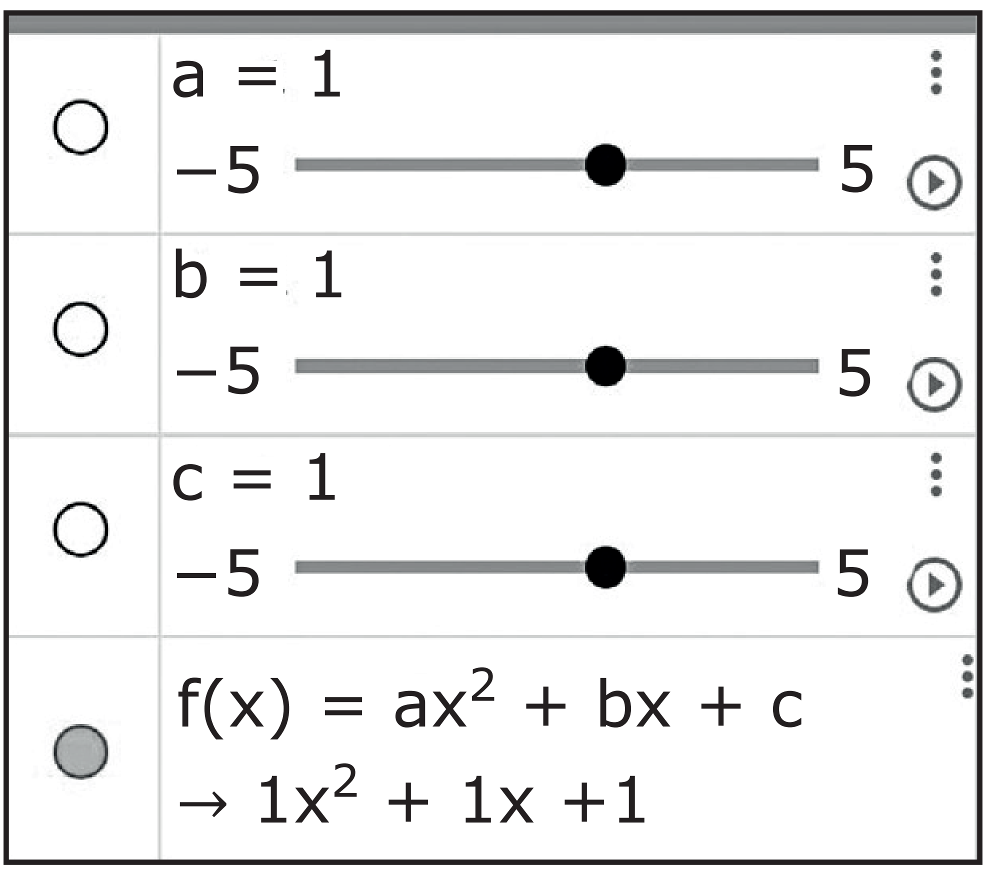
Para comprobar.
gbit.cl/T21M2MP069A

1. Sigue los pasos para realizar la siguiente actividad en parejas. Puedes utilizar el recurso en el vínculo.

Paso 1: En *GeoGebra*, escribe la expresión "$ax^2 + bx + c$" y presiona enter.

Paso 2: Presiona los tres puntos del costado y en el menú desplegable selecciona en "puntos especiales".

Paso 3: Presiona el botón "animar" en el deslizador a y responde.



a. En parejas, describan el movimiento y comenten: ¿Cómo se modifica gráficamente la función? ¿Se modifican las coordenadas del vértice de la parábola? Explica.

b. En parejas, planteen una conclusión respecto de cómo se modifica la parábola cuando $0 < |a| < 1$ y cuando $1 < |a|$.

Paso 4: Dejando fijo el valor de a en 1, anima el deslizador b y responde.

c. En parejas describan el movimiento y comenten: ¿Cómo se modifica gráficamente la función? ¿Se modifican las coordenadas del vértice de la parábola? Explica.

d. En parejas, planteen una conclusión respecto de cómo se modifica la parábola al variar el parámetro b. ¿Qué ocurre cuando b = 0? ¿Es fácil de describir?

Paso 5: Dejando fijo el valor de b en 1, anima el deslizador c y responde.

e. En parejas, describan el movimiento y comenten: ¿Cómo se modifica gráficamente la función? ¿Se modifican las coordenadas del vértice de la parábola? Explica.

f. En parejas, planteen una conclusión respecto de cómo se modifica la parábola al variar el parámetro c.

Paso 6: Modifica el valor de $c = 0$. Luego, selecciona el vértice, activa el rastro y vuelve a animar el deslizador del coeficiente b.

g. ¿Cómo es el movimiento del vértice al variar el parámetro b? ¿Qué dificultades tiene su análisis? Explica con tus palabras.

Recuerda que las coordenadas del vértice son $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

2. Un estudiante compara las funciones $f(x) = 8x^2$ y $g(x) = -8\ x^2$ y concluye que las ramas de la parábola de $f(x)$ están más cerca del eje Y que las de g(x). Esto, dado que su coeficiente en el término cuadrático es mayor. ¿Cómo fundamentarías que su conclusión es errónea?

3. Grafica en tu cuaderno o utilizando un software en un mismo plano las siguientes funciones cuadráticas. Grafica como referencia $f(x) = x^2$ dentro del plano.

¡Utiliza colores para diferenciarlas!

a. $g(x) = x^2 - 5$

b. $h(x) = x^2 + 3$

c. $i(x) = x^2 - 1$

d. $p(x) = (x + 3)^2$

e. $n(x) = (x - 5)^2$

f. $m(x) = (x - 1)^2$

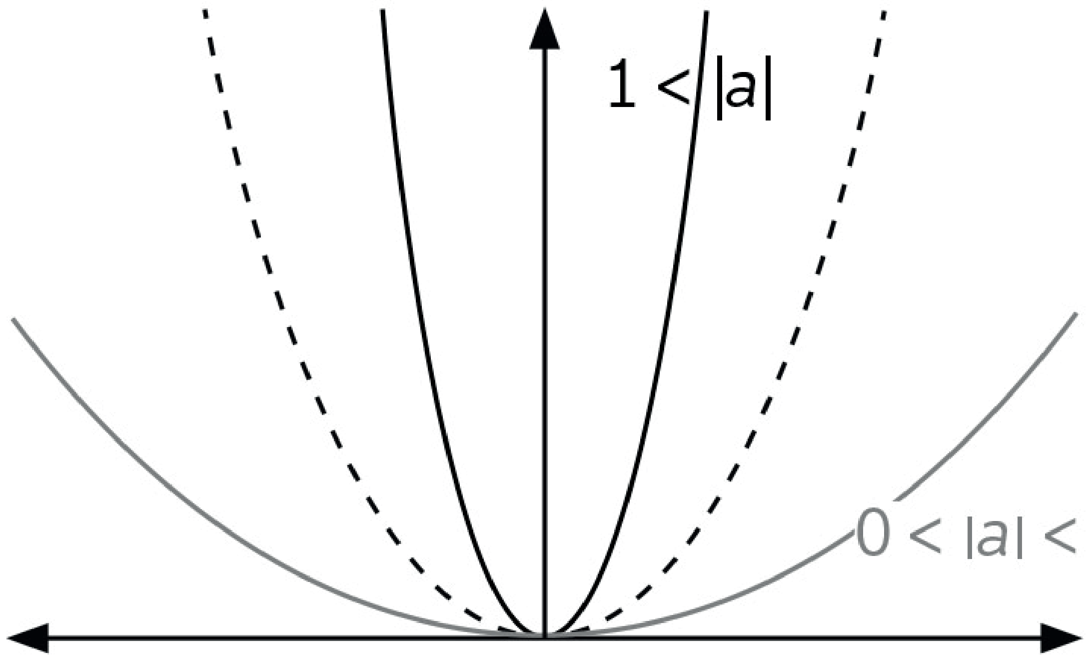
g. ¿En qué casos la gráfica se desplaza hacia arriba y en qué casos lo hace hacia abajo? ¿A qué se debe?

h. ¿En qué casos la gráfica se desplaza hacia la izquierda y en qué casos lo hace hacia la derecha? ¿A qué se debe?

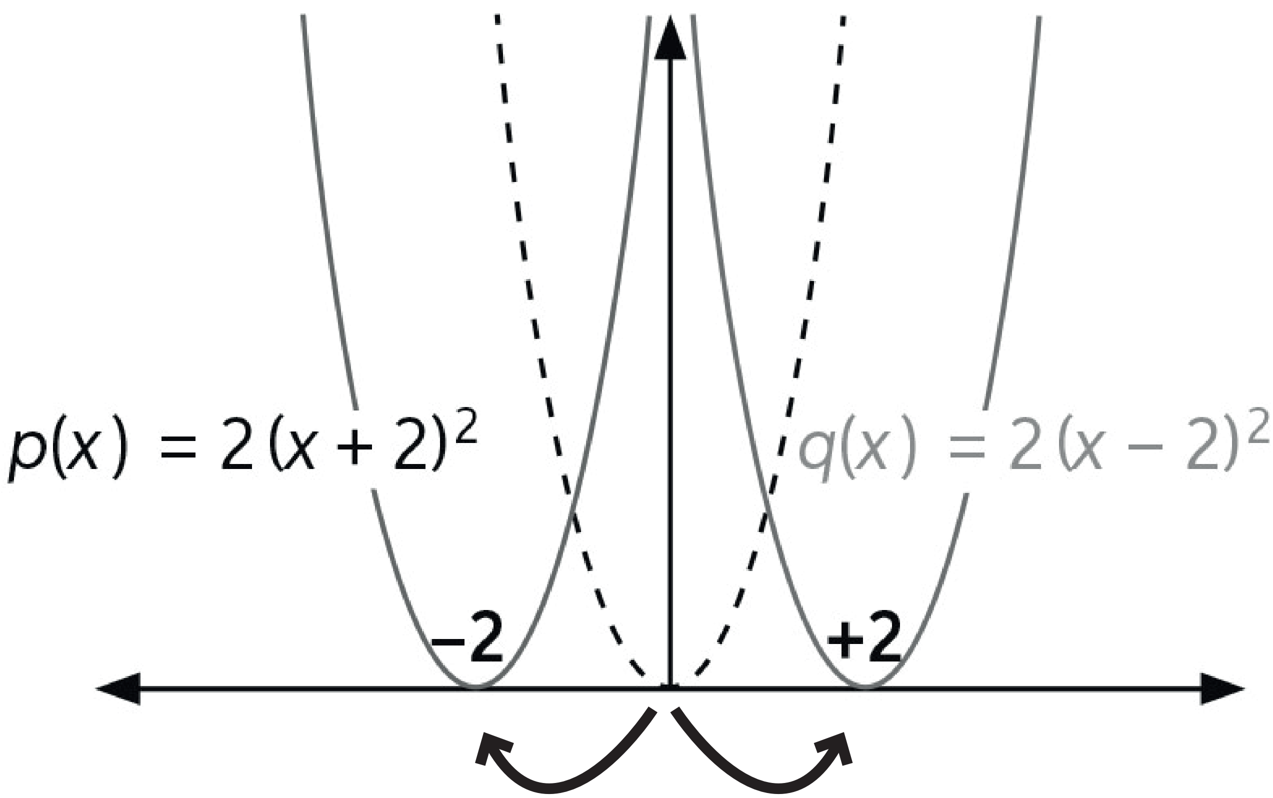
i. Respondan en parejas: ¿En qué magnitud se desplaza el vértice de la parábola $w(x) = (x - 2)^2 + 3$ en cada eje? ¿En qué direcciones?

Para analizar la gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, transformaremos la ecuación en su forma canónica $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

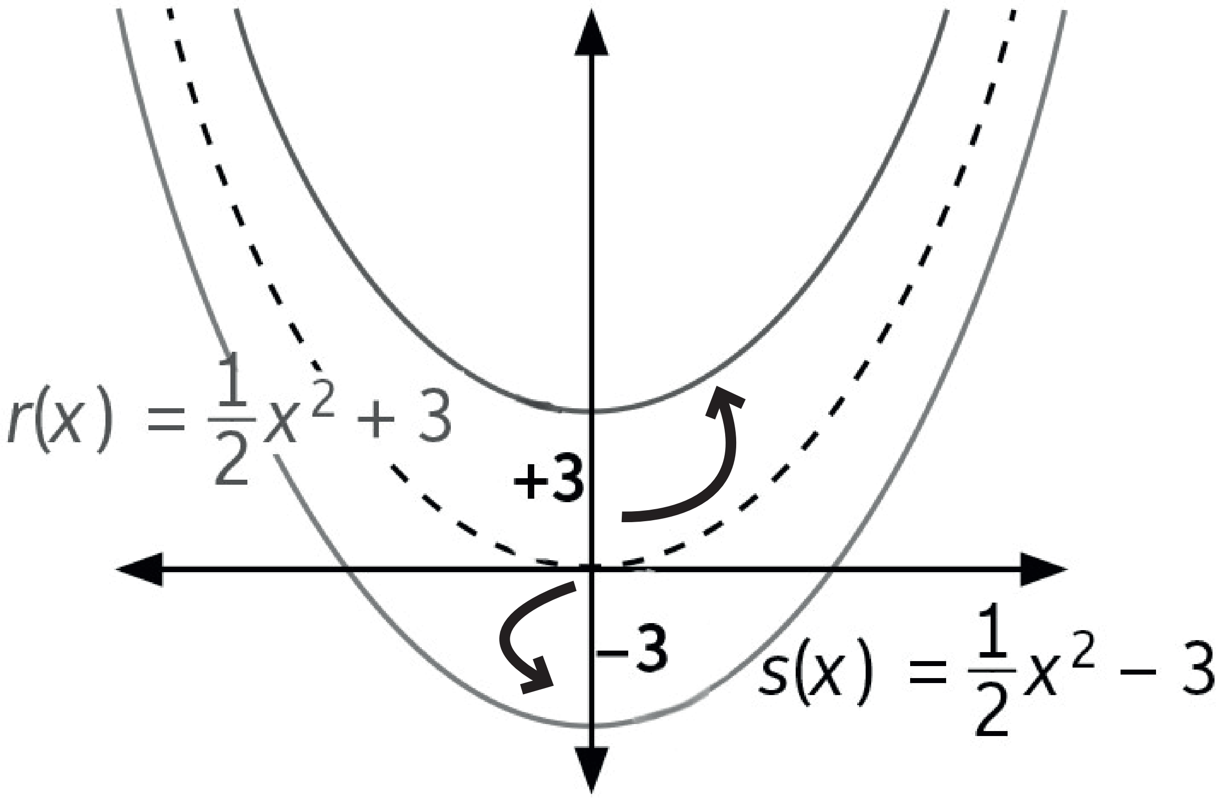
- Si 0 < |a| < 1, la gráfica se dilata. Si 1 < |a|, la gráfica se contrae.



- El movimiento en el eje X está asociado al parámetro h. Si h > 0, la gráfica se mueve hacia la derecha en h unidades. Para el caso h < 0, la gráfica se mueve hacia la izquierda en |h| unidades.



- El movimiento en el eje Y está asociado al parámetro k. Si k > 0, la gráfica se mueve hacia arriba en k unidades. Si k < 0, la gráfica se mueve hacia abajo en |k| unidades.



¿Fueron tus conclusiones acertadas? ¿En qué te benefició realizar las conclusiones de la actividad 2 en parejas? ¿Por qué?

4. Transforma a su forma canónica las siguientes ecuaciones cuadráticas e identifica su vértice. Guíate por el ejemplo.

Ejemplo:

$f(x) = 2x^2 + 4x - 3$

Factorizamos a de $ax^2 + bx$:

$f(x) = 2(x^2 + 2x) - 3$

Completamos el cuadrado de $x^2 + \frac{b}{a}x$ para factorizar:

$f(x) = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) - 3$

$\rightarrow f(x) = 2((x^2 + 2x + 1) - 1) - 3$

$f(x) = 2(x+1)^2 - 2 - 3$

$\rightarrow f(x) = 2(x + 1)^2 - 5$

El vértice es $(-1, -5)$

a. $g(x) = x^2 + 4x - 1$

b. $h(x) = x^2 - 6x - 2$

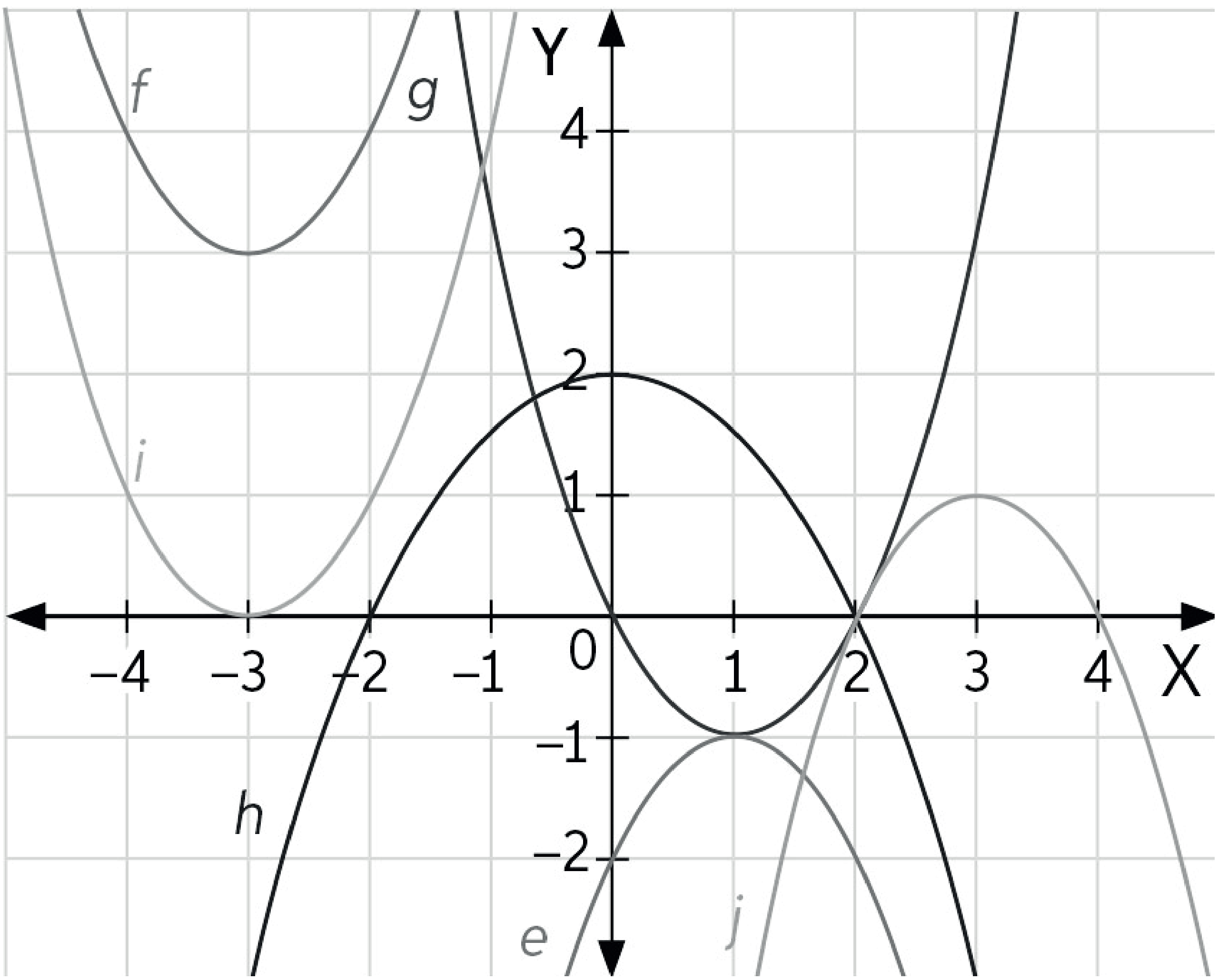
c. $i(x) = x^2 + 4x$

d. $i(x) = 2x^2 + 8x + 1$

e. $j(x) = 4x^2 + 4x + 4$

f. $j(x) = \sqrt{2} \cdot x^2 - 2x$

5. Observa las gráficas de las funciones y determina los valores de h y k.



a. $f(x) = (x + h)^2 + 3$

b. $g(x) = (x - 1)^2 + k$

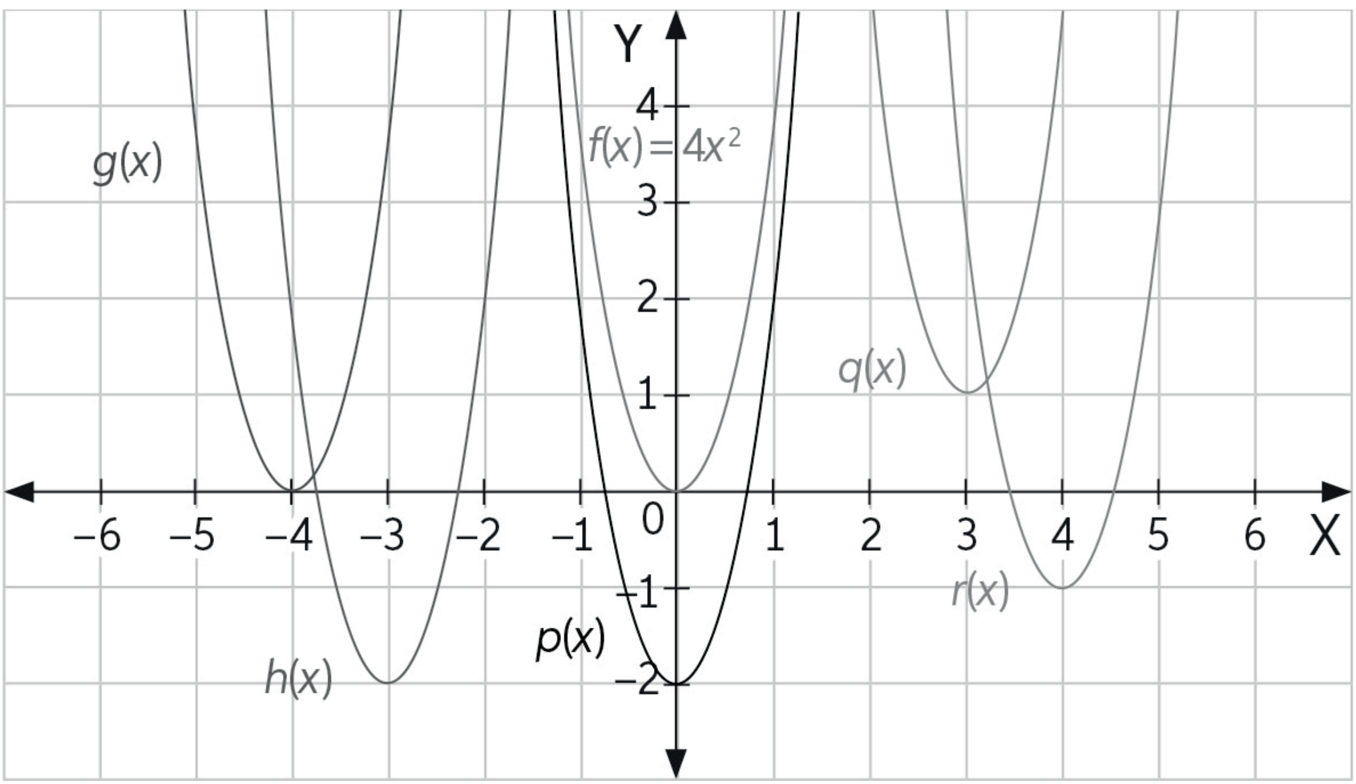
c. $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + k$

d. $i(x) = (x - h)^2$

e. $j(x) = -(x - 3)^2 + k$

f. $e(x) = -(x - h)^2 + k$

6. Las siguientes funciones corresponden a traslaciones de la función $f(x) = 4x^2$.



a. Escribe cada función en su forma canónica.

b. Transforma las funciones a su forma general.

▶ Para concluir

a. ¿En qué casos utilizarías la forma $f(x)=a(x-h)^2+k$ en vez de

$f(x) = ax^2 + bx + c$? ¿Por qué?

b. ¿Cuáles fueron las ventajas de usar softwares o recursos digitales para analizar funciones?

Aplicaciones de la función cuadrática

¿Para qué sirve modelar una situación mediante una función?

¿Qué situaciones has modelado mediante la función cuadrática a lo largo de la lección? Nombra 3.

Objetivo: Modelar situaciones de cambio cuadrático de la vida cotidiana y las ciencias por medio de funciones cuadráticas.

Muchas situaciones cotidianas se pueden modelar mediante una función cuadrática. Por ejemplo, la altura de un cuerpo que cae respecto del tiempo, la ganancia obtenida según la cantidad de artículos vendidos, entre otras. Para modelar situaciones, considera los siguientes aspectos:

- Identificar lo que se pide responder.
- Identificar los datos que entrega la situación.
- Establecer estrategias o procedimientos para resolver el problema.
- Evaluar la pertinencia de los resultados obtenidos e interpretarlos de acuerdo con el contexto de la situación.

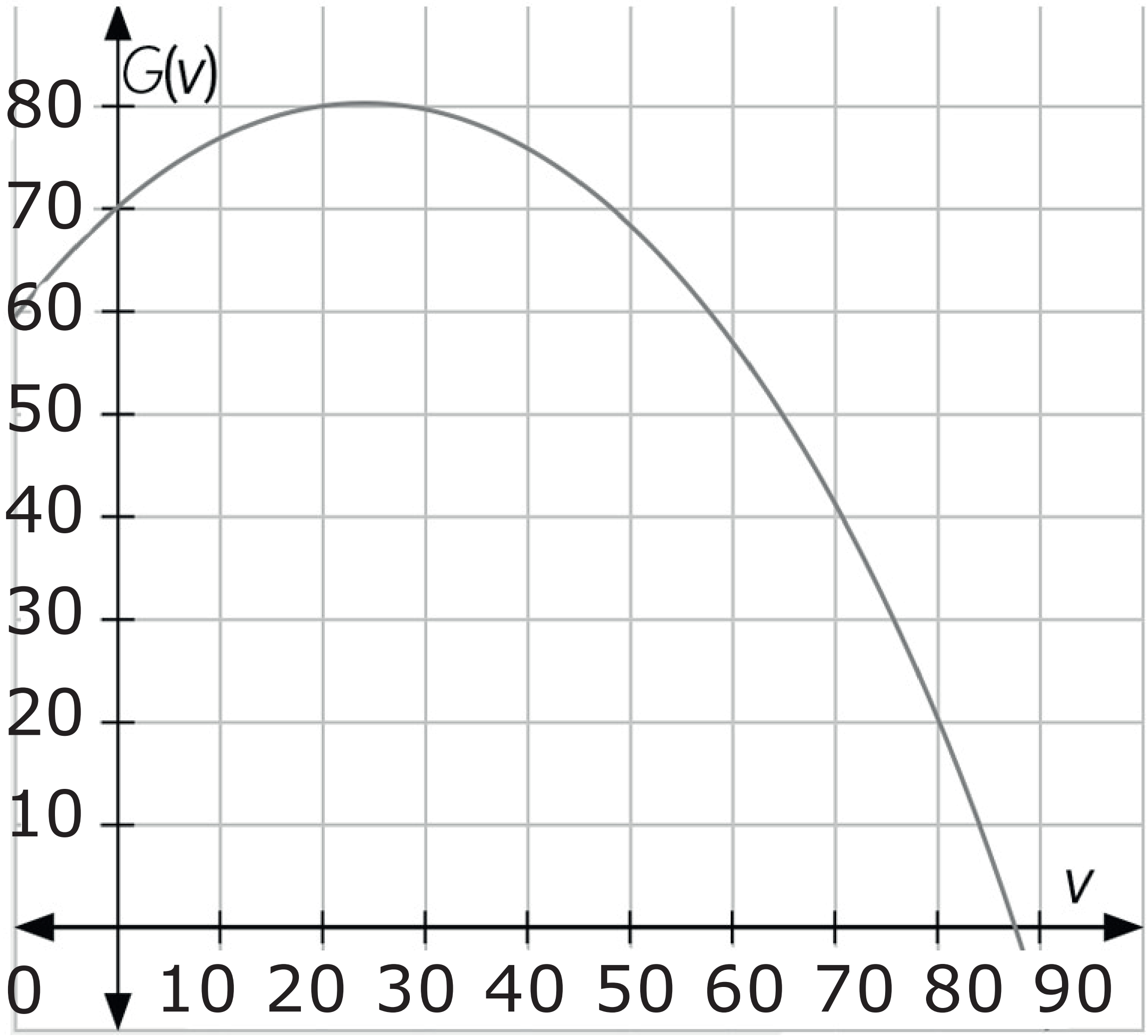
Una estrategia para resolver este tipo de situaciones es la de representar gráficamente el problema y analizar los puntos de la parábola. Por ejemplo: el vértice, la intersección con el eje X o el valor máximo o mínimo de la función.

1. Analiza los siguientes procedimientos. Luego, realiza las actividades.

Se sabe que la demanda por el libro, es decir la cantidad de productos que serán vendidos, variará al aumentar su precio de venta, es decir la oferta, según la función:

$$G(\mathrm{v}) = \frac{-1}{50}(v - 23)^2 + 80$$

Donde $G(\mathrm{v})$ corresponde a la ganancia en miles de dólares por los libros producidos y v al precio de venta en dólares.



a. ¿Qué puedes interpretar a partir de la gráfica?

b. Analiza el siguiente procedimiento y responde.

¿Cuánto será la ganancia si se vende a 1 dólar?

$G(1) = \frac{-1}{50}(1 - 23)^2 + 80$ Reemplazamos 1 en la expresión de la función

$G(1) = \frac{-1}{50}(-22)^2 + 80 = -\frac{484}{50} + 80$
$= 70{,}32$

¿Cómo se interpreta el resultado anterior?

c. Analiza el siguiente procedimiento y responde.

¿Cuál debe ser el precio de los libros para que la ganancia sea máxima? A partir de la forma canónica, obtenemos las coordenadas:

$G(x) = \frac{-1}{50}(x - 23)^2 + 80$ El vértice de la parábola es (23, 80)

Interpreta el resultado anterior.

d. ¿Cuál es el valor del libro para que no exista ganancia?

¿De qué otra forma puedes obtener las coordenadas del vértice?

2. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

Cuando un objeto se lanza verticalmente hacia arriba, la altura h en función del tiempo t está dada por la expresión

$$h(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + h_0.$$

En ella, h_0 es la altura inicial, v_0 la velocidad inicial, *t* el tiempo transcurrido y *g* la aceleración de gravedad ($g \approx 10\ m/s^2$).

Si se lanza una pelota desde el suelo con una velocidad inicial de 20 m/s:

a. ¿En qué instante alcanza la altura máxima?

b. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

c. ¿Cuánto tiempo se demora la pelota en regresar al suelo?

3. Las siguientes funciones modelan la altura (en metros) de los lanzamientos de dos basquetbolistas. Esto, en términos del tiempo transcurrido (en segundos) desde el lanzamiento.

$$\mathrm{a(t)} = \frac{1}{3}(t - 2)^2 + 3$$

$$b(t) = -\frac{1}{3}(t - 1)^2 + 3$$

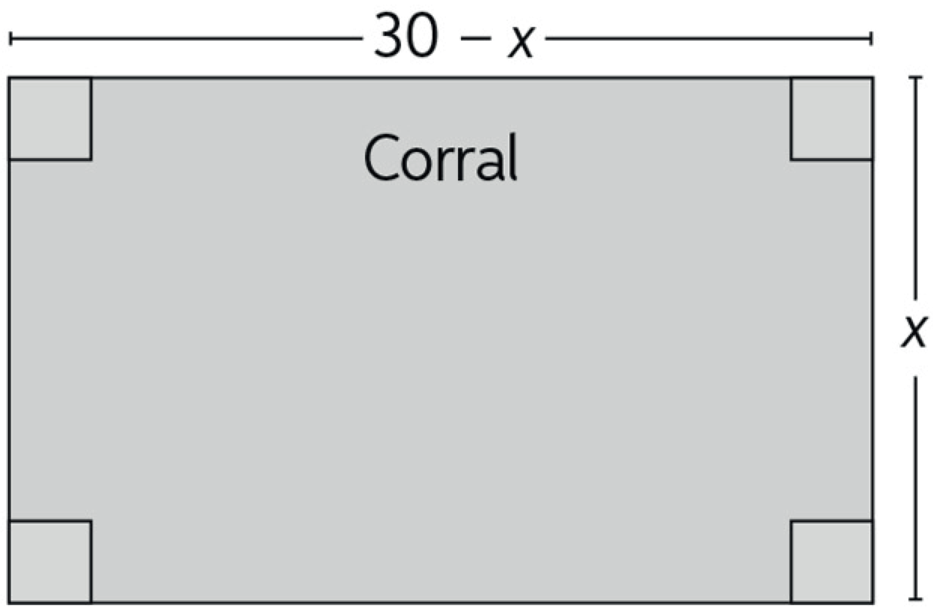
a. ¿Desde qué altura lanzan la pelota los basquetbolistas? Interpreta y discute con tu curso.

b. ¿Cuál es la altura máxima que alcanzan ambos lanzamientos? ¿En cuánto tiempo?

c. ¿En cuántos segundos los balones tocan el suelo?

d. Si el balón atraviesa la red a los $\frac{8}{3}$ m de altura ¿cuántos segundos debió esperar cada jugador para encestar?

4. Laura tiene 60 m de malla que utilizará en su totalidad para construir un corral rectangular.



a. ¿Qué función determina el área del corral?

b. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función? Toma en cuenta el contexto.

c. ¿Cuál es el área máxima del corral?

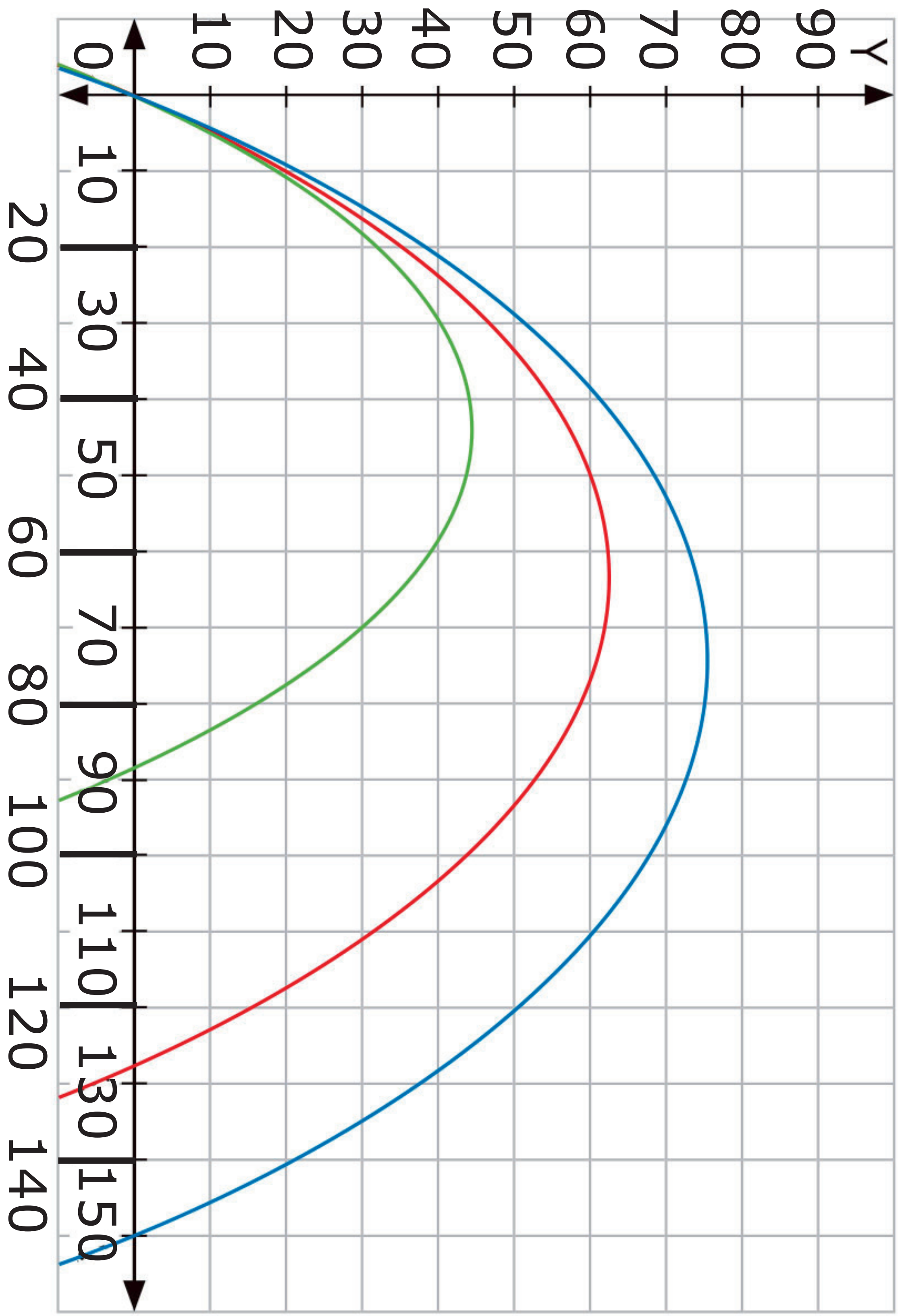
5. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

Las funciones modelan la altura (en cm) de tres chorros de agua en función de la distancia horizontal respecto al punto de lanzamiento (en cm).

$$f_3(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{66}x^2 + \frac{64}{33}x$$

$$f_1(x) = -\frac{1}{44}x^2 + 2x$$


Y
10 20 30 40 50 60 70 80 90
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150

a. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza cada uno? ¿A qué distancia horizontal del origen las alcanzan?

b. ¿Cuánta distancia cubre cada chorro de agua?

6. La ganancia mensual, en miles de pesos, de una mediana empresa que realiza instalaciones eléctricas depende de varios factores. Se modelada por la función $G(x) = -x^2 + 240x - 8000$, donde x representa la cantidad de sistemas instalados.

a. Elabora el gráfico de G(x).

b. ¿Cuál es la máxima ganancia mensual posible?

c. ¿Cómo se interpretan los valores 0 y negativos de la función G(x)?

7. La función cuadrática que modela la altura en metros de un delfín fuera del agua luego de x segundos es $f(x) = -5x^2 + 20x$. ¿Cuánto tiempo está el delfín fuera del agua?

▶ Para concluir

a. Para modelar fenómenos asociados a funciones cuadráticas, ¿qué características de estas es necesario estudiar?

b. ¿En qué otras áreas puedes aplicar la función cuadrática para resolver problemas? Comparte tu respuesta con tu curso.

Antes de continuar: Evaluación intermedia

Cuadrado mágico

Un cuadrado mágico es una tabla en que la se dispone una serie de números, La particularidad de estos números es que su suma en columnas, filas y diagonales es siempre la misma. Dicho número es llamado el "número mágico del cuadrado".

En parejas, realizarán la siguiente actividad que consiste en resolver un cuadrado mágico de 4 x 4.

Para resolver el cuadrado mágico, deberán trabajar con las siguientes funciones.

$$f(x) = \frac{4}{7}x^2 - \frac{36}{7}x + \frac{32}{7}$$

$$g(x) = 2x^2 - 5x + 8$$

$$h(x) = \frac{-2x^2 - 8x + 10}{3}$$

$$i(x) = -x^2 + 10x - 21$$

$$j(x) = 3x^2 - 12x + 16$$

Paso 1: Dibujen en sus cuadernos un cuadrado de 4 x 4. Rellénenlo según las instrucciones que se dan a continuación.

1		**2**	**3**
	4		
5		**6**	
7	**8**		**9**

1: Menor valor de $f(x)$

2: Opuesto del menor cero de $h(x)$

3: Abscisa del mayor cero de $f(x)$

4: Máximo valor de $h(x)$

5: Valor de $i(3)$

6: El valor de $2[g(0) - g(0{,}5)]$

7: Abscisa del vértice de $j(x)$

8: Abscisa del menor cero de la función $i(x)$

9: Preimagen negativa de 31 en $j(x)$

Paso 2: Calculen el número mágico del cuadrado.

Paso 3: Completen el cuadrado mágico con los valores que faltan.

a. Comparen su resultado con otra pareja.

b. En parejas y con ayuda de Internet, creen un cuadrado mágico de 3 x 3. Luego, intercámbienlo con otra pareja y resuelvan.

▶ Reflexiono

a. Identifica los problemas que podrías tener al construir este material.

b. ¿Crees que este material te permitirá trabajar mejor las funciones?

c. ¿Con qué otro contenido se podrían utilizar cuadrados mágicos como actividad?

Lección 7: Función inversa

Definición de la función inversa

¿Qué requisitos debe cumplir una función para serlo?

¿Qué es el codominio de una función? ¿Y la preimagen?

Objetivo: Reconocer y representar simbólica y pictóricamente la inversa de una función.

1. Una enfermedad muy contagiosa puede ser aliviada temporalmente por un fármaco. La efectividad de esta en minutos está modelada por la función $t(x) = \frac{4}{7}$. En ella, x son los mg de dosis inyectados tales que $0 \leq x \leq 500$.

a. ¿Cuál es el dominio de la función t(x)? ¿Qué representa?

b. ¿Cuál es el recorrido de la función t(x)? ¿Qué representa?

c. La siguiente tabla para determinar la duración del fármaco para distintas concentraciones. Complétala en tu cuaderno.

Gramos (mg)	Tiempo (m)
	0,05
15	
	20
	45
	61,25
200	

Para llenar la tabla considera la resolución de la ecuación $\frac{x}{500}$ *= 61,25, por ejemplo.*

d. Para operar a una de las personas infectadas, se inyecta al paciente con el fármaco. Por motivos de seguridad, es indispensable que este tenga una duración de al menos 8 horas. ¿Qué cantidad de dosis se debe inyectar para que el fármaco tenga efecto 8 horas exactamente?

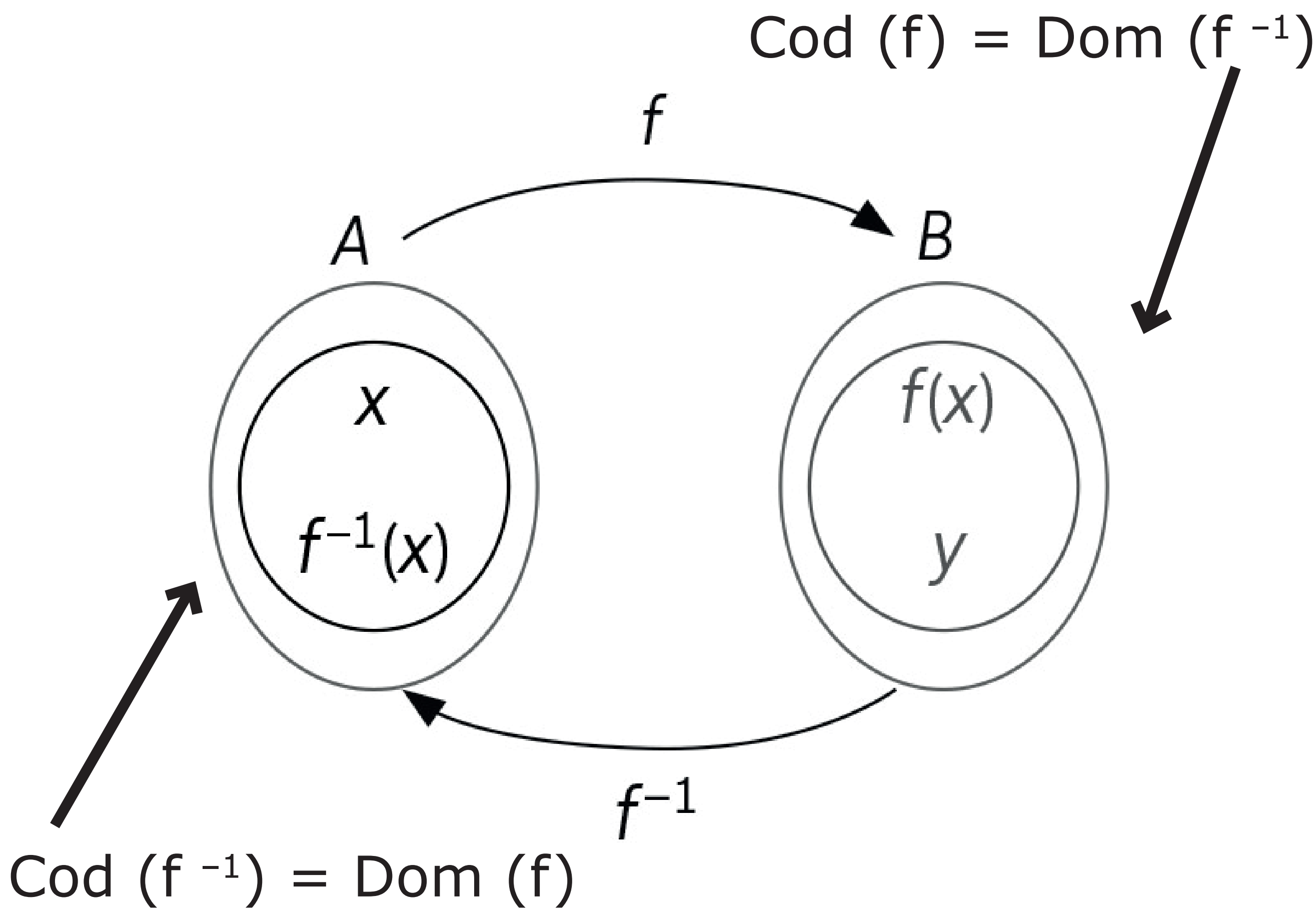
e. Para el periodo de observación postoperatorio, necesitan que el fármaco tenga una duración de 4 horas. ¿Qué cantidad deberá suministrarse para ello?

f. Se ha producido escasez del medicamento. Entonces, es necesario determinar una función que entregue la cantidad de milígramos necesarios en función de distintos tiempos en minutos. ¿De qué forma crees posible obtener esta función? Discutan en parejas y comenten con el curso.

Una función $f:A \to B$ que cumple con:

- El conjunto B coincide con el conjunto de llegada de la función, o codominio.
- Cada elemento de A se relaciona con un único elemento distinto de B.

Posee función inversa y se denota por $f^{-1}(x)$, tal que $f^{-1}: B \to A$.

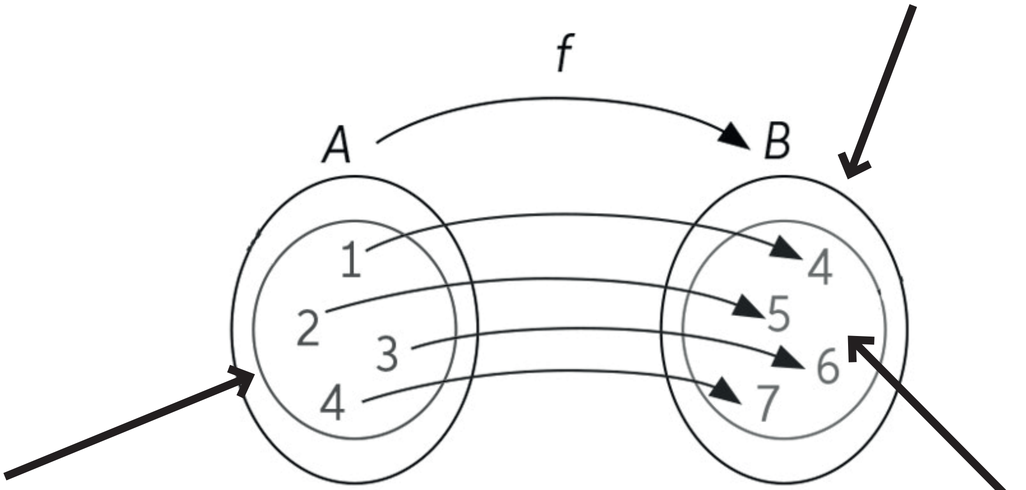

Cod (f) = Dom (f ⁻¹)
f
A
B
x
f⁻¹(x)
f(x)
y
f⁻¹
Cod (f ⁻¹) = Dom (f)

La notación f^{-1} se refiere a la inversa de la función f no al exponente -1 de una potencia.

2. Considera los diagramas sagitales de las funciones que aparecen a continuación, ¿Cuál(es) de ella(s) tiene(n) función inversa? Justifica tus respuestas y discute con tus compañeros.

Ejemplo: Debemos tener presentes los elementos:

La correspondencia
entre cada elemento.



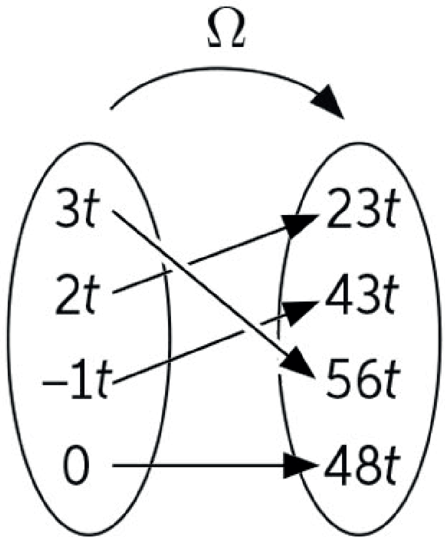
Dominio
(conjunto de partida)

Codominio
(conjunto de
llegada)

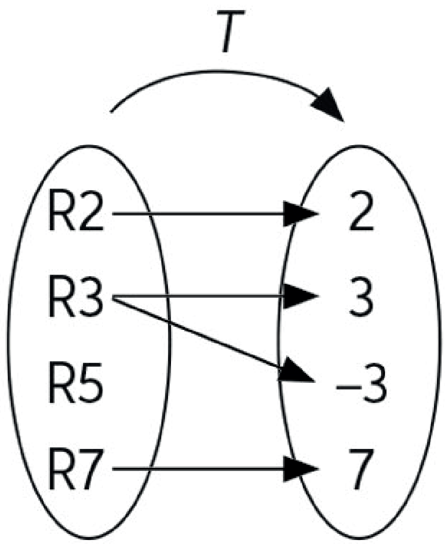
Establecemos las relaciones correspondientes a nuevo diagrama sagital, considerando que:

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Cod}(f^{-1})$
- $\mathrm{Cod}(f) = \mathrm{Dom}(f^{-1})$
- La correspondencia entre cada elemento se mantiene.

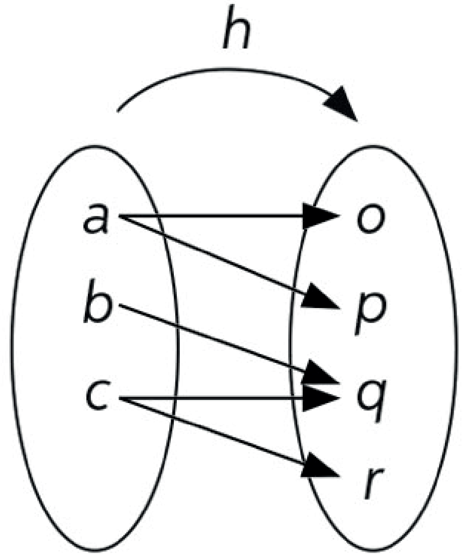
a.


Ω
3t
2t
–1t
0
23t
43t
56t
48t

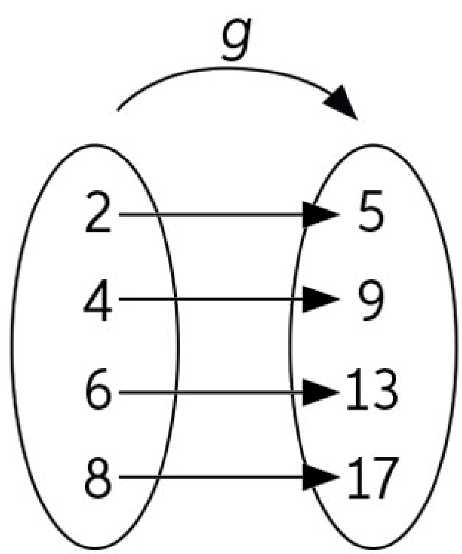
b.


T
R2
R3
R5
R7
2
3
–3
7

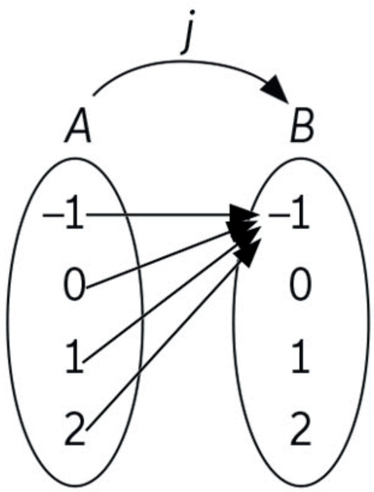
c.


h
a
b
c
o
p
q
r

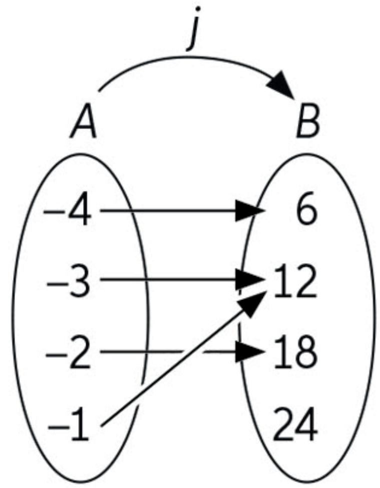
d.


g
2
4
6
8
5
9
13
17

e.



f.



3. Si t(x) es una función tal que duplica y luego le suma una unidad a cada elemento del conjunto

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

a. Determina una expresión algebraica para t(x).

b. Determina el recorrido de t(x).

c. Realiza un diagrama sagital para t(x).

d. Realiza un diagrama sagital para $t^{-1}(x)$.

e. Determina una expresión algebraica para $t^{-1}(x)$.

4. Se entrega la descripción en lenguaje natural de cada función. Determina la correspondiente descripción para la función inversa de cada una.

Descripción de f	Descripción de f^{-1}
Multiplica cada número por 3	Divide cada número en 3
Divide cada número por 2	
Aumenta cada número en una unidad	
Duplica cada número y luego le suma 4 unidades	
Agrega 3 unidades a cada número	

5. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. Si $f(3)=14$, se cumple que $f^{-1}(14) = 3$.

b. Siempre que g sea la inversa de f, f es la inversa de g.

c. El dominio de f es el dominio de la inversa de f.

d. Si $x \in Dom(f)$ y $f(x) = y$, entonces $f^{-1}(y) = x$.

Actividades de profundización

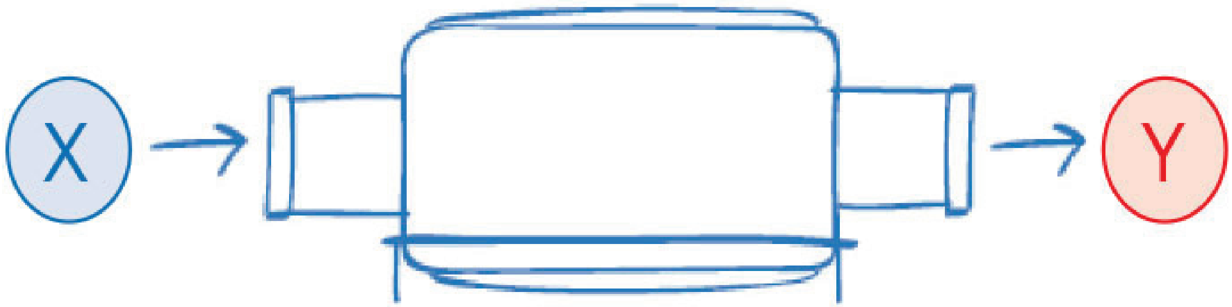
6. Analiza el siguiente contexto. Luego, realiza las actividades.

El funcionamiento de una máquina térmica se basa en la utilización de la energía en forma de calor.

El siguiente esquema representa el funcionamiento de una máquina de Carnot. Esta es una máquina térmica ideal de máxima eficiencia. Funciona entre dos fuentes de calor: una a mayor temperatura (en rojo) y otra a menor temperatura (en azul).

Función principal f(x) = x + 3

3 Joules de calor se transforman en energía mecánica.



Máquina

El calor se transfiere de X a Y, lo cual genera energía mecánica.

Función inversa $f^{-1}(x)$

3 Joules de energía mecánica se utilizan para producir calor.

Al aplicar energía mecánica a la máquina, se transfiere el calor de Y a X.

a. Construye una tabla de valores de f para $x = \{1, 2, 3, 4\}$.

b. Determina una expresión algebraica para $f^{-1}(x)$.

c. Construye una tabla de valores de f^{-1} para $x = \{4, 5, 6 \text{ y } 7\}$.

d. ¿Cómo se relacionan ambas tablas de valores?

▶ Para concluir

a. ¿Cuál es la función inversa de f^{-1}?

b. Explica con tus palabras qué es la función inversa de una función.

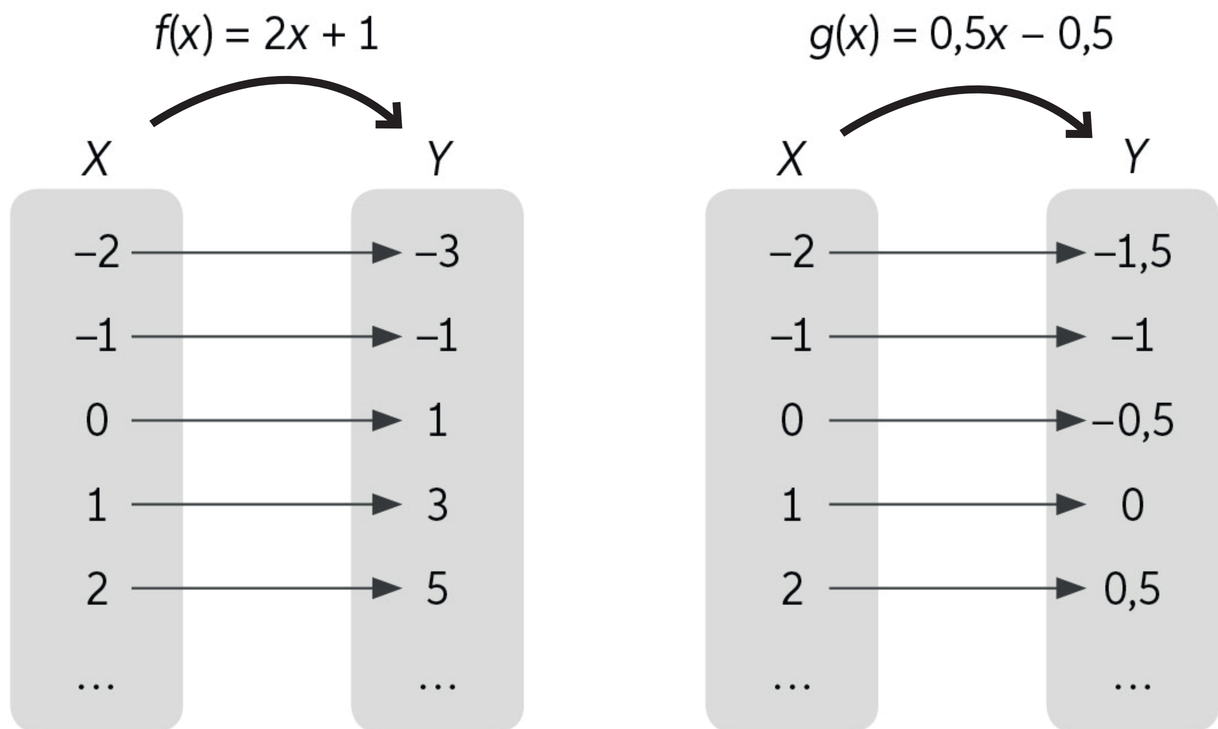
Representación de una función inversa

¿Qué significa que los puntos (x, y) pertenezcan a la función f(x) = 3x?

¿De qué formas puedes representar una función?

Objetivo: Representar gráficamente la inversa de una función.

1. Si f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, responde:



a. ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de cada función?

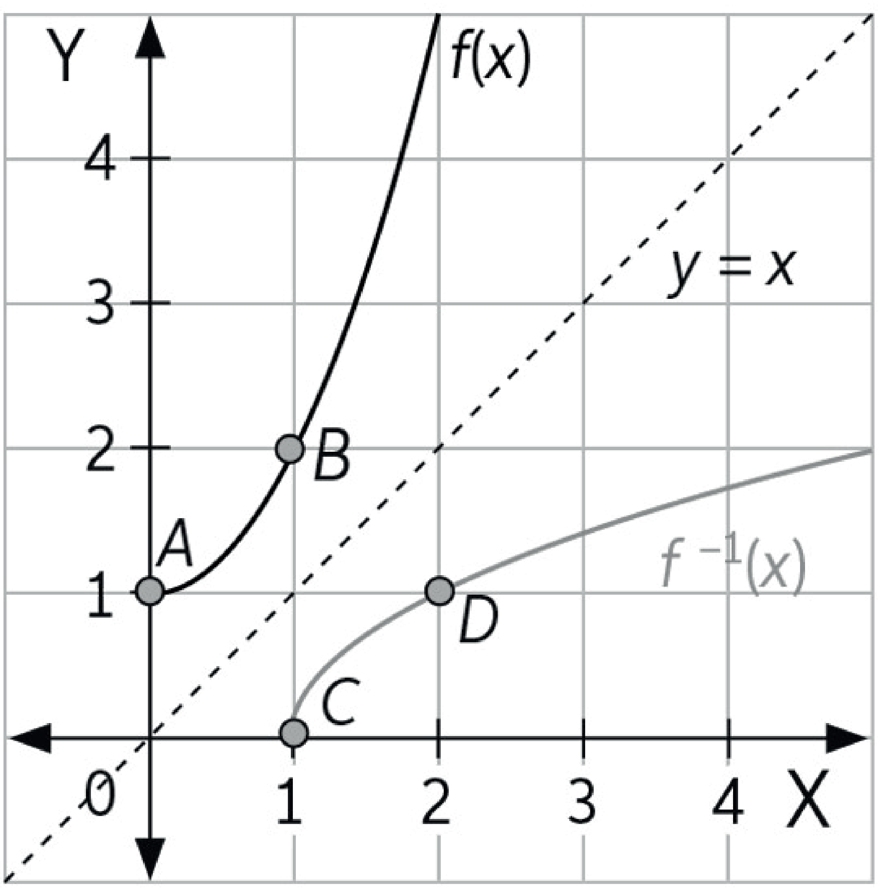
b. Construye para las funciones anteriores una tabla con 5 valores de x e y. Anótalos como puntos (x, y).

c. Grafica en tu cuaderno ambas funciones en un mismo plano cartesiano.

d. ¿Qué relación puedes establecer entre ellas? Discutan en parejas y luego comenten con el curso.

¿De cuántas formas distintas representaste las funciones en el ejercicio anterior?

2. Analiza la gráfica de las funciones $f : \mathbb{R}^{+} \cup \{0\} \rightarrow [1, \infty[$ y su inversa $f-1 : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$.



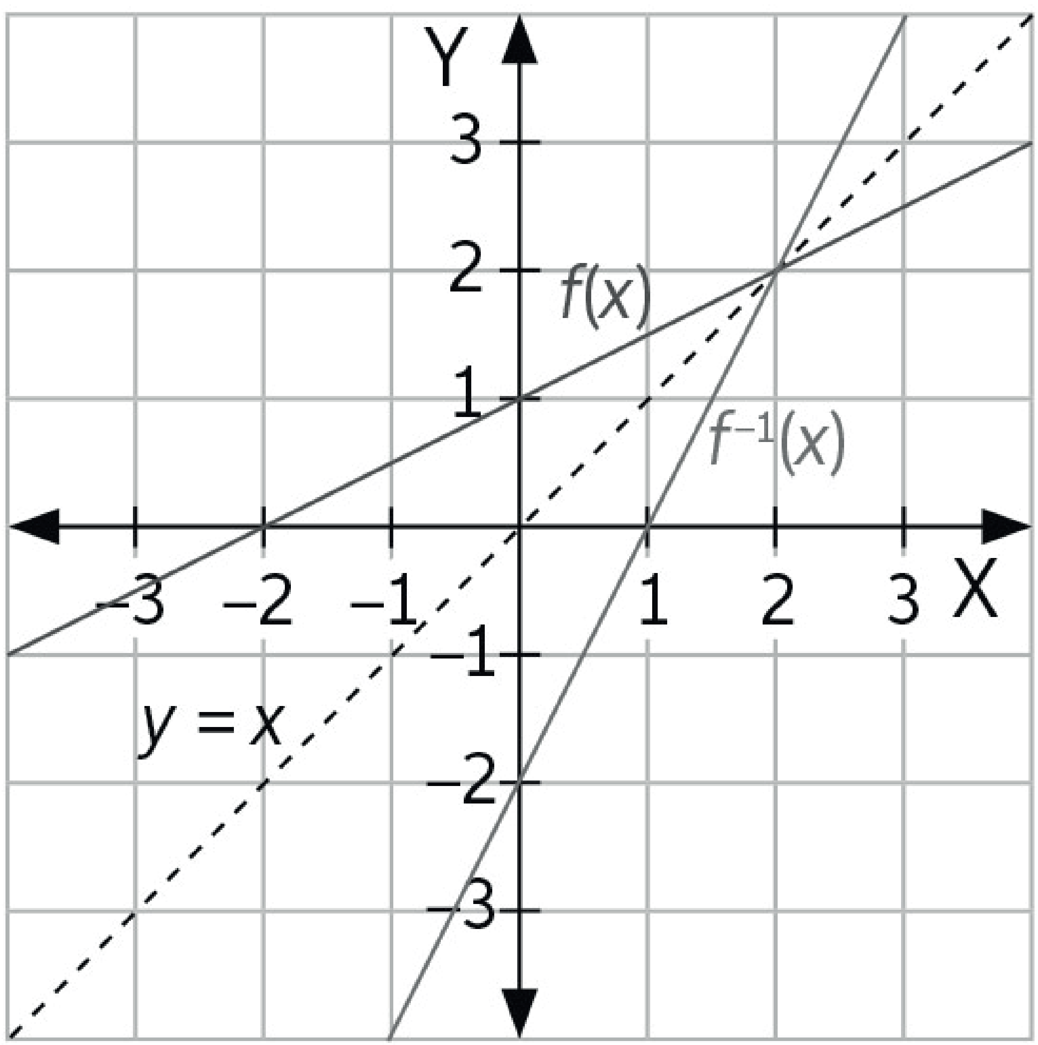
a. ¿Qué relación existe entre los puntos A y C? ¿Y entre B y D?

b. ¿Cómo se relacionan las reflexiones de los puntos de f(x) con respecto a la recta y = x y los puntos pertenecientes a la inversa?

c. Explica utilizando un diagrama sagital la siguiente afirmación: "Las coordenadas intercambian sus valores; si los puntos de f(x) son (a, b), entonces los de la función inversa siempre serán (b, a) respectivamente".

¿Qué representación de f te ayudó a comprender la regularidad anterior?

Reflejar la gráfica de una función respecto de la recta y = x permite obtener la gráfica de la función inversa. Por este motivo se dice que la función original es simétrica respecto de y = x, tal como se muestra en el gráfico.



En término de sus coordenadas, se intercambian sus valores. Si un punto (a, b) pertenece a f, entonces (b, a) pertenece a f^{-1}.

3. Considera los siguientes puntos de la función t(x):

(0, −2) (1, −1) (2, 2) (3, 7)

a. Realiza un diagrama sagital que represente t y t^{-1}.

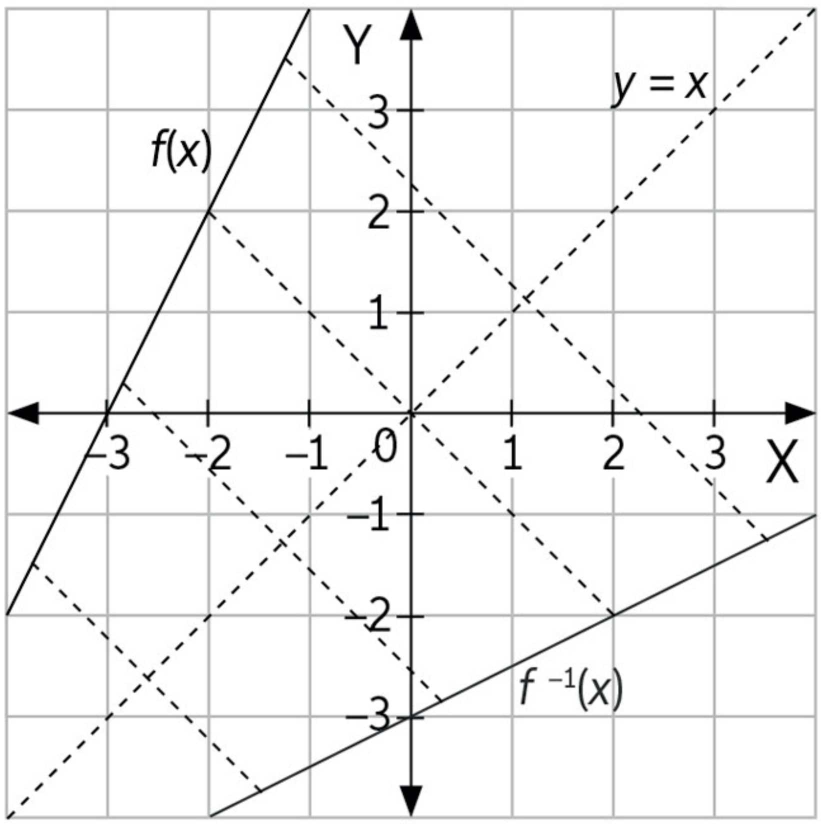
b. ¿Cuáles son los puntos que pertenecen a la función t^{-1}?

Para comprobar.
gbit.cl/T21M2MP080A

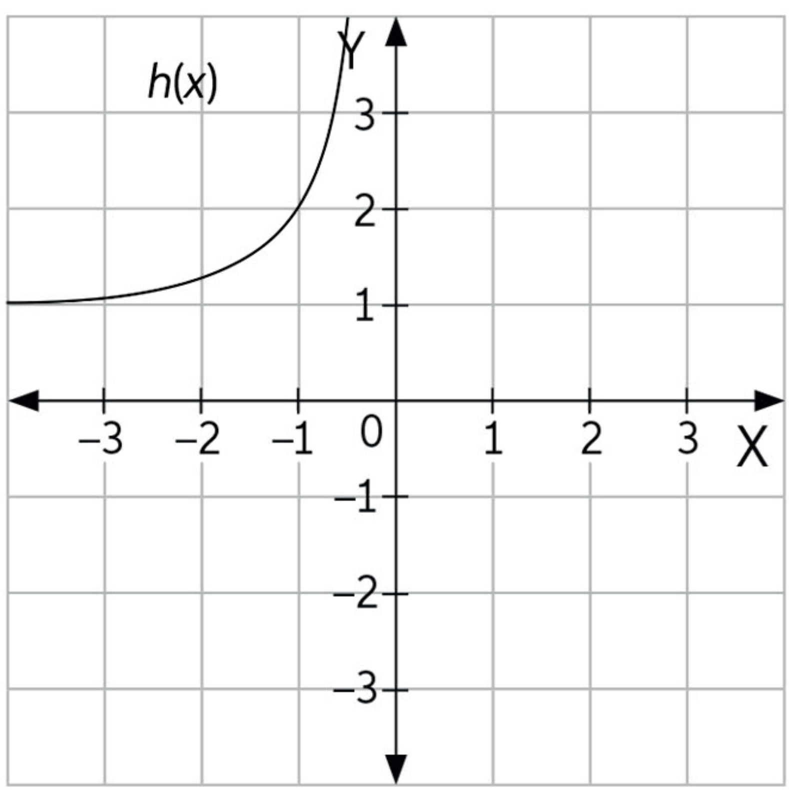
4. En tu cuaderno, realiza los siguientes pasos para determinar la inversa.

Puedes utilizar el recurso web para verificar los pasos.

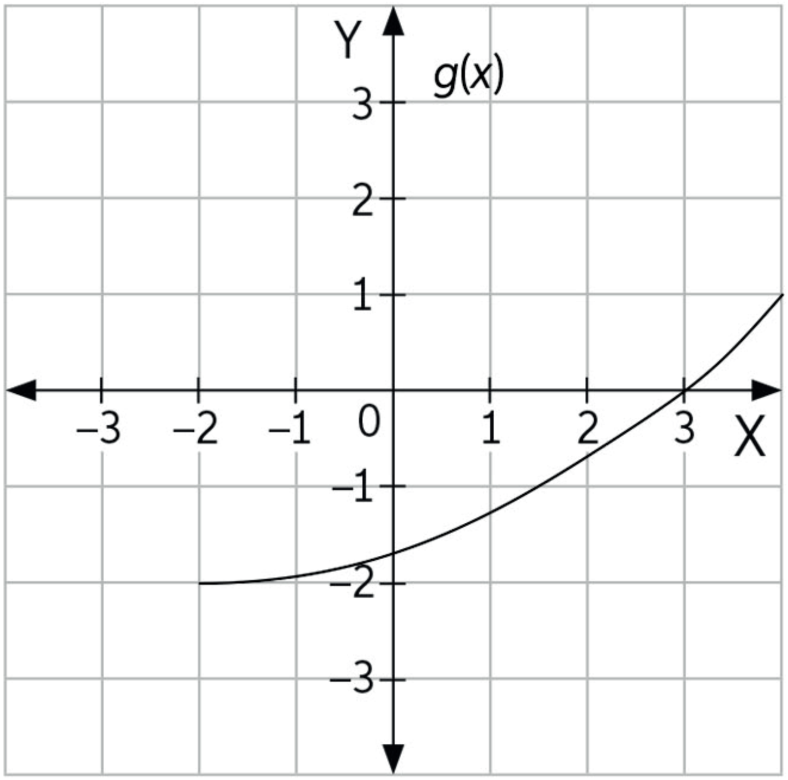
- **Paso 1:** Grafica los puntos de la función y esboza la curva.
- **Paso 2:** Grafica la recta y = x.
- **Paso 3:** Refleja los puntos con respecto a la recta y esboza un gráfico de su inversa.



a.

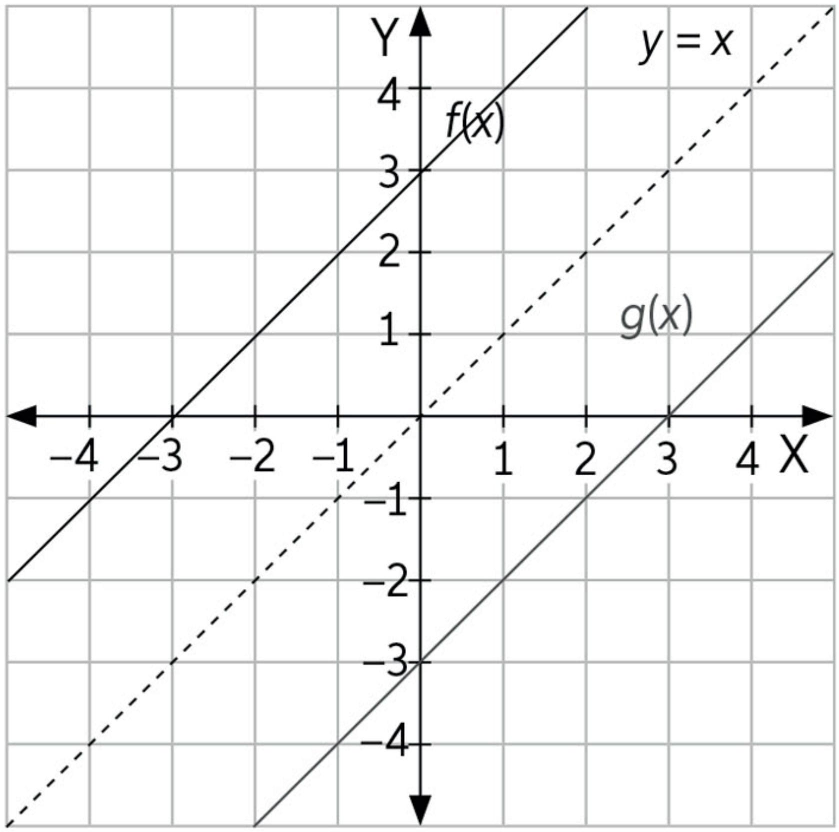


b.

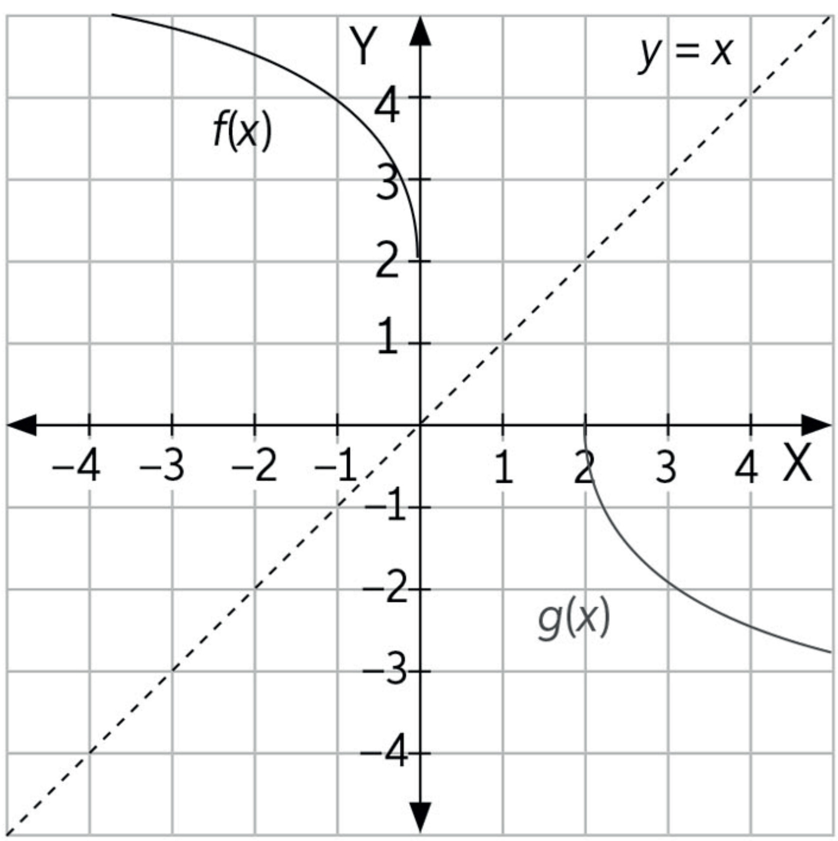


5. Evalúa si en cada gráfico se representa una función f(x) y su inversa $f^{-1}(x)$. En el caso de que no lo sean, traza la gráfica de f^{-1} (x) en tu cuaderno.

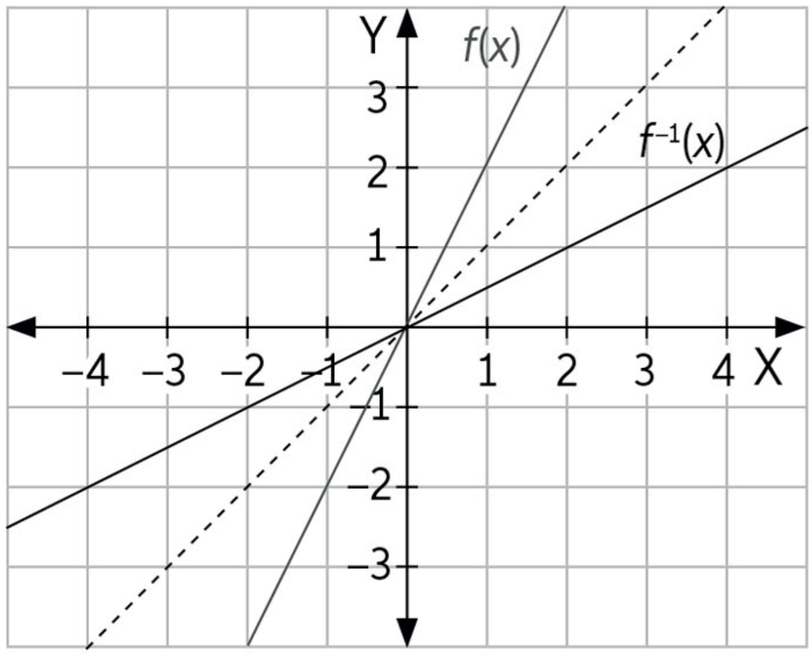
a.



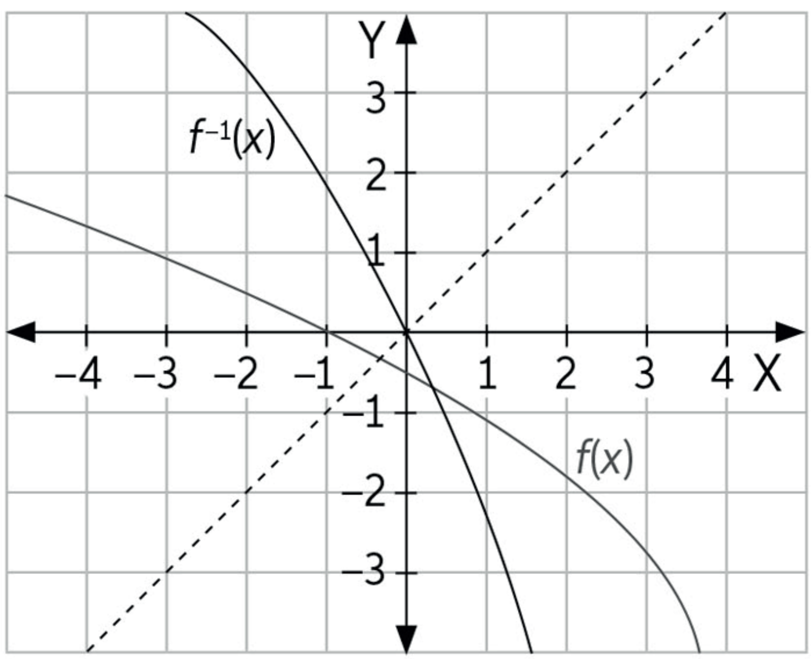
b.



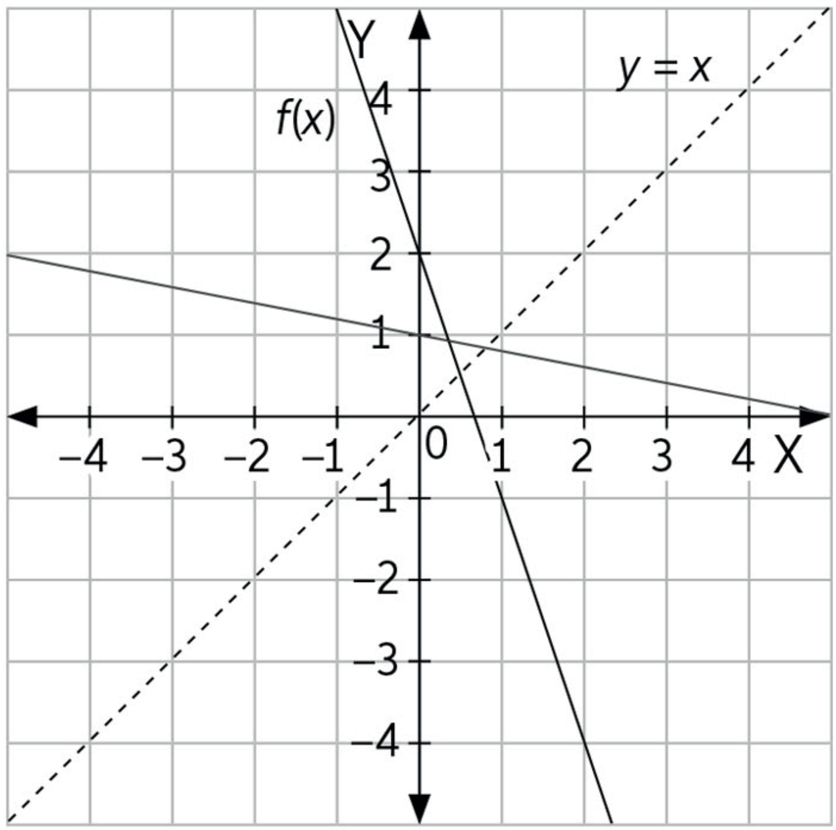
c.



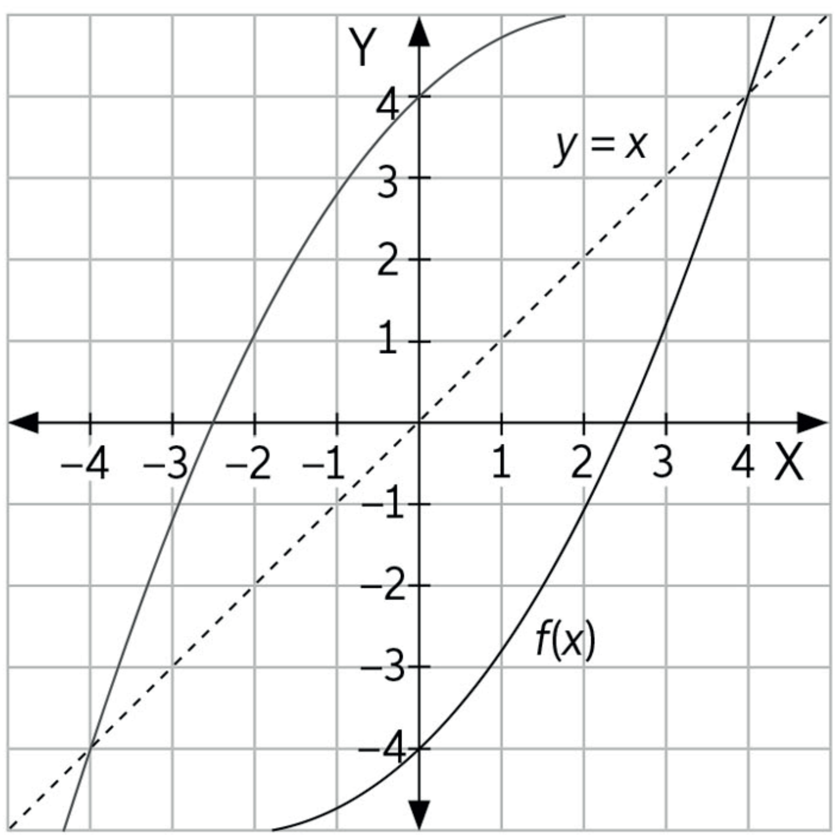
d.



e.



f.



6. Analiza las siguientes afirmaciones. Determina si son verdaderas o falsas.

a. La función inversa de una función f es simétrica con respecto al eje X.

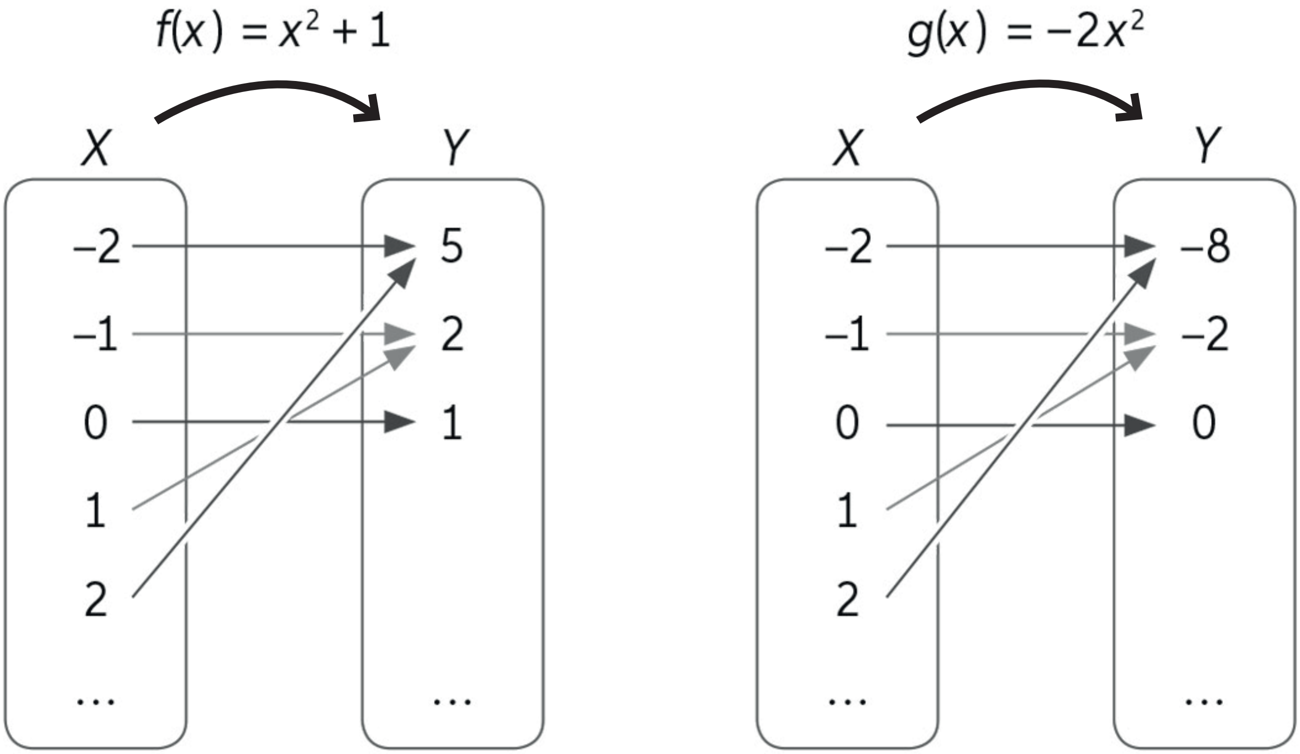
b. La inversa de la función inversa de una función es 1.

c. Si g es la inversa de f, entonces f es la inversa de g.

d. Todas las funciones inversas son simétricas a la función original con respecto a la recta de ecuación $y = -x$.

e. Todas las funciones inversas son inversamente proporcionales a la función original.

7. Analiza las siguientes funciones de dominio real y responde.



a. Escribe como pares ordenados los elementos de cada diagrama de las funciones cuadráticas.

b. "A todos los elementos de X les corresponden elementos distintos del codominio Y". Para que existe la inversa de una función, ¿debe cumplir con dicha condición? Discutan en parejas. Argumenten utilizando los pares ordenados.

c. Si se modifica el dominio de f y g a $[0, \infty[$, ¿existen sus inversas? ¿Y si se modifica a $]-\infty, 0[$? Explica mediante pares ordenados.

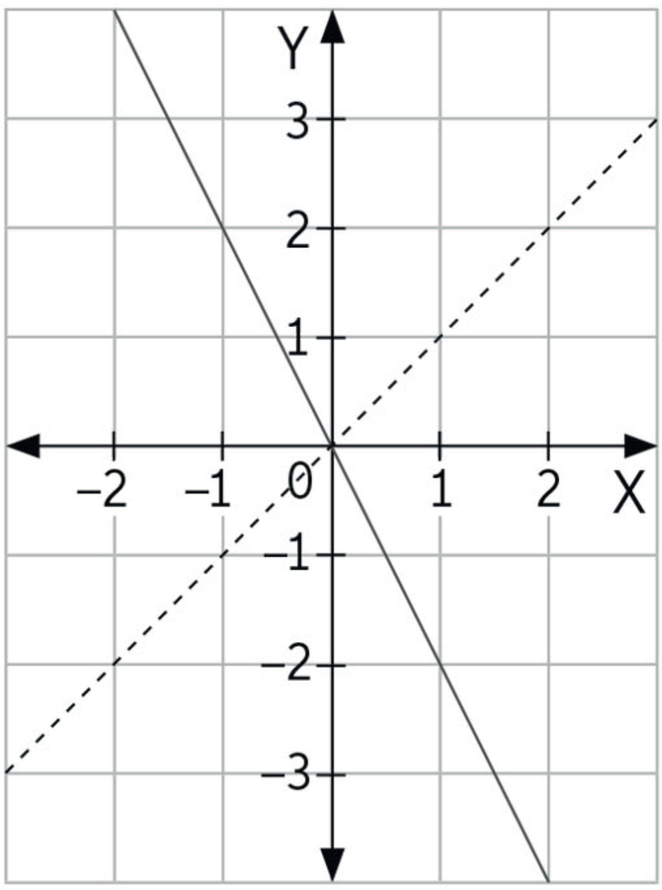
d. Explica mediante un diagrama sagital y pares ordenados el siguiente criterio para determinar la existencia de la inversa.

“Para que la función inversa exista, es necesario que al trazar cualquier recta paralela al eje X, esta se interseque en a lo más un punto con la función".

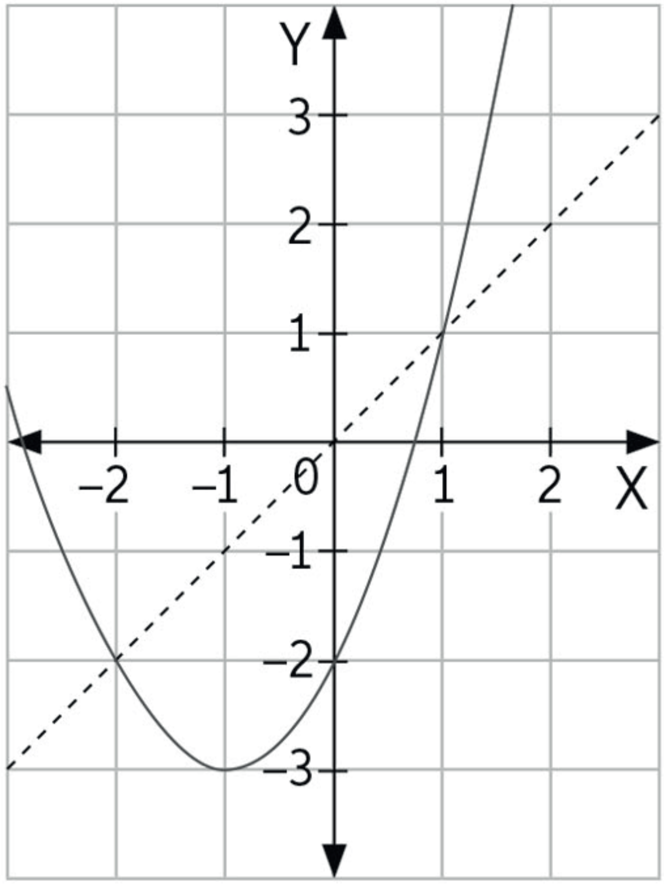
Actividades de profundización

8. Analiza la gráfica de las siguientes funciones. Argumenta si existen o no sus inversas.

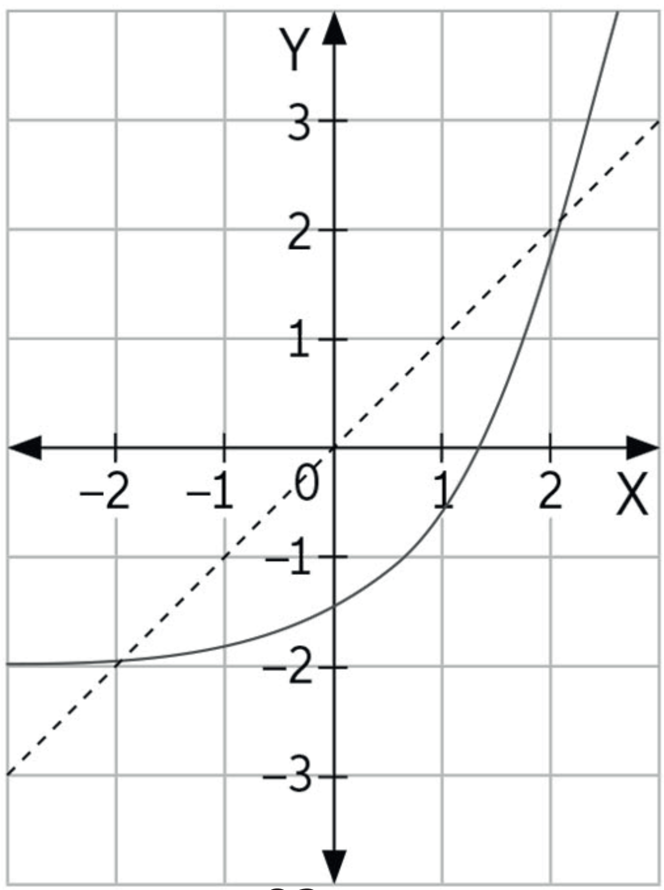
a.



b.



c.



▶ Para concluir

a. ¿En qué representación de funciones te es más fácil distinguir si la inversa de una función existe? ¿Por qué?

b. ¿Se puede obtener la gráfica de una función a partir de la de su inversa? Justifica.

Función inversa de la función lineal y afín

¿Qué es una función lineal? ¿En qué se diferencia de una función afín?

Objetivo: Determinar la inversa de la función lineal y afín en diversas situaciones.

Ciencias Sociales

1. Analiza el siguiente contexto. Luego, realiza las actividades.

   Se aumenta el precio de un producto por un 30% y después se lo rebaja en el mismo porcentaje.

a. ¿Es el precio final el mismo que el original? ¿Cómo lo comprobarías?

b. Determina una función f(x) que permita calcular el valor final de un artículo cuyo precio x aumentó en 30%.

Recuerda expresarlos como cambio porcentual.

c. Determina una función g(x) que permita calcular el valor final de un artículo cuyo precio x disminuye en 30%.

d. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de las funciones anteriores?

e. ¿Es g(x) la inversa de f(x)? Justifica.

f. Determina la función inversa de $f(x)$ y $g(x)$. Guíate por el siguiente procedimiento para determinar la inversa de $h(x) = 4x - 3$.

Paso 1: Reemplaza h(x) por y:

$$y = 4x - 3$$

Paso 2: Despeja la variable x.

$$\frac{y + 3}{4} = x$$

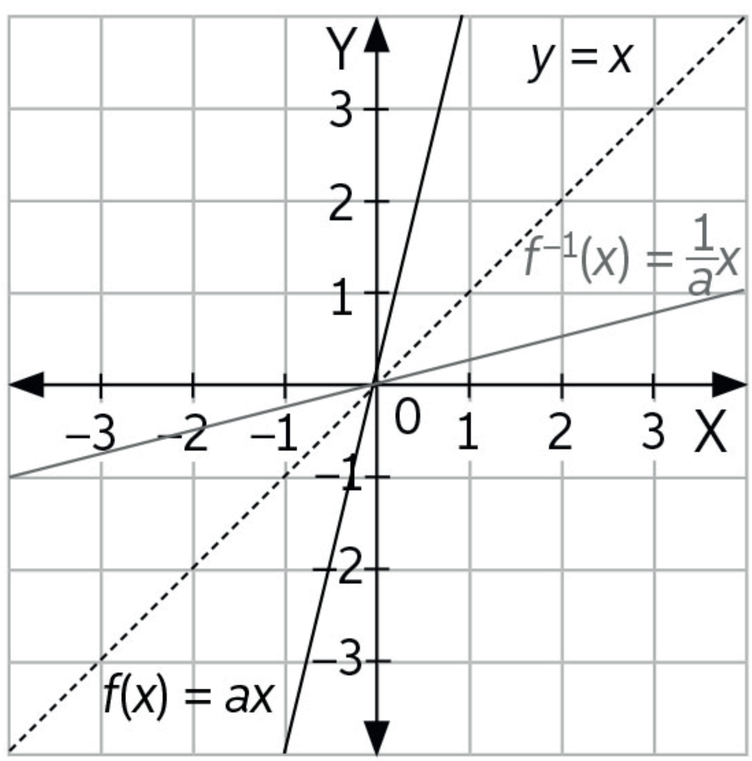
Paso 3: Intercambia las variables x e y

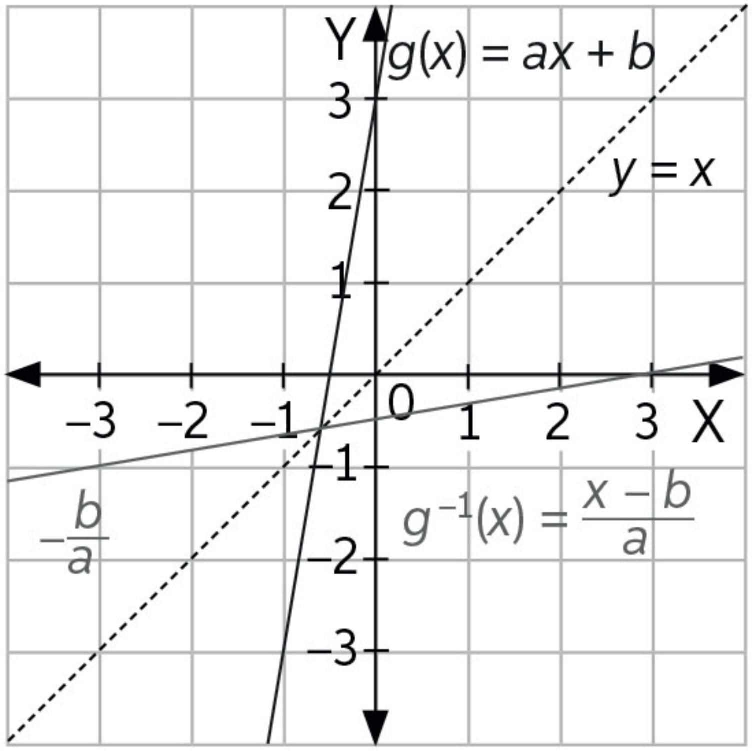
$$\frac{x + 3}{4} = y \rightarrow h^{-1}(x) = \frac{x + 3}{4}$$

g. ¿Cuál es la expresión algebraica para la función inversa de f(x)?, ¿y de g(x)? ¿En qué porcentaje se debe rebajar el precio aumentado para que sea igual al original?

¿Qué significado tiene gráficamente realizar el cambio de variables entre x e y? ¿Cuál es la nueva variable independiente?

Para la función lineal f(x) = ax, su función inversa es la función lineal $f^{-1}(x) = \frac{x}{a}$.





Para la función afín $g(\mathrm{x}) = a\mathrm{x} + b$, su inversa es la función afín $\mathrm{g}^{-1}(\mathrm{x}) = \dfrac{\mathrm{x} - \mathrm{b}}{\mathrm{a}}$.

2. Completa la siguiente tabla en tu cuaderno.

Descripción de f	Descripción de f^{-1}	Expresión algebraica de f	Expresión algebraica de f^{-1}
Multiplica cada número por 3	Divide cada número en 3	$f(x) = 3x$	$f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$
Divide cada número en 2			
Aumenta cada número en una unidad			
		$f(x)=2x + 4$	

De las funciones anteriores, ¿cuáles son lineales o afines? Justifica.

3. Encuentra la expresión de la función inversa en cada caso. Luego, comprueba tus resultados graficando en GeoGebra o en tu cuaderno.

a. $f(x) = 2x - 5$

b. $h(x) = 3x$

c. $a(t) = 9t - 2t + 3$

d. $b(t) = 4t - 2$

4. Sean las funciones f, g y h, tales que cumplen con:

- f es la función inversa de g.
- h es la función inversa de f.

- $g(x) = 16x + 40$

Realiza un esquema para ilustrar la situación.

a. ¿Qué relación puedes establecer entre estas funciones?

b. Determina las expresiones algebraicas para f y h.

5. Analiza las afirmaciones. Determina si son verdaderas o falsas y justifica.

a. Si una función lineal o afín es creciente, entonces su función inversa será decreciente.

b. Si la pendiente de una función lineal es 5, entonces la pendiente de su función inversa será $\frac{1}{25}$.

c. El punto de intersección con el eje Y de una función afín es el mismo para su función inversa.

d. La función $f(x) = 5x + 10$ y la función $g(x) = 10x - 5$ son funciones inversas.

e. Una función lineal siempre se intersecará con su función inversa en el origen del plano cartesiano.

6. Considera $f(x) = 1$ para realizar la siguiente actividad:

a. Realiza un diagrama sagital y una gráfica de la función. ¿Corresponde a una función afín?

b. Describe con tus palabras el proceso que hace f(x). ¿Existe el proceso inverso?

c. Refleja f(x) respecto a la recta y = x y describe el resultado. ¿Es función?

7. Determina los valores de p y q para las siguientes funciones y sus inversas.

a. $f(x) = 3x - 5$ y $f^{-1}(x) = px + q$

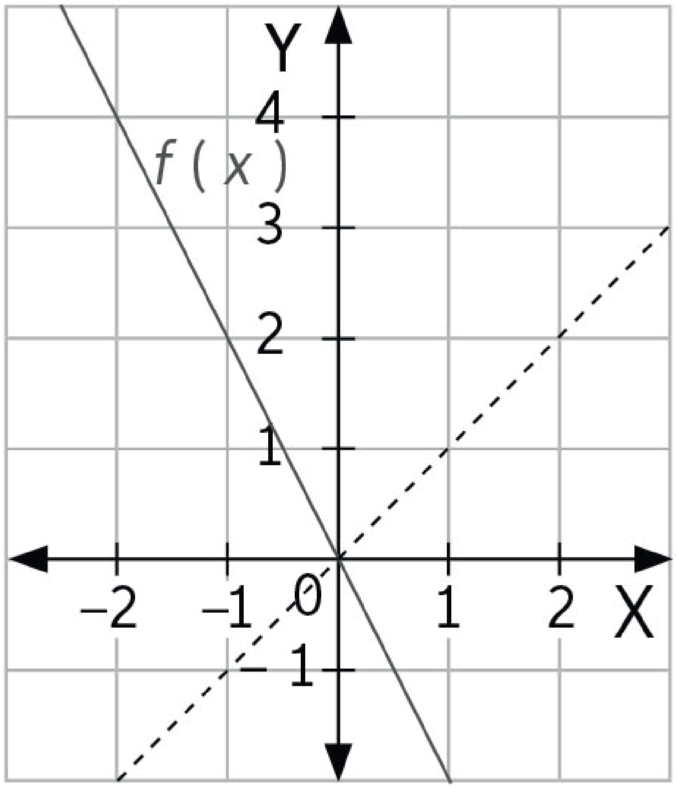
b. $g(x) = x - 3$ y $g^{-1}(x) = px - q$

c. $h(x) = px - 2$ y $h^{-1}(x) = 5x + \frac{q}{5}$

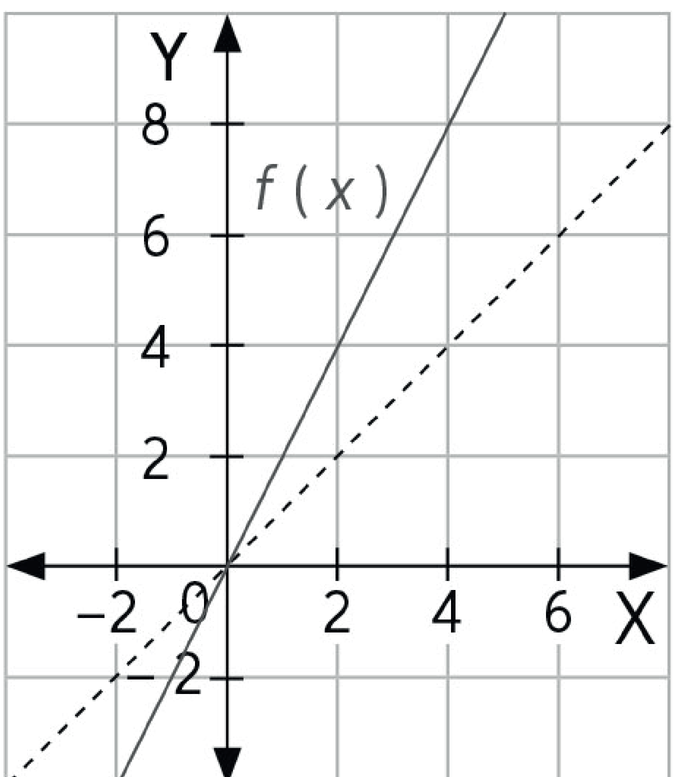
d. $i(x) = px + q$ y $i^{-1}(x) = \frac{3}{2} + 2x$

8. Establece la expresión algebraica de las siguientes funciones y luego su inversa.

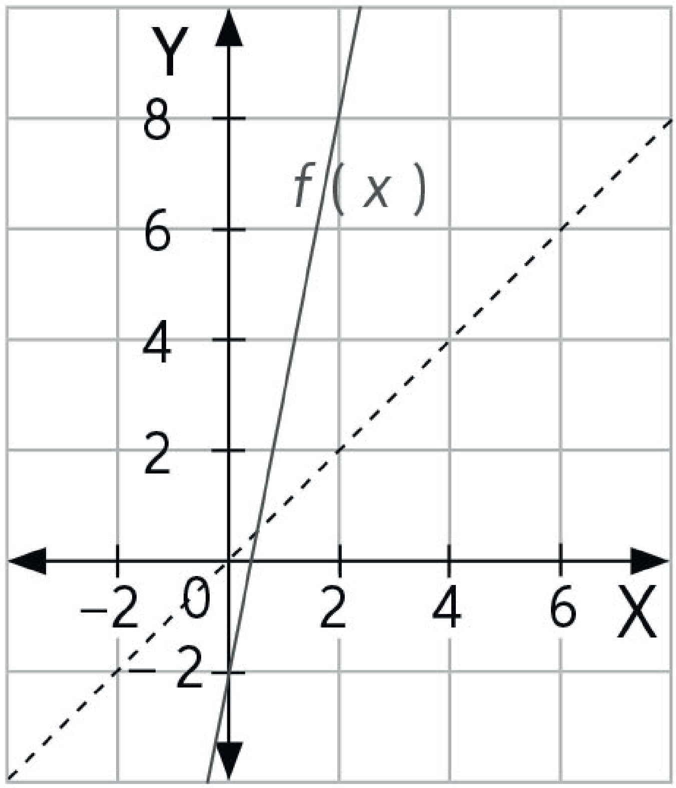
a.



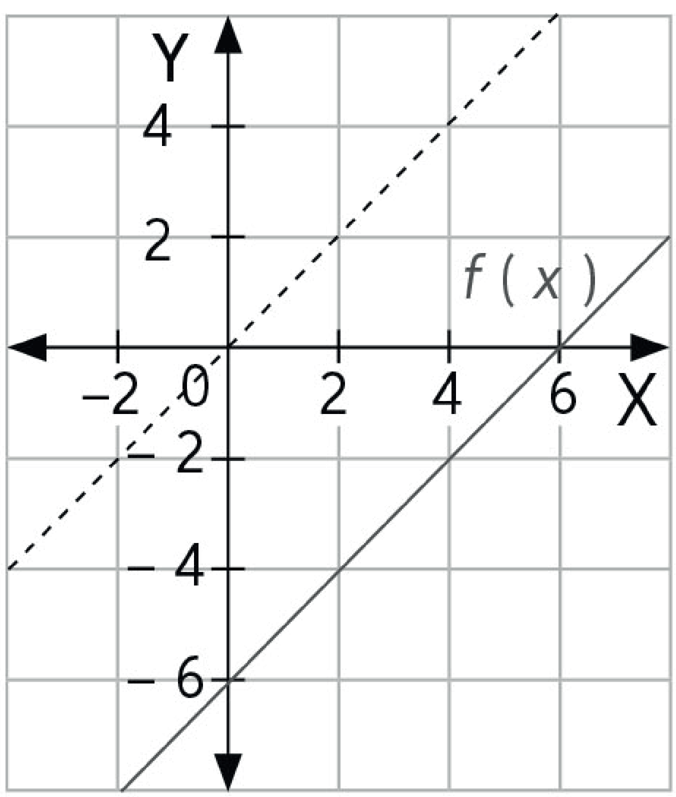
b.



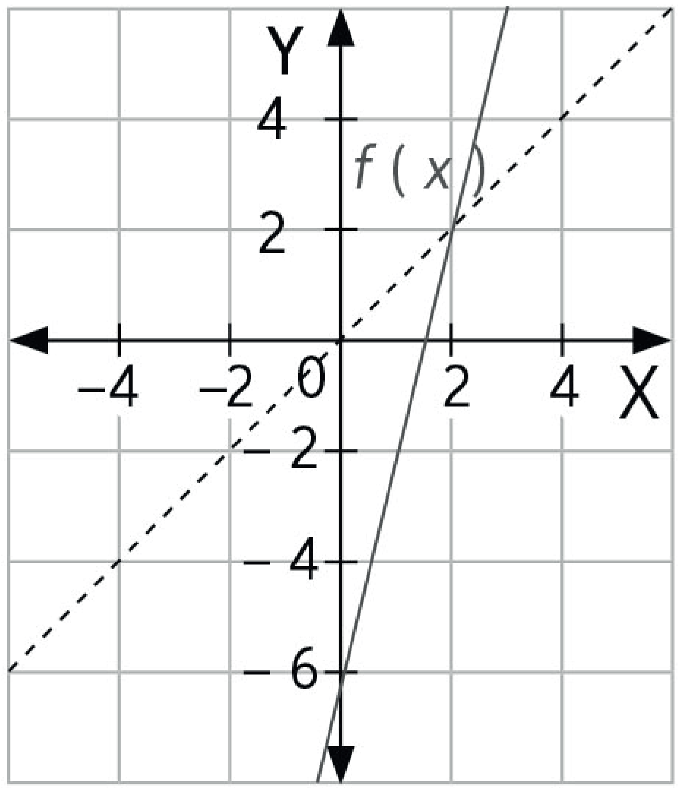
c.



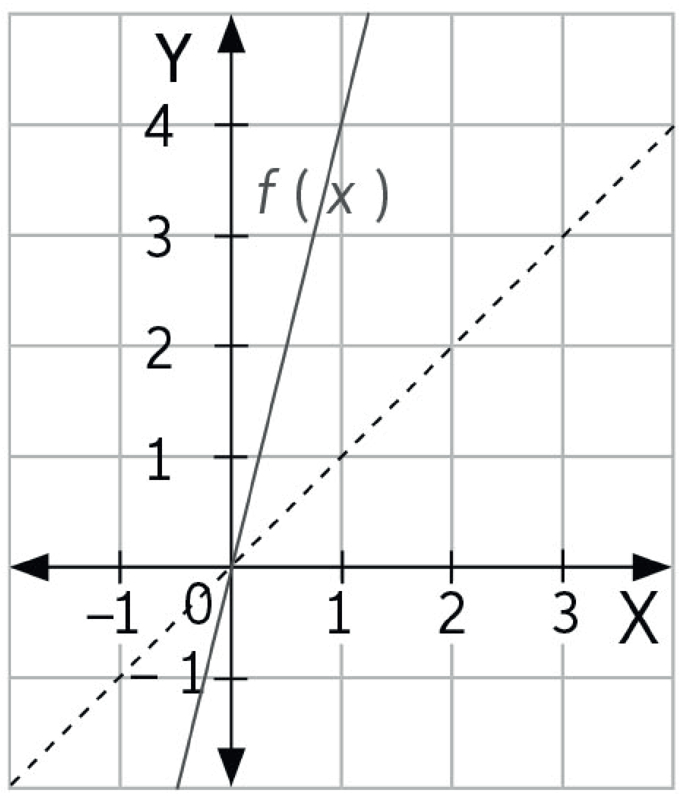
d.



e.



f.



9. Para arrendar una bicicleta se cobra una cuota básica de \$4.000 más \$1.000 por hora utilizada. Si x corresponde al número de horas de arriendo:

a. ¿Qué función f modela el cobro por el uso de la bicicleta en función de la cantidad de horas que se arrienda?

b. ¿Cuál es la función inversa de f? ¿Qué representa?

Ciencias naturales

10. Analiza la siguiente información y responde.

La temperatura es una magnitud que mide la cantidad de energía interna o calor que tiene un cuerpo. Cotidianamente se utilizan las escalas Celsius (°C) y Farenheit (°F), mientras que la escala Kelvin (K) es utilizada en disciplinas científicas.

La temperatura (teórica) mínima denominada “cero absoluto” corresponde al punto en que los átomos de un cuerpo se encuentran estáticos y es 0 K o –273,15°C.

La conversión de escalas de temperatura Celsius y Kelvin está dada por la función $c(x) = x - 273,15$. En ella, x corresponde a la temperatura en K y c(x) en °C.

a. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de c(x)?

b. Determina la función inversa de c(x).

c. Utiliza la función inversa para calcular la equivalencia en escala Kelvin de:

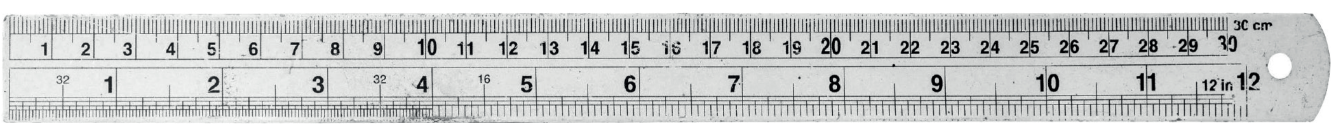
–200°C 20°C 35°C 200°C

d. Las escalas Celsius (°C) y Farenheit (°F) están relacionadas por la función $f(x) = \frac{1}{25}x + 32$. En ella, x corresponde a la temperatura en °C y $f(x)$ a la temperatura en °F. Determina la inversa de $f(x)$.

e. La novela Fahrenheit 451, de Ray Bradbury, tiene como subtítulo La temperatura a la que el papel de los libros se inflama y arde. ¿A qué temperatura en °C arde el papel?

f. ¿A qué temperatura en °C corresponden 100°F?

11. El Sistema Internacional de Unidades utiliza metros (m) como la unidad de distancia. Sin embargo, los países anglosajones utilizan pies y pulgadas como unidades para medir.



Sabiendo que 1 metro equivale a 3,28084 pies y 1 pie es equivalente a 12 pulgadas:

a. Construye una función para transformar x metros a pies y otra para transformar x metros a pulgadas. Luego, determina sus inversas.

b. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de las funciones anteriores?

▶ Para concluir

a. ¿En qué representación de funciones te es más fácil distinguir si la inversa de una función existe? ¿Por qué?

b. ¿Se puede obtener la gráfica de una función a partir de su inversa? Justifica.

Función inversa de la función cuadrática

Si la función cuadrática convierte una variable en el cuadrado de ella, ¿cuál es el proceso inverso?

Objetivo: Determinar de forma gráfica y analítica la función inversa de una función cuadrática.

Ciencias naturales

1. Analiza la siguiente situación. Luego, realiza las actividades.

Mientras más largas sean las cadenas o las cuerdas de un columpio, mayor es su periodo, esto es, el tiempo que demora en volver a una posición.

En física, un columpio corresponde a un péndulo simple. La función que describe la relación entre el largo del péndulo l (en metros) y el periodo T (en segundos) es:

$$l(T) = \frac{g}{4\pi^2} \cdot T^2$$

Donde g corresponde a la aceleración de gravedad terrestre.

a. ¿Cuál es el coeficiente a de la función cuadrática?

Aproxima $\frac{g}{4\pi^2} \approx 1$

b. Discutan en parejas: ¿qué valores podrían tomar el largo l y el periodo T?

c. La función representa la longitud l(T) que debe tener el péndulo según el periodo. ¿Cómo se interpreta su inversa T(l)?

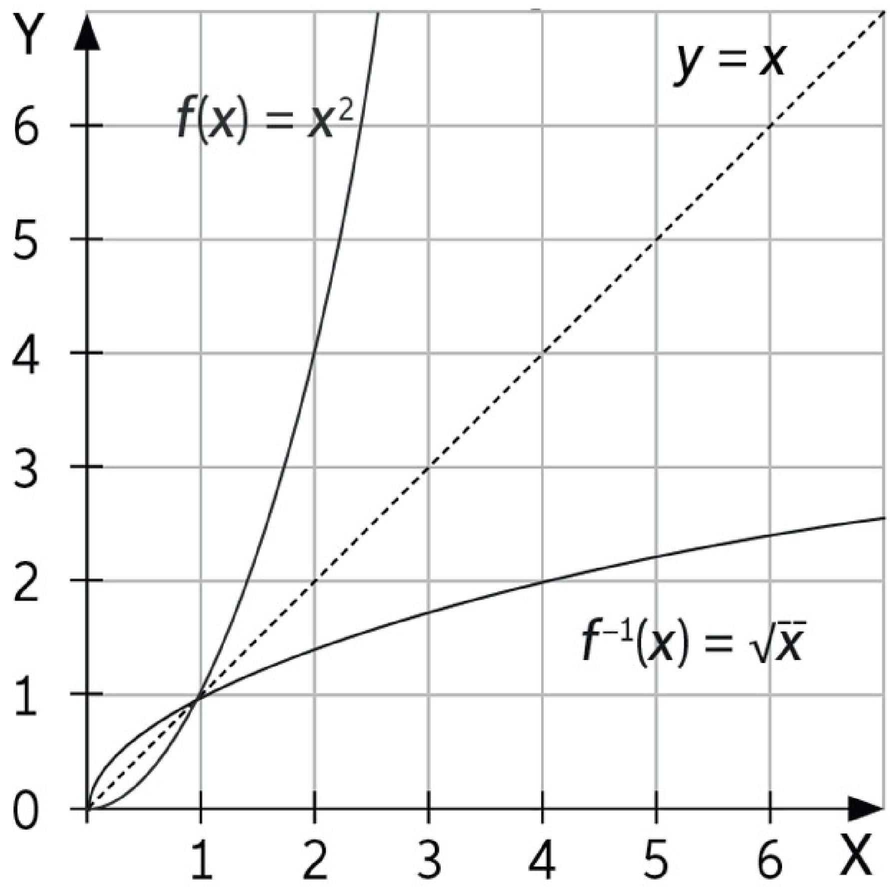
d. Un péndulo mide 1 metro. ¿Es correcto afirmar que su periodo puede ser –2 o 2 segundos? Justifica.

e. Determina su inversa de forma algebraica. Utiliza los mismos pasos para determinar la inversa algebraica de las funciones lineal y afín.

¿Cuál fue la importancia de restringir el dominio en el ejercicio anterior?

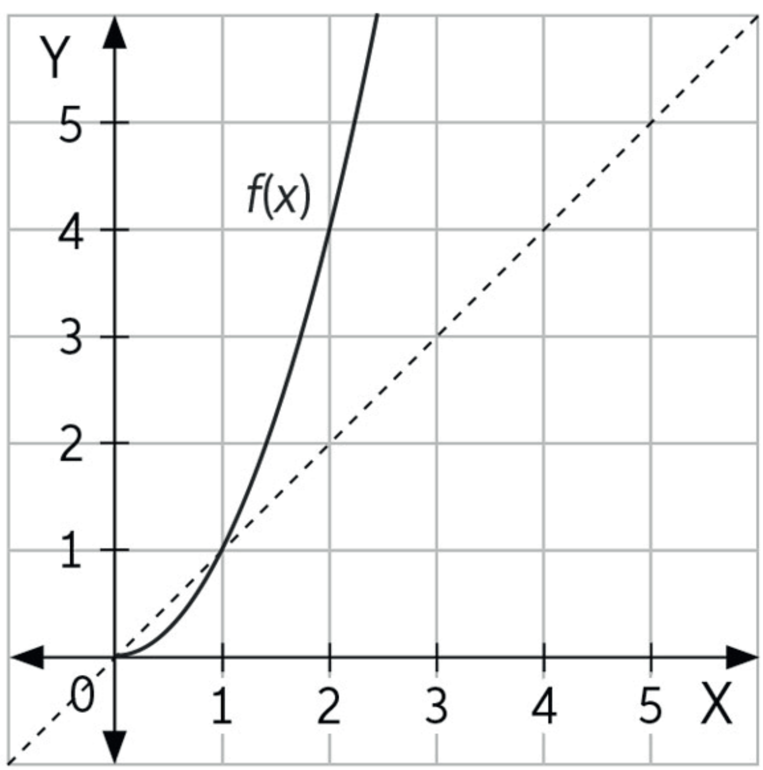
La función cuadrática $f(x) = x^2$, cuyo dominio es $\mathbb{R}$, no tiene función inversa. Esto, porque existen dos elementos del dominio que tienen la misma imagen (por ejemplo: $f(-1) = 1$ y $f(1) = 1$). Por lo tanto, no puede definirse la inversa porque para $f^{-1}(1)$ existen dos valores posibles. En ese caso, la inversa no es una función.

Acotando su dominio a los números reales positivos y el cero, se define la función $f(x)\colon \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, tal que $f(x) = x^2$. Su función inversa es $f^{-1}(x)\colon \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, tal que $f(x) = \sqrt{x}$, llamada función raíz cuadrada.


Y
X
$f(x) = x^2$
$y = x$
$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
0
1
2
3
4
5
6
1
2
3
4
5
6

2. Considera la siguiente función cuadrática f(x): $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, tal que $f(x) = x^2$.

x	**f(x)**
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16



a. Considerando los valores anteriores, determina los pares ordenados que pertenecen a f−1(x).

b. Grafica en tu cuaderno f(x) y la recta y = x.

c. Esboza el grafico de $f^{-1}(x)$.

d. Determina algebraicamente la función inversa. Guíate por los siguientes pasos.

Paso 1: Reemplaza f(x) por y.

Paso 2: Despeja la variable x.

Paso 3: Intercambia las variables x e y.

3. Encuentra la expresión de la función inversa en cada caso. Luego, comprueba tus resultados graficando en GeoGebra. Considera como dominio y recorrido de las funciones.

a. $f(x) = 6x^2$

b. $g(x) = \frac{5}{4}x^2$

c. $h(x) = \left(\frac{3}{5}x\right)^2$

d. $p(x) = 0{,}16x^2$

e. $q(x) = \sqrt{10x}$

f. $s(x) = 3\sqrt{2x}$

g. $r(x) = 2\sqrt{\frac{2}{5}}\, x$

h. $t(x) = 3\sqrt{\frac{1}{2}}\, x$

4. Analiza las afirmaciones. Determina si son verdaderas o falsas. Justifica considerando como dominio y recorrido de todas funciones.

a. La gráfica de la función $f(x) = x^2$ y la de su función inversa se intersecan en el punto (1, 1).

b. Al aumentar el valor de a en la función $f(x) = ax^2$, la gráfica de su función inversa estará más próxima al eje X.

c. Tanto la gráfica de $f(x) = x^2$ como la de su inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ se encuentran en el primer cuadrante del plano cartesiano.

d. Si los puntos de una función raíz cuadrada son (a, b), entonces los puntos de su función inversa son (b^2, a^2).

e. La función inversa de $f(x) = 3x^2$ es $f^{-1}(x) = \sqrt{3x}$.

5. Determina el valor de k para que $g(x)$ sea la función inversa de f(x). Considera $\mathbb{R}_0^+$ como dominio y recorrido de ambas funciones

a. $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{k + 2}}$

b. $f(x) = \dfrac{1}{8}x^2$ y $g(x) = (1 - k)\sqrt{x}$

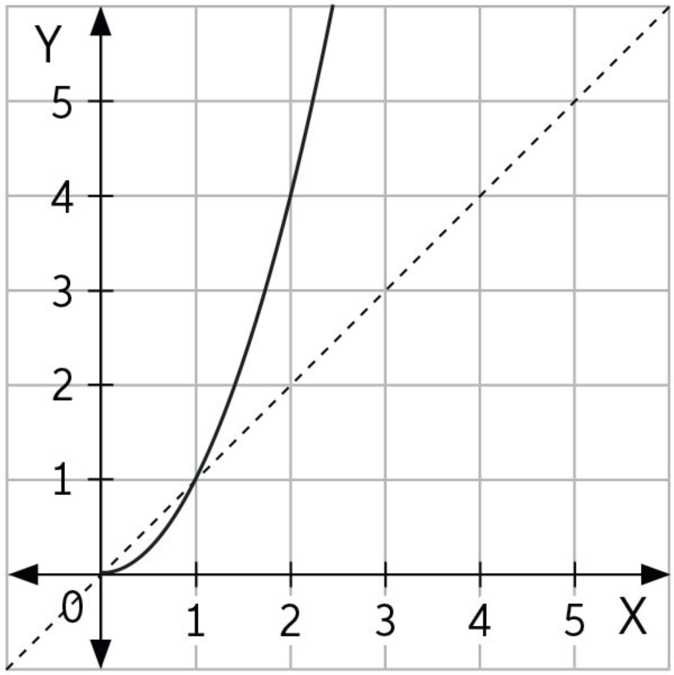
c. $f(x) = \dfrac{4}{5}x^2$ y $g(x) = \sqrt{\dfrac{k}{k + 1}x}$

d. $f(x) = 81x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{k}\sqrt{x}$

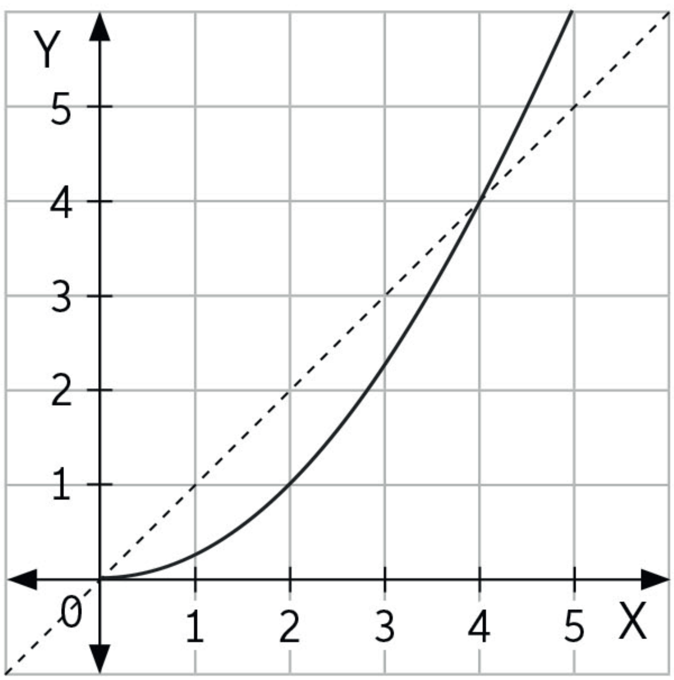
e. $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2$ y $g(x) = (k - 2)\sqrt{x}$

6. Establece la expresión algebraica de las siguientes funciones y luego su inversa.

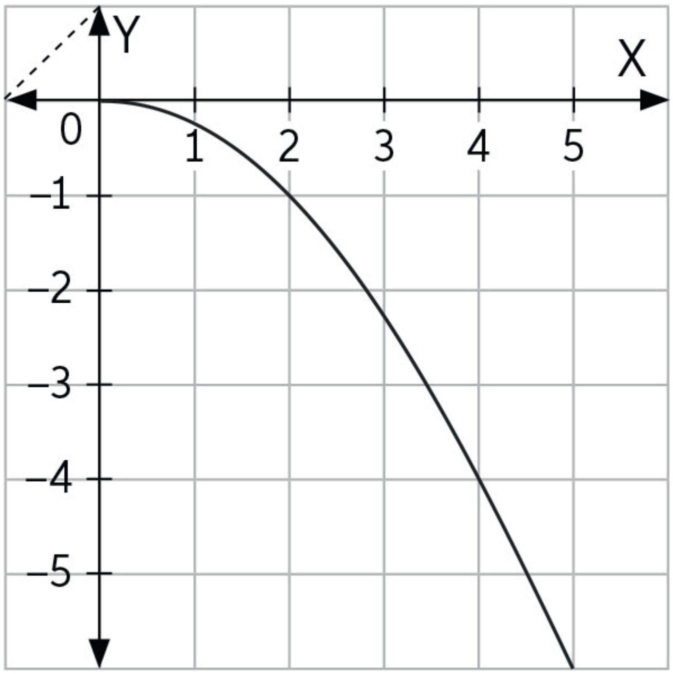
a.



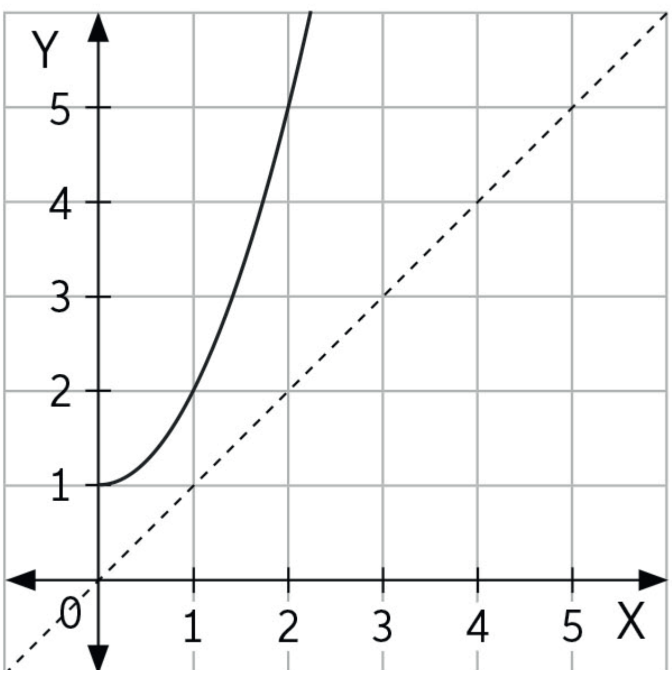
b.



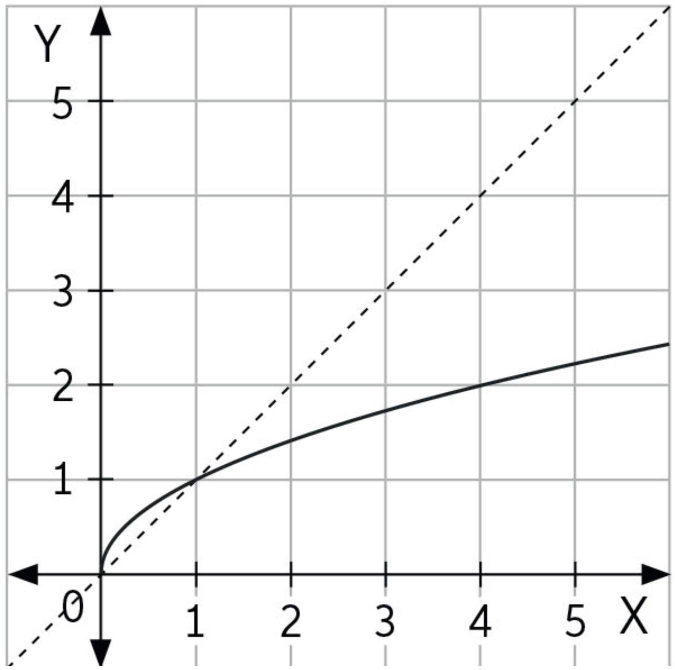
c.



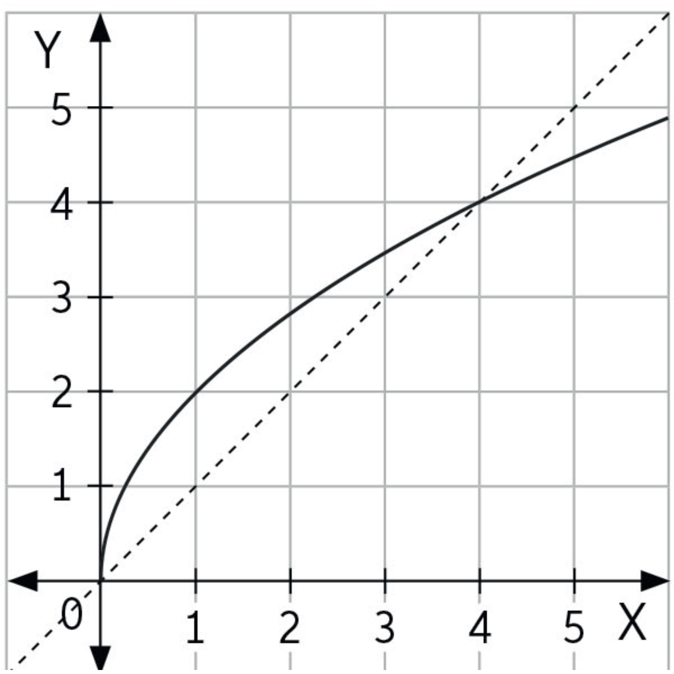
d.



e.



f.



7. Analiza las siguientes funciones. Determina, en cada caso, cuál de las funciones del gráfico corresponde a su función inversa.

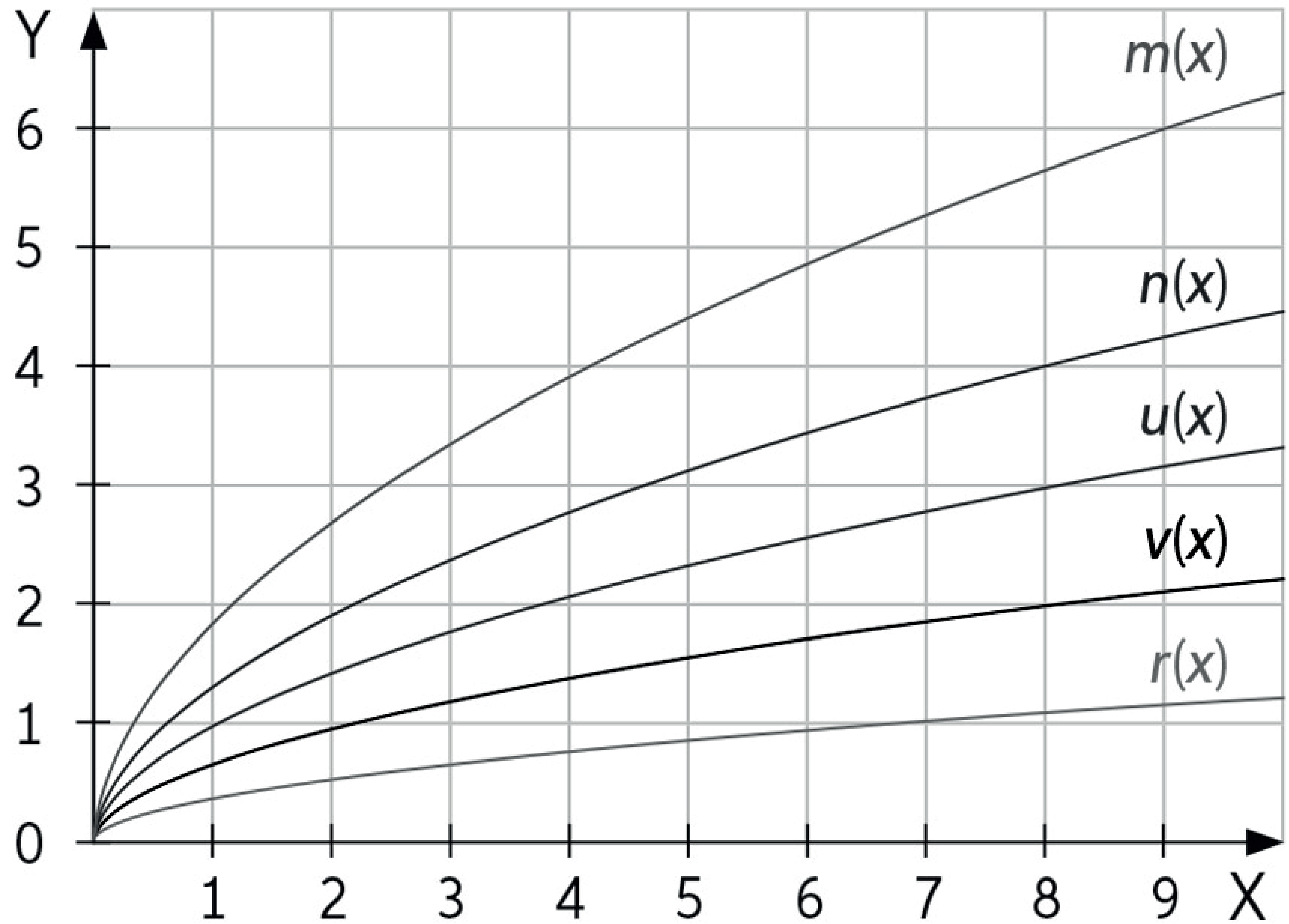
a. $f(x) = \frac{1}{4}x^2$

b. $g(x) = \frac{8}{9}x^2$

c. $h(x) = 2x^2$

d. $p(x) = 7x^2$

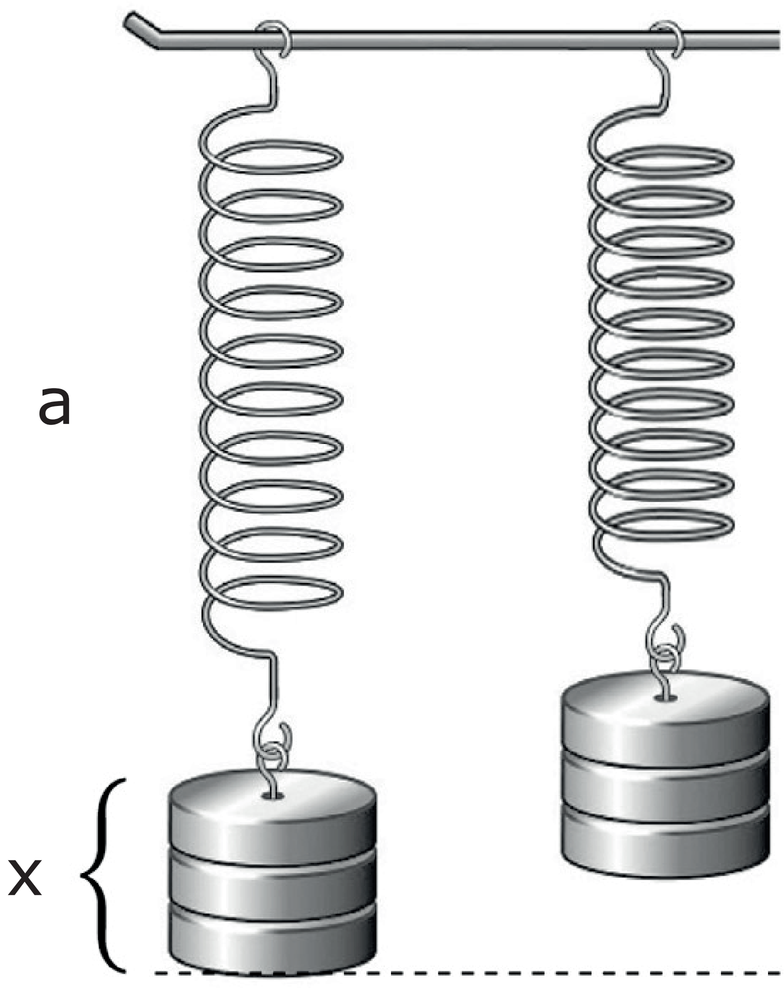
e. $q(x) = \frac{1}{2}x^2$



Física

8. La energía potencial elástica de cierto resorte está dada por la función $U(x) = 200x^2$. En ella, U es la energía medida en Joule y x el estiramiento del resorte medido en metros.

La energía potencial elástica corresponde a la energía acumulada por un resorte cuando es estirado o comprimido.



a. Determina la función inversa x(U). ¿Cómo se interpreta?

b. Si la energía potencial elástica del resorte es de 8 Joule, ¿cuánto se habrá estirado?

Física

9. La distancia que recorre Eduardo en el maratón de Santiago está dada por la función $d(t) = 0,9\sqrt{t}$. En ella, d representa la distancia (en metros) recorrida y t es el tiempo transcurrido (en minutos) una vez iniciada la carrera. Eduardo está participando en la carrera de 5 kilómetros:

a. Transcurridos 5 minutos, ¿cuánta distancia ha recorrido Eduardo?

Recuerda que 60 segundos equivalen a 1 minuto.

b. Transcurridos 30 minutos, ¿cuánta distancia le falta a Eduardo por recorrer?

c. Determina la función que permite conocer el tiempo que tarda Eduardo en recorrer cierta distancia.

d. Cuando le falta un kilómetro por recorrer, ¿cuánto tiempo ha demorado?

e. ¿Cuánto tardará Eduardo en recorrer la mitad de la competencia?

f. ¿Cuánto se demorará en terminar la carrera?

▶ Para concluir

a. ¿Qué semejanzas y diferencias hay entre los procedimiento para determinar algebraicamente la inversa de una función afín y una cuadrática?

a. ¿Por qué fue necesario restringir el dominio de la función cuadrática?

Antes de continuar: Evaluación intermedia

Mensajes secretos

Materiales:

- Cartulina u hoja de bloc.
- Tijeras.
- Regla.

La criptografía es el estudio y la creación de "alfabetos secretos". Sus técnicas provienen de la Antigua Grecia y hoy tienen gran importancia en el área informática.

En las siguientes tablas se presentan tres alfabetos secretos. Cada uno corresponde a transformaciones del alfabeto anterior.

Letra	**H**	**O**	**L**	**A**
↓	↓	↓	↓	↓
α	8	15	?	?
↓	↓	↓	↓	↓
β	–5	2	?	?

Paso 1: En parejas, completen la tabla anterior con los valores que corresponden.

a. ¿Cómo pudieron completar la tabla de arriba? Expliquen.

$$f : \alpha \to \beta \qquad g : \beta \to \sigma$$
$$f(\alpha) = \alpha - 13 \qquad g(\beta) = \beta^2$$

Letra		α	$\to$	β	$\to$	σ
A	$\to$	1	$\to$	-12	$\to$	144
B	$\to$	2	$\to$	-11	$\to$	121
C	$\to$	3	$\to$	-10	$\to$	100
D	$\to$	4	$\to$	-9	$\to$	81
E	$\to$	5	$\to$	-8	$\to$	64
F	$\to$	6	$\to$	-7	$\to$	49
G	$\to$	7	$\to$	-6	$\to$	36
H	$\to$	8	$\to$	-5	$\to$	25
I	$\to$	9	$\to$	-4	$\to$	16
J	$\to$	10	$\to$	-3	$\to$	9

Letra		α		β		σ
K	→	11	→	-2	→	4
L	→	12	→	-1	→	1
M	→	13	→	0	→	0
N	→	14	→	1	→	1
O	→	15	→	2	→	4
P	→	16	→	3	→	9
Q	→	17	→	4	→	16
R	→	18	→	5	→	25
S	→	19	→	6	→	36
T	→	20	→	7	→	49
U	→	21	→	8	→	64
V	→	22	→	9	→	81
W	→	23	→	10	→	100
X	→	24	→	11	→	121
Y	→	25	→	12	→	144
Z	→	26	→	13	→	169

Paso 2: Construyan 6 tarjetas de 8 x 5 cm y divídanlas.

Paso 3: Escriban una palabra de al menos 6 letras por tarjeta. Al reverso, codifíquenla usando los alfabetos α, β y σ. Luego, intercámbienlas e intenten descifrarla sin ayuda.

b. ¿Qué estrategias utilizaron para descifrar las palabras intercambiadas?

c. ¿Qué ocurre cuando se trata de invertir un número distinto del 0 en el alfabeto σ? ¿Por qué sucede esto?

d. ¿Existen las funciones inversas de f y de g?

Paso 5: Utilizando lo discutido, creen su propio alfabeto secreto mediante una función invertible y repitan la actividad.

▶ Reflexiono

a. ¿Qué tipo de preguntas te fue más difícil de responder? ¿Por qué?

b. ¿Cómo resultó el juego en parejas? ¿Por qué?

¿Qué aprendí?

Elsa posee una pequeña empresa de compra y venta de antigüedades. Ella se dedica a recolectar antigüedades en distintos lugares y reparar aquellos objetos dañados, para luego venderlos en su tienda. Su empresa se llama “El Rincón del Pasado” y tiene solo 6 empleados:

Sus sueldos mensuales son:

- Gerente de ventas: $1.000.000.
- Técnicos Calificados (2): $650.000 c/u.
- Empleados sin Calificación (3): $350.000 c/u.

Evalúa los conocimientos adquiridos a lo largo de la Unidad realizando las siguientes actividades.

1. Para el siguiente año, Elsa está estudiando la idea de aumentar en 5% el sueldo de sus trabajadores.

a. Calcula cuánto dinero necesitará Elsa para pagar mensualmente ese aumento.

b. Si Elsa dispone de $ 2.000.000 al año para beneficios, ¿podrá darles este aumento? Justifica tu respuesta.

c. Imagina que el aumento dependa de factores externos (como el IPC), y que cada año deba aumentar en 1%. ¿Cuánto dinero extra deberá tener cada año para pagar los sueldos de los 6 trabajadores?

d. En 2018 Elsa obtuvo una ganancia de \$25.800.000 y en 2019, \$24.500.000. ¿Cuál fue el cambio porcentual de su ganancia entre esos dos años? ¿Qué significado tiene este resultado?

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado. Utiliza el material creado en clases para ayudarte:

a. $x^2 = 4x + 5$

b. $9x^2 + 7x = 0$

c. $x^2 = 9$

d. $-x^2 - 2x = 0$

e. $3x^2 + 36x + 81 = 0$

f. $\frac{121}{9}x^2 - \frac{81}{64} = 0$

g. $(-x + 8)\ (3x - 3) = 0$

h. $20 - 2x^2 + 3x = 0$

i. $-25 = -x^2$

3. Resuelve los siguientes problemas utilizando ecuaciones de segundo grado:

a. El cateto mayor de un triángulo rectángulo mide el doble del menor aumentado en 6. Si su hipotenusa mide 39, ¿cuál es la medida del cateto menor?

b. El perímetro de un rectángulo mide 24 m y su área, 35 m^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

c. Halla los dos números tales que sumados dan 11 y multiplicados dan 24. Prueba más de 1 método para este problema.

4. Analiza las siguientes funciones cuadráticas. Encuentra lo solicitado en cada caso:

a. Una empresa determina que la cantidad de dinero que ganará este año en miles de dólares, está dada por la función $G(x)= 5000 + 1000x - 5x^2$. En ella, x representa el dinero invertido en publicidad. ¿Cuánto debe invertir en este ítem para que la ganancia sea máxima? ¿Cuál es esa ganancia?

b. Un objeto se lanza hacia arriba con una velocidad v_0 en m/s. La altura H(*t*) que alcanza (en metros) se determina en función del tiempo t (segundos transcurridos) con la función: $H(t) = -16t^2 + v_0 \cdot t$. Determina el valor de v0 para que la altura máxima sea de 300 metros.

c. Desde un globo aerostático que va subiendo cae un objeto. La altura en metros del objeto (h) respecto del tiempo t está dada por: $h(t) = 80 - 4{,}9t^2$.

- ¿A qué altura se encontraba el objeto al momento de caer del globo?
- ¿Qué altura tendrá 4 segundos después de caer?

- ¿Qué distancia recorrió el paquete a los 2 segundos?
- ¿Cuánto se demora el objeto en llegar al suelo?

5. Determina si las siguientes funciones poseen función inversa. En caso afirmativo, calcula su inversa. En caso contrario, justifica.

a. $f(x) = 2x + 1$

b. $g(x) = \dfrac{x - 1}{2x + 3}$

c. $h(x) = 2x^2 - 5$

d. $i(x) = 2 - 3x^2$

e. $j(x) = \sqrt{4x + 4}$

f. $k(x) = x^2 + 2x - 35$

▶ Reflexiono

- ¿Qué contenidos te resultaron más complicados en esta evaluación? ¿Cómo podrías mejorar?

- ¿Qué fortalezas tuviste durante el desarrollo de la Unidad? ¿Qué puedes mejorar?

Unidad 2: Síntesis

Álgebra y Funciones

¿Qué es el cambio porcentual?

El aumento o disminución porcentual de una variable respecto de un valor anterior.

¿Cómo se calcula el cambio porcentual constante?

Con la ecuación recursiva

$f(t + 1) = I_v \cdot f(t)$, donde t representa el tiempo u Iv representa el índice de variación.

¿Qué es una ecuación de segundo grado?

Es una ecuación que se puede expresar de la forma

$ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c números reales y $a \neq 0$. El máximo exponente de la variable es 2.

¿Cómo se resuelve una ecuación de segundo grado?

- Factorización
- Completación de cuadrados
- Fórmula general $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

¿Cuántas soluciones tiene una ecuación cuadrática? ¿Cuáles son sus propiedades? Tiene 2 soluciones x_1 y x_2 y cumplen que:

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

¿Cómo se calcula el discriminante de una ecuación? ¿Qué información entrega?

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$ Sol. Reales distintas

$\Delta = 0$ Sol. Reales iguales

$\Delta < 0$ Sol. No reales

¿Qué es la función cuadrática?

Es una función cuya regla se puede expresar como f(x) = ax2 + bx + c, con a, b y c ∈ ℝ. Su dominio es ℝ y su recorrido es un intervalo de R.

¿Qué características tiene la gráfica de ecuación cuadrática?

Su gráfica corresponde a una parábola. Ésta puede ser cóncava hacia arriba si a > 0. También puede ser cóncava hacia abajo si a < 0 y el vértice de la parábola indica el valor mínimo o máximo de la función según corresponda.

¿Qué es la función inversa?

Una función denominada f^{-1}, en que “y” es pre imagen de “x”, respecto a una ecuación “f”, en que cada preimagen x tiene una única imagen “y”.