ADAPTACIÓN MACROTIPO

Texto del estudiante Matemática 3º Medio

Autores

Robbie Barrera Y.

María Patricia Romante F.

Gladys Osorio R.

Patricio Norambuena M.

Daniela Gaete P.

Patricia Ramírez F.

Yasna Hurtado L.

Editorial SM

Biblioteca Central para ciegos

Santiago Chile 2020

UNIDAD 1

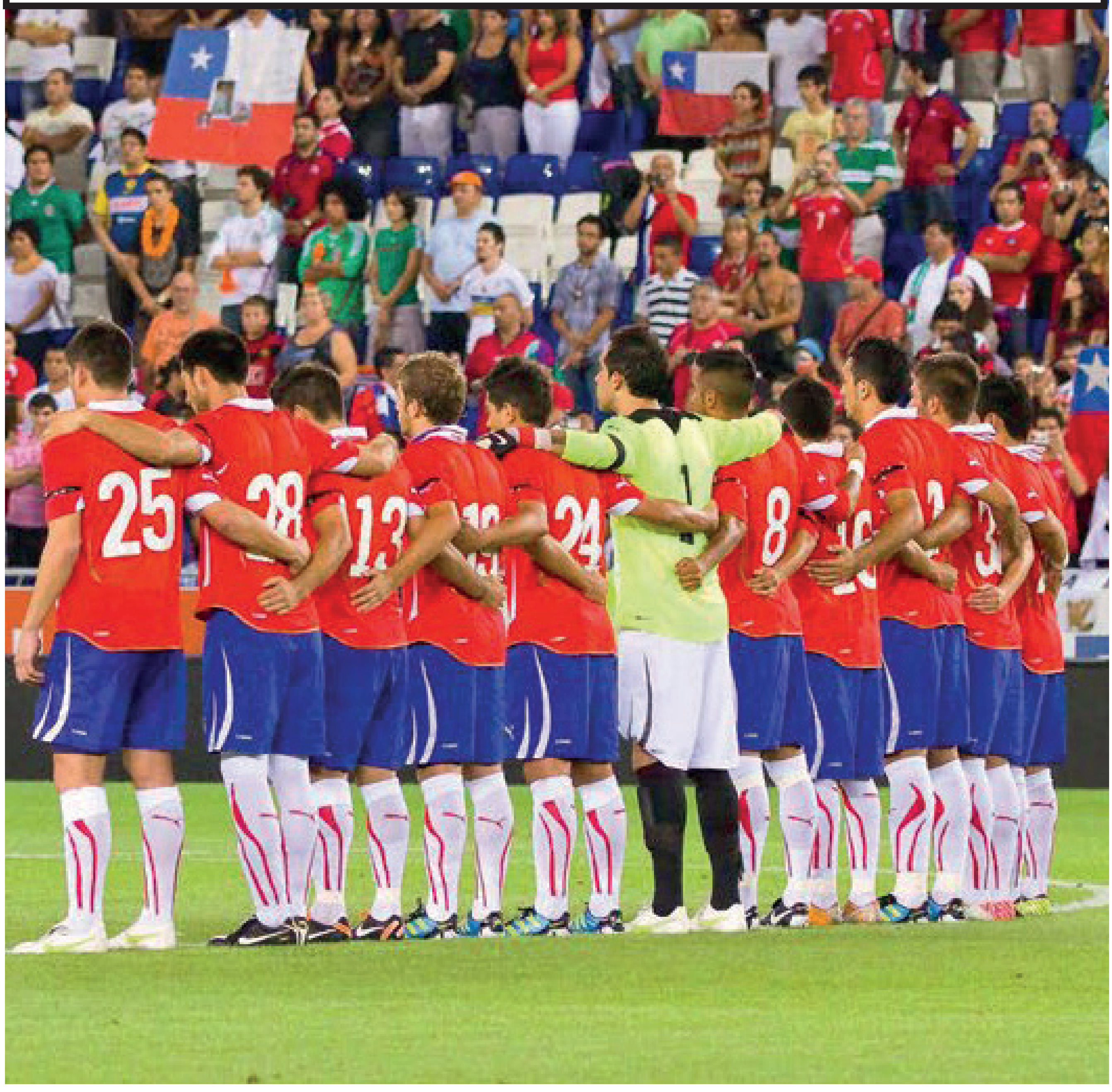
Pág.

Unidad 3

Unidad 4

UNIDAD 1

LA TOMA DE DECISIONES EN SITUACIONES DE INCERTEZA



2

Estadística y probabilidades

En parejas, observen las imagenes. Luego, respondan:

Marcelo Díaz
(centrocampista)
Estatura: 1,66 m

Gary Medel
(defensa)
Estatura: 1,71 m

Arturo Vidal
(centrocampista)
Estatura: 1,80 m

Alexis Sánchez
(delatero)

Estatura: 1,69 m

1. ¿Cómo describirías la estatura de los jugadores de la selección chilena de fútbol de 2011 (camisetas rojas)? Comparte tu respuesta con tu curso.

2. ¿Qué medida de tendencia central piensan que los ayudaría a determinar si las estaturas de los jugadores son homogéneas? Justifiquen su respuesta.

3. Si el promedio de las estaturas de la actual selección chilena es aproximadamente 177,3 cm y los jugadores de las camisetas blancas son parte del equipo, ¿quién de ellos se acerca más a la estatura promedio?, ¿quién se aleja más?

4. Si el DT de la selección debe decidir por un jugador para lanzar un penal, ¿qué criterio creen que utilizará para determinar a quienes elegir? Den argumentos que fundamenten tu respuesta.

En esta Unidad estudiarás y aprenderás acerca de:

- Toma de decisiones aplicando medidas de dispersión de datos.
- Toma de decisiones aplicando probabilidades condicionales.

6

Activo lo que sé

Evaluación diagnóstica

Realiza las siguientes actividades para activar tus conocimientos previos sobre la Unidad.

1. Calcula el promedio, la mediana y la moda de los siguientes datos.

Edad (en años) de un grupo de 10 personas

10 – 25 – 34 – 20 – 44 – 23 – 44 – 43 – 21 – 18

2. Calcula las medidas de tendencia central para los datos organizados en la siguiente tabla:

Masa corporal estudiantes de 1° medio	
Masa corporal (kg)	Frecuencia
[50, 55[	6
[55, 60[	13
[60, 65[	9
[65, 70[	8
[70, 75]	4

Educación Física y Salud

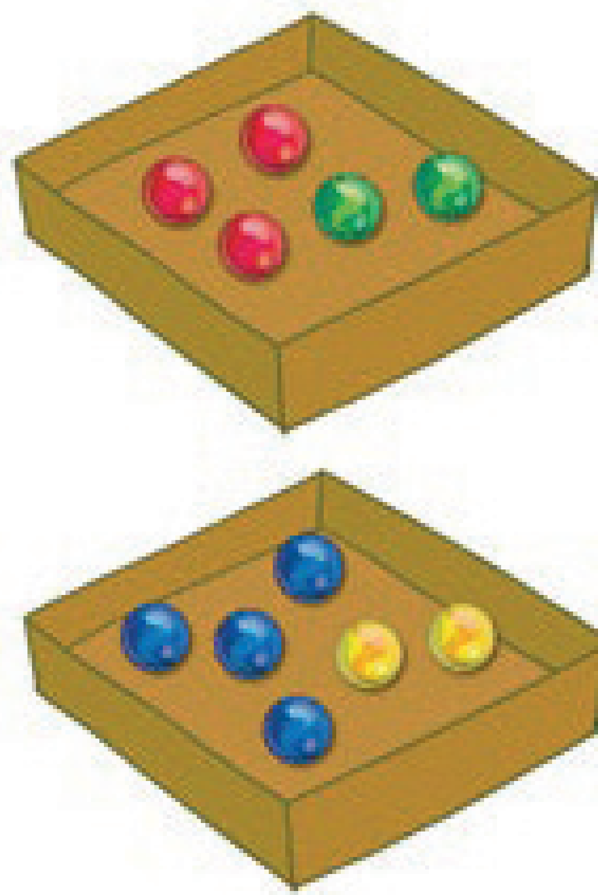
3. El promedio de estatura de 7 jugadores de un equipo de básquetbol es igual a la estatura del jugador de la imagen. Al ordenarlos del más alto al más bajo, cada uno mide 2 cm menos que el anterior. ¿Cuánto mide el más bajo?

4. Calcula e interpreta los cuartiles del siguiente conjunto de datos:

2	11	8	15	7	12	7	13	14	12	7	0
11	0	7	4	7	5	8	4	8	6	1	6

5. Lucía está remodelando su habitación. Para ello, pintará las paredes de verde, rosado o amarillo, la puerta café o blanca y colgará una copia de un cuadro de Picasso o Dalí.¿De cuantas maneras diferentes puede remodelar su habitación realizando todos los cambios?

6. Se dispone de 2 cajas con fichas de colores, como muestra la figura, y se extrae al azar una ficha de cada una.



a. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha roja y una azul?

b. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha roja y una amarilla?

c. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha verde y una no azul?

Reflexiono

• Con respecto a tu desempeño en esta evaluación, ¿qué te resultó más fácil y más difícil de responder?, ¿por qué?

• ¿Reconoces los contenidos trabajados?, ¿cuáles de ellos crees que debes repasar antes de continuar?

Lección 1

Toma de decisiones aplicando medidas de dispersión de datos

Objetivo: Analizar los datos de situaciones usando medidas de dispersión y tomar decisiones a partir de ello.

Medidas de dispersión

¿Como calculas el promedio o media aritmética de un conjunto de datos?

¿A qué piensas que se refiere el concepto de dispersión referido a un conjunto de datos?

1. Observa la siguiente situación. Luego, realiza las actividades.

El entrenador de un equipo de natación debe elegir su representante para la próxima competencia de 100 m en estilo libre. Para ello, cuenta con información consistente en el tiempo, en segundos, de las dos postulantes en las 5 últimas carreras en este estilo.

Competencias de Daniela	
N° de carrera	Tiempo (s)
1	64
2	58
3	68
4	62
5	65

Competencia de Bárbara	
N° de carrera	Tiempo (s)
1	69
2	63
3	65
4	50
5	70

a. ¿Cuál es el tiempo promedio de Daniela en las últimas 5 carreras de 100 m estilo libre?, ¿y el de Bárbara?

b. ¿Cómo son los promedios de Daniela y Bárbara?

c. ¿A quién debiera elegir el entrenador para participar en la competencia?, ¿por qué?

14

La media aritmética de un conjunto de datos $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ es

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

Las **medidas de dispersión** sirven para determinar si los datos se encuentran en torno a la media o si están muy dispersos. Para cuantificar la dispersión, estudiaremos las medidas más conocidas: el **rango**, la **desviación media**, la **varianza** y la **desviación estándar**.

El rango (R) corresponde a la diferencia entre el mayor y el menor de los datos de la distribución. Esta medida indica de alguna manera cuán dispersos están los datos de la distribución.

$$R = X_{máx} - X_{min}$$

Por ejemplo: en el caso anterior, si se denotan por R_1 y R_2 los rangos de los tiempos de Daniela y Bárbara respectivamente, se tiene:

$$R_1 = X_{máx} - X_{min} = 68 - 58 = 10 \rightarrow R_1 = 10 \text{ s}$$

$$R_2 = X_{máx} - X_{min} = 70 - 50 = 20 \rightarrow R_2 = 20 \text{ s}$$

Esto da indicios de que los tiempos de Daniela pueden ser menos dispersos que los de Bárbara. Sin embargo, no es posible concluir de inmediato: debemos disponer de más información.

2. Analiza los pasos que realiza el entrenador para comparar los tiempos de las competencias de Daniela con respecto a su tiempo promedio.

Paso 1 Calcula las desviaciones de los tiempos de Daniela, tal como se muestra a continuación:

Tiempo de Daniela

Tiempo (s)	X	64	58	68	62	65
Desviación con respecto a la media	$X-\overline{X}$	0,6	-5,4	4,6	-1,4	1,6

La desviación puede ser calculada con respecto a cualquier valor, no solo con respecto al promedio.

Paso 2 Calcula la suma de las desviaciones medias:

$$0{,}6 + (-5{,}4) + 4{,}6 + (-1{,}4) + 1{,}6 = 0$$

Paso 3 Calcula la **desviación media** de la siguiente manera:

$$|64-63{,}4| + |58-63{,}4| + |68-63{,}4| + |62-63{,}4| + |65-63{,}4|$$

$$= \frac{0,6 + 5,4 + 4,6 + 1,4 + 1,6}{5}$$

$$= \frac{13,6}{5} = 2,72 \text{ s}$$

La desviación media permite determinar en cuanto varían, en promedio, los datos de una distribución con respecto a la media aritmética.

a. ¿Cuáles son las desviaciones con respecto a la media aritmética en los tiempos obtenidos por Bárbara?

b. ¿Qué resultado se obtiene al sumar las desviaciones de Bárbara?, ¿es el mismo que en caso de Daniela? ¿Qué puedes concluir al respecto?

- La desviación de una variable x con respecto a su media aritmética está dada por $D = X_i - \overline{X}$

- La desviación media $(D_{\overline{X}})$ corresponde a la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones $(X_i - \overline{X})$ de los n datos, esto es:

Para datos no agrupados se tiene:

$$D_{\overline{X}} = \frac{\left|X_1 - \overline{X}\right| + \left|X_2 - \overline{X}\right| + \left|X_3 - \overline{X}\right| + \ldots + \left|X_n - \overline{X}\right|}{n}$$

Para datos agrupados se tiene:

$$D_{\bar{X}} = \frac{|X_{mc1} - \bar{X}| \cdot f_1 + |X_{mc2} - \bar{X}| \cdot f_2 + |X_{mc3} - \bar{X}| \cdot f_3 + \ldots + |X_{mcn} - \bar{X}| \cdot f_n}{n}$$

Donde X_{mci} es la marca de clase del intervalo i, $\bar{X}$ es la media aritmética de la variable f_i, es la frecuencia absoluta del intervalo i y n es el número total de datos.

3. Calcula la desviación media de los tiempos de Bárbara.

4. Según los resultados de las actividades 2 y 3, ¿qué datos son más dispersos: los de Daniela o los de Bárbara?, ¿por qué?

→ Si se calcula la desviación con respecto a un valor distinto de la media aritmética, ¿la sumatoria de las desviaciones es igual a cero?, ¿por qué?

5. El entrenador continúa su análisis para tomar una adecuada decisión. Para ello, sigue estos pasos:

22

Paso 1 Calcula la media de los cuadrados de las diferencias entre cada tiempo de Daniela y el promedio. Obtiene así la varianza (σ^2):

$$\sigma^2 = \frac{(64 - 63,4)^2 + (58 - 63,4)^2 + (68 - 63,4)^2}{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{0,36 + 29,16 + 21,16 + 1,96 + 2,56}{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{55,2}{5} = 11,04 \text{ s}^2$$

$$+(62 - 63{,}4)^2 + (65 - 63{,}4)^2$$

Paso 2 Calcula la raíz cuadrada del valor anterior y obtiene la desviación estándar (σ) :

$$\sigma = \sqrt{11{,}04} \approx 3{,}32 \text{ s}$$

24

La **varianza** y **la desviación** estándar permiten cuantificar la dispersión dada por la desviación media.

- La varianza (σ^2) corresponde a la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones de los n datos. Se expresa en unidades cuadradas.

Para **datos no agrupados** se tiene:

$$\sigma^2 = \frac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+(X_3-\overline{X})^2+\ldots+}{n}$$

Para **datos agrupados** se tiene:

$$\sigma^2 = \frac{(X_{mc1}-\overline{X})^2\cdot f_1+(X_{mc2}-\overline{X})^2\cdot f_2+(X_{mc3}-\overline{X})^2}{n}$$

$$(X_n-\overline{X}\ )^2$$

$$\cdot\ f_3+\ldots+(X_{mcn}-\overline{X}\ \cdot)\ f_n$$

Donde X_{mci} es la marca de clase del intervalo i, es la media aritmética de la variable, f_i es la frecuencia absoluta del intervalo i y n es el número total de datos.

• La desviación estándar (σ) se obtiene extrayendo la raíz cuadrada de la varianza. Se expresa en la misma unidad que la variable, por lo que nos puede dar una idea más cercana de lo disperso que es el conjunto.

¿Puede ser negativo el valor de la varianza?, ¿por qué?

a. Calcula la varianza de los tiempos de Bárbara.

b. Calcula la desviación estándar de los tiempos de Bárbara.

c. Compara la dispersión entre los datos de Daniela y los de Bárbara.

A mayor dispersión, mayor valor de la varianza; a menor dispersión, menor valor de la varianza.

d. Finalmente, con toda la información obtenida acerca de los tiempos de ambas nadadoras, responde:

¿Qué decisión debe tomar el entrenador?, ¿quién debería participar en la próxima competencia: Daniela o Bárbara?

6. Las temperaturas (en grados Celsius) durante dos semanas en Talca fueron las siguientes:

Tº semana 1 (°C)	30	31	30	25	21	20	22

Tº semana 2 (°C)	30	29	29	27	26	20	27

a. Calcula e interpreta las medidas de dispersión.

b. ¿Qué ocurriría con la dispersión de los datos si las emperaturas se tomarán en distintas estaciones del año? Justifica.

Economía

7. La cantidad de cheques que se cobraron diariamente en todas las sucursales de un banco durante el mes anterior se muestran en la siguiente tabla:

30

Cantidad de cheques	Frecuencia
[0, 200[	12
[200, 400[	15
[400, 600[	20
[600, 800[	45
[800, 1000]	21

Jefe de operaciones: “Una desviación estándar mayor que 200 cheques diarios ocasionará problemas de organización y logística en las sucursales.

¿Deberá preocuparse el jefe de operaciones del banco por la cantidad de empleados que necesitarán el mes siguiente?, ¿qué decidirá?

8. La chef de un restaurante acaba de recibir un encargo de barras de chocolate de su proveedor, pero aún no los acepta. Los gramos de cada barra se muestran en el recuadro.

178,60	204,12	206,95
221,13	192,78	209,79
226,80	209,79	215,46
229,63	215,46	218,30

32

"Aceptaré las barras si la masa promedio es de 212,62 g y la desviación estándar es menor que 14,18 g."

¿Qué decisión tomará la chef?, ¿por qué? Argumenta y comunica tu respuesta a tus compañeros.

1 a la 7

Para concluir

a. ¿Qué significa, con respecto a tu rendimiento académico, que tus notas tengan una dispersión muy alta? Explica.

b. ¿Por qué es importante determinar la dispersión de un conjunto de datos?

c. ¿Qué fue lo que más te costó aprender en este tema?, ¿y lo más fácil?

34

Comparación de conjuntos de datos

Objetivo: Comparar dos o más conjuntos de datos utilizando medidas de tendencia central, de dispersión y posición para tomar decisiones.

¿Cómo se calcula la mediana para un conjunto par y uno impar de datos?

¿Qué son los cuartiles?,¿cómo se pueden calcular? Explica.

1. Observa la siguiente situación. Luego, realiza las actividades.

Carla Flores

Lucía Navas

Un equipo de fútbol femenino necesita una delantera, para lo cual tiene dos candidatas.

En los últimos 10 partidos del campeonato, las delanteras registraron las siguientes cantidades de goles:

Navas: 1, 0, 3, 0, 4, 1, 0, 0, 0, 3

Flores: 1, 1, 2, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 2

La DT observa que ambas marcaron 12 goles en 10 partidos, con un promedio de 1,2 goles por partido. Entonces decide usar otros indicadores.

a. Analiza el procedimiento utilizado por la DT del equipo.

- Calcula el rango de goles marcados por ambas jugadoras:

$R_{\text{Navas}} = 4 - 0 = 4$

$R_{\text{Flores}} = 2 - 0 = 2$

El mayor rango que presenta Navas puede indicar que en algunos partidos anota muchos goles, pero en otros no anota, mientras que los de Flores están más repartidos.

- Calcula la varianza y la desviación estándar:

Varianza	σ^2_{Navas}=2,16	σ^2_{Flores}=0,36
Desviación estándar	σ^2_{Navas}≈2,16	σ^2_{Flores}=0,6

Estos indicadores confirman que los goles de Flores presentan menor dispersión, lo que se refleja en que cada partido marca una cantidad de goles similar, lo que no ocurre con Navas.

- Calcula los indicadores de posición: mediana y cuartiles.

Para utilizar estos indicadores en la comparación de conjuntos de datos, es importante que estos sean del mismo tipo, se encuentren en las mismas unidades y sus promedios sean iguales o similares.

$Q_1 = 0$ $M_e = 0,5$ $Q_3 = 3$

Navas	0	0	0	0	0	1	1	3	3	4
Flores	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2

$Q_1 = 1$ $M_e = 1$ $Q_3 = 2$

Se puede confirmar que la dispersión es menor en el caso de Flores, observando que las diferencias entre la mediana y los cuartiles Q_1 y Q_3 es menor que en el caso de Navas.

b. ¿A cuál de las jugadoras escogerá la DT? Comenten en grupos y argumenten su respuesta.

c. Si se sabe que la delantera va a jugar pocos partidos, en los que debe marcar una gran cantidad de goles, ¿a quién debería escoger? Justifica.

Si se desea **comparar dos o más conjuntos de datos**, se pueden utilizar **medidas de tendencia central**, como el promedio y la mediana; medidas de dispersión, como el rango, varianza, desviación estándar; y medidas de posición, como los cuartiles. Así podemos juzgar cuál de ellos tiene un **promedio más representativo**, es decir, aquel conjunto cuyos valores son más cercanos al promedio.

Por ejemplo, en la situación anterior, la jugadora escogida por la DT dependerá de lo que busque. Si consideramos los promedios de goles por partido, en ambos casos es el mismo, pero el promedio de Flores resulta mucho más representativo, ya que presenta una cantidad de goles por partido más **homogénea** (parecida, similar).

¿A qué jugadora habrías escogido tú? Argumenta tu respuesta y comunícala a tus compañeros.

TIC

2. Dada la información de la tabla, realiza los siguientes pasos.

Calificaciones del Tercero A en una prueba de Matemáticas								
6,7	4,9	6,2	3,5	6,6	6,2	5,2	2,2	4,9
5,5	4,6	6,0	5,2	4,8	7,0	6,5	2,0	4,5

Paso 1 Abre una hoja de cálculo y copia las calificaciones de la tabla en una columna o varias.

Paso 2 En una celda en blanco, escribe la función =PROMEDIO(). En el párentesis debes seleccionar todas las calificaciones.

Paso 3 En una segunda celda en blanco, escribe la función =MAX() – MIN() para calcular el rango de las calificaciones. Para ello, en cada paréntesis debes seleccionar todas las celdas que contengan datos. Luego, presiona Enter.

Paso 4 En otra celda en blanco, escribe la función=VAR.P() para calcular la varianza de los datos. Selecciona todas las celdas de los datos y pulsa Enter.

Paso 5 Escribe =DESVEST.P() en otra celda en blanco y selecciona la información. Esta función permite calcular la desviación estándar de los datos entregados. Obtendrás lo que se muestra a continuación:

F2 =DESVEST.P(A2:B10)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Calificaciones		Promedio	Rango	Varianza	Desviación estándar	
2	6,7	5,5	5,138889	5	1,9512654	1,396877028	
3	4,9	4,6					
4	6,2	6					
5	3,5	5,2					
6	6,6	4,8					
7	6,2	7					
8	5,2	6,5					
9	2,2	2					
10	4,9	4,5					
11							

a. Inventa un conjunto de calificaciones de 18 estudiantes que tengan igual promedio que el conjunto anterior.

b. ¿Cómo es la dispersión de los de cada conjunto?

c. Si tuvieras que premiar a uno de los 2 cursos por su buen rendimiento. ¿a quién escogerías? Argumenta.

El **coeficiente de variación (CV)** permite realizar comparaciones entre conjuntos con respecto a la dispersión de sus datos, e incluso entre variables que se miden con diferentes unidades de medida. Matemáticamente, corresponde al cociente entre la desviación estándar y la media aritmética:

$$CV = \frac{\sigma}{|\overline{X}|}$$

Para expresar el CV en porcentaje, basta con multiplicar el cociente obtenido por 100.

- Mientras **menor** sea el coeficiente de variación, el conjunto es más **homogéneo** (los datos son más parecidos entre sí).
- Mientras **mayor** sea el coeficiente de variación, el conjunto es más **heterogéneo** (los datos se diferencian más entre sí).

3. Resuelve la situación utilizando los pasos de la actividad 2.

Para participar en una olimpiada de Ciencias, el profesor debe elegir un curso por colegio. Las notas de los 45 estudiantes de los dos cursos entre los que se escogerá al representante del colegio en la olimpiada se ordenaron en las siguientes tablas:

Calificaciones curso A
5,9 – 4,0 – 2,5 – 1,8 – 6,0 – 2,9 – 5,7 – 4,3 – 4,3 – 3,4 – 2,0 – 5,3 – 4,5 – 7,0 – 5,9 – 5,9 – 5,0 – 3,3 – 4,4 – 3,5 – 1,0 – 5,8 – 6,4 – 4,6 – 2,7 – 5,5 – 4,6 – 4,8 – 3,6 – 5,5 – 4,8 – 6,0 – 6,0 – 4,0 – 6,5 – 5,8 – 2,2 – 6,7 – 4,9 – 5,2 – 4,9 – 7,0 – 5,0 – 6,6 – 2,5

50

Calificaciones curso B
4,4 – 4,0 – 3,5 – 2,8 – 5,3 – 3,9 – 4,7 – 4,3 – 7,0 – 3,4 – 4,0 – 5,3 – 4,5 – 7,0 – 4,9 – 4,4 – 5,0 – 2,4 – 5,8 – 3,5 – 2,0 – 5,8 – 6,4 – 2,6 – 1,9 – 5,9 – 4,6 – 4,8 – 6,4 – 5,5 – 5,8 – 6,0 – 7,0 – 4,0 – 5,6 – 6,0 – 4,2 – 6,7 – 4,9 – 5,2 – 5,8 – 6,8 – 7,0 – 6,8 – 4,9

a. ¿Cuál es el rango de las calificaciones del curso A?,¿y del curso B?

b. ¿Cuál es el promedio y la desviación media de las calificaciones del curso A?,¿y del B?

Para calcular la desviación media usa la función *=DESVPROM()*.

c. ¿Cuál es la varianza de los datos obtenidos para cada curso?, ¿y la desviación estándar?

d. ¿Cuál es el coeficiente de variación para ambos cursos?, ¿qué función usarías en Excel para calcularlo?

e. ¿Qué curso tiene calificaciones homogéneas? Justifica tu respuesta.

f. Con los resultados anteriores, ¿qué decisión debe tomar el profesor? Argumenta tu respuesta.

Botánica

4. Aplica las medidas de dispersión en la siguiente situación y responde.

Lisset desea comprobar la efectividad de un fertilizante para plantas. Para ello, cultivó 2 maceteros con 20 plantas cada uno. Luego de 2 semanas, los tamaños (en centímetros) de las plantas eran los siguientes:

Sin fertilizante
11 – 10 – 15 – 12 – 13 – 12 – 13 – 10 – 11 – 14 – 13 – 11 – 14 – 12 – 15 – 10 – 12 – 14 – 13 – 12

53

Con fertilizante
15 – 12 – 15 – 14 – 14 – 13 – 14 – 11 – 11 – 15 – 13 – 12 – 13 – 13 – 15 – 11 – 13 – 16 – 14 – 12

a. ¿Hace crecer más las plantas el fertilizante? Justifica respuesta.

b. Si el fertilizante mantiene el promedio de los tamaños pero disminuye la dispersión, ¿podría decirse que es efectivo?

c. Si desea que el tamaño de sus plantas sea homogéneo, ¿debe agregar fertilizante en sus plantas? Argumenta.

8 a la 16

Actividad de aplicación ✓

Pruebas estandarizadas

Objetivo: investigar la importancia de la deviación entandar.

¿Qué haremos?: Analizar una prueba estandarizada.

Planifiquemos e investiguemos

Paso 1: Organícense en grupos de 2 o 3 integrantes e investiguen acerca del cálculo del puntaje de la PSU o el SIMCE sitios oficiales como el DEMRE o MINEDUC.

Analicemos y concluyamos

Paso 2 Luego de su investigación planteen y respondan algunas preguntas como por ejemplo:

- ¿Qué significa que una evaluación se encuentre “estandarizada”?
- ¿Es siempre el puntaje buen indicador en la evaluación?
- ¿Qué criterios utilizarían para comparar los puntajes de dos años seguidos?
- ¿Qué criterios utilizarían para comparar los puntajes obtenidos por instituciones o personas de dos regiones distintas?

Paso 3 Compartan y comuniquen a otros grupos el análisis que realizaron con respecto a las preguntas anteriores.

Para concluir

a. ¿Por qué es importante no solo utilizar el promedio al comparar conjuntos de datos? Explica.

b. ¿Se podrá usar siempre el coeficiente de variación para comparar dos conjuntos de datos? ¿Qué alternativas crees que podrían utilizarse en los casos en que no?

Antes de continuar

Evaluación intermedia

Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

Industria automotriz

1. Analiza la siguiente situación. Luego, responde.

Mecánico: Estoy revisando dos tipos de automóviles. A cada uno le realicé 8 pruebas de frenado.

• Tiempo (en segundos) que demora en frenar el auto A.

12, 9, 8, 9, 10, 11, 9, 7

• Tiempo (en segundos) que demora en frenar el auto B.

11, 8, 7, 10, 10, 10, 8, 10

a. ¿Cuál es el rango y la desviación media para cada tipo de automóvil?

b. ¿Cuál es la varianza y la desviación estándar para cada tipo de automóvil?

c. ¿En cuál de los dos conjuntos de datos los valores se acercan más a la media?

d. Si una persona quiere comprar, entre estos automóviles, el que brinde mayor seguridad, ¿qué decisión debería tomar? Explica.

2. Utilizando su coeficiente de variación, determina qué conjunto es más homogéneo.

a.

X ={203, 75, 5, 235, 193, 165, 47, 240, 37, 0}
Y ={3, 0, 1, 5, 5, 6, 1, 4, 3,2}

b.

X = {2, 0, 0, 2, 2, 2, 0, 2, 0, 0}
Y = {47, 16, 2, 46, 44, 32, 4, 36, 1, 12}

3. En algunos países de Latinoamérica, las notas van de 1 a 10. Jorge tiene un amigo ecuatoriano, Matías, con el que compara sus notas de Ciencias Naturales.

Jorge	4,5	5,0	5,2	6,7	6,1	5,8

Matías	6,2	7,8	3,1	9,6	5,4	7,7

a. ¿Es útil usar el rango para comparar la dispersión de sus notas? Justifica.

b. ¿Qué medida(s) de dispersión puede(n) resultar más conveniente (s) en este caso? Justifica tu respuesta.

c. Aplica los indicadores que escogiste y señala quién tiene un rendimiento más regular en la asignatura. Argumenta tu respuesta.

10 y 20

Reflexiono

- De los contenidos estudiados en esta lección, ¿en cuál me siento más débil? ¿En qué contenido me siento mejor preparado? Explica.

- ¿Cómo podrías mejorar tu aprendizaje de la lección? Crea un plan y compártelo con un compañero. Evalúa sus sugerencias y corrígelo.

Lección

2

Toma de decisiones aplicando medidas de probabilidades condicionadas

PROBABILIDAD CONDICIONADA

Objetivo: Comprender el concepto de probabilidad condicionada y aplicarlo en la toma de decisiones.

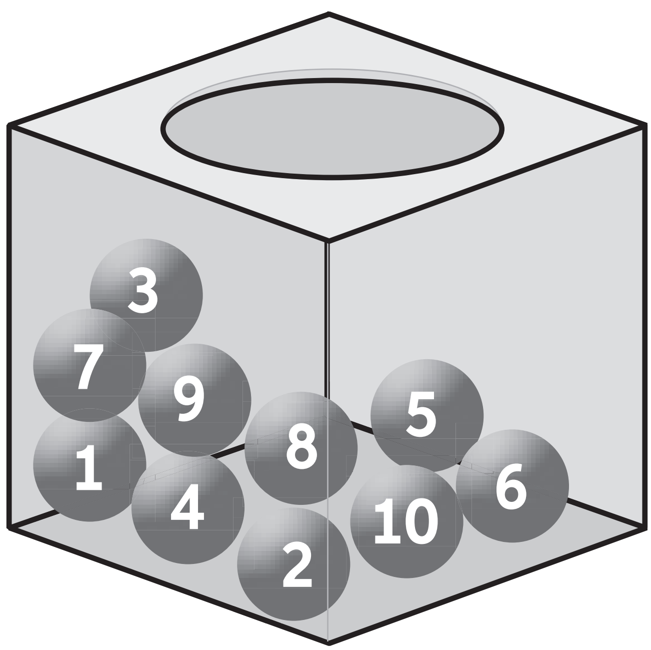
¿Qué entiendes por un experimento aleatorio? Menciona 3 ejemplos.

¿Cómo se define la regla de Laplace? ¿Qué condición deben cumplir los sucesos elementales para poder aplicar la regla de Laplace?

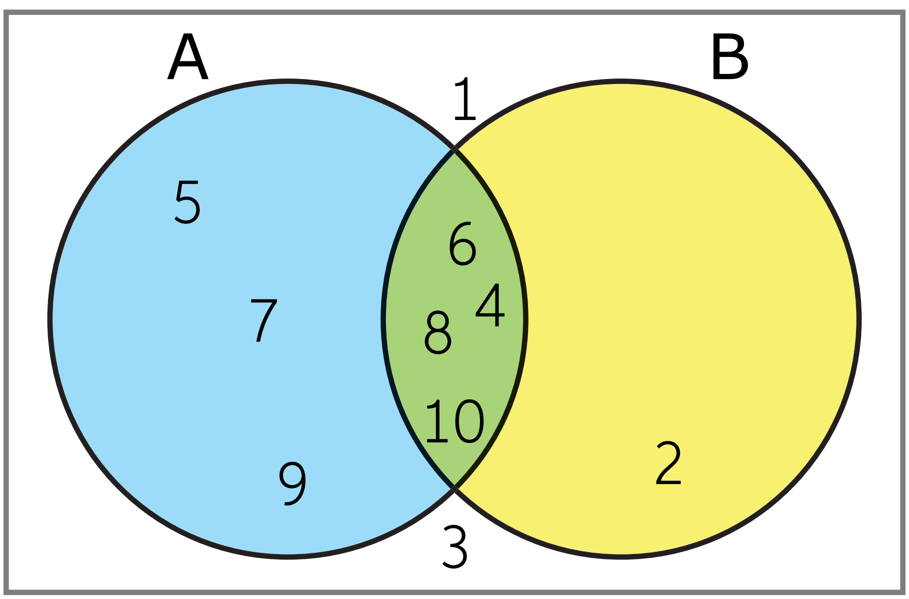
1. Analiza la siguiente situación y realiza lo solicitado.

Se extrae una bolita al azar desde una urna que contiene 10 bolitas, como se muestran en la imagen. Si se sabe que la bolita extraída tiene un número mayor que 3, ¿cuál es la probabilidad de que sea par?

Considera los sucesos: A = extraer una bolita con un número mayor que 3 y B = extraer una bolita con un número par.



a. Observa el diagrama de Venn y analiza el razonamiento.La probabilidad de que ocurra B, dado que ocurrió A, es decir, P(B/A), corresponde a la probabilidad de extraer bolitas numeradas con 4, 6, 8 o 10 (casos favorables), considerando los valores mayores que 3, es decir: 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 (casos posibles).



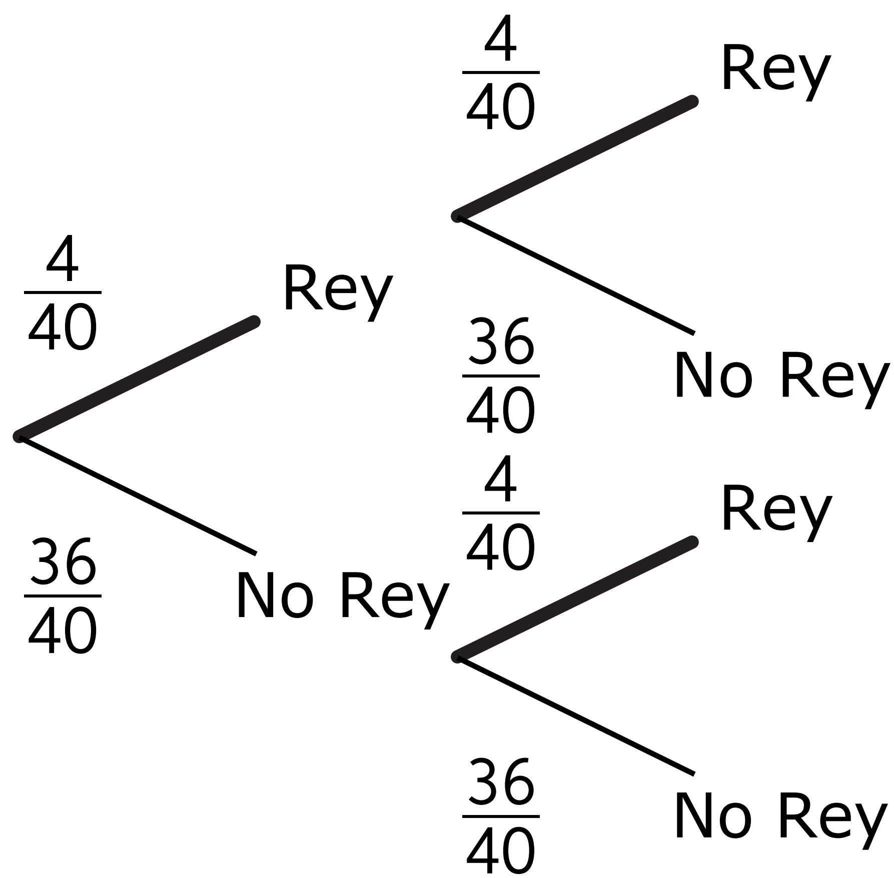
b. Calcula el cociente entre P(A ∩ B) y P(A). ¿Qué obtienes?

La probabilidad condicionada *P(B/A)* es la probabilidad de que ocurra un suceso B dado que ocurrió otro A y se calcula con la siguiente expresión:

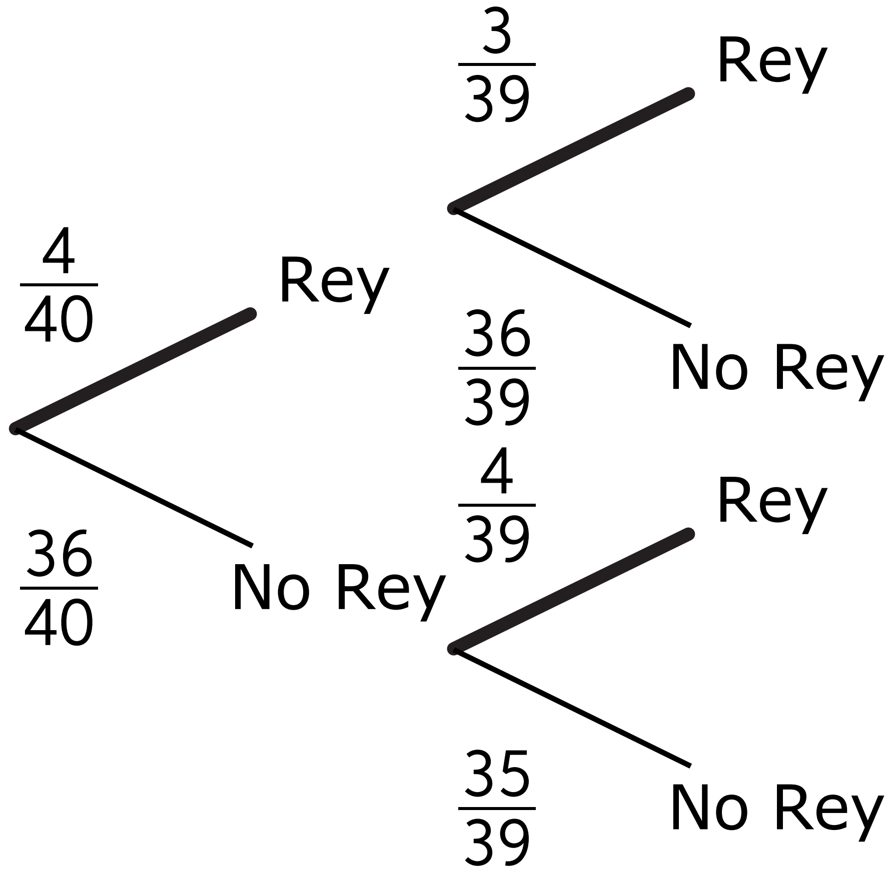
$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ con } P(A) \neq 0$$

2. Se extraen al azar dos cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos reyes?

a. Observa los diagramas de árbol para los siguientes casos.



68



b. ¿En qué caso obtener rey en la primera extracción condiciona el resultado de obtener rey en la segunda extracción?, ¿y en cuál no lo condiciona?

c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos reyes de la baraja española al extraer dos cartas sin reposición?, ¿y al extraerlas con reposición? Calcula.

Dos sucesos *A* y *B* son independientes, si la realización de *A* no condiciona la realización de *B*, es decir, $P(B/A) = P(B)$. Entonces, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Dos sucesos *A* y *B* son dependientes si la realización de *A* condiciona la realización de *B*, es decir, $P(B/A) \neq P(B)$. Entonces, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

Considera las extracciones sin reposición y con reposición. ¿En qué caso los sucesos son siempre dependientes y en cuál son siempre independientes?

Deporte

3. La siguiente tabla de contingencia muestra la cantidad de participantes en una corrida de cierta localidad según las siguientes categorías:

Las tablas de contingencia son aquellas en las que se resume y organiza la información según dos o más criterios.

	Masculino	Femenino	Total
Adolescente	25	15	40
Adulto	125	70	195
Sénior	75	90	165
Total	225	175	400

Si se elige una persona al azar, calcula:

a. La probabilidad de que sea una corredora, sabiendo que pertenece a la categoría sénior.

b. La probabilidad de que sea de la categoría adulto, sabiendo que es un corredor.

c. Si se decide realizar otra corrida y premiar a alguien que pertenezca a la categoría (género- edad) que tenga más inscritos, ¿qué tipo de corredor es probable que reciba el premio?

4. Un estudio médico indica que, de una población de 1000 pacientes, 400 tienen diabetes, 500 son hombres y 200 de estos sufren hipertensión. Además, 230 hombres tienen diabetes y 100 mujeres, hipertensión. Calcula la probabilidad de que uno de estos pacientes:

a. Tenga diabetes si es mujer.

b. Tenga diabetes si es hombre.

c. Tenga hipertensión si es mujer.

d. Tenga hipertensión si es hombre.

Si se decide realizar una campaña de salud para tomar conciencia de las cifras anteriores, ¿a quién debería estar dirigida la campaña si el objetivo es llegar a más del 35 % de la población? Argumenta.

5. Reúnanse en parejas y analicen la siguiente situación considerando que la puerta 1 es la amarilla, la 2 es la rosada y la 3 es la morada.

EL PROBLEMA DE MONTY HALL

En un concurso de televisión

Animador: "Leonardo, debes escoger una de estas 3 puertas.

Mira... en la puerta 2 hay una cabra. Cuidado, dos de ellas tienen una cabra y solo una el automóvil. ¿Cuál vas a escoger?”

Monty: ”Mmm... ¡la número 3!”

Animador: “Ok, pero antes abriré una de las puertas que no escogiste. Mira en la puerta 2 hay una cabra!"

Animador: ”Ahora te doy la oportunidad de que puedas cambiar la puerta 3 por la puerta 1, ¿qué dices?, ¿aceptas?”

a. En el lugar de Leonardo, ¿qué escogerían: cambiar de puerta o mantenerla?, ¿por qué? Argumenten y comenten su respuesta con el resto del curso.

b. Antes de que Leonardo escoja una puerta, ¿cuál es la probabilidad de que escoja la puerta que tiene el automóvil?, ¿y cuál de escoger la que tiene una cabra?

c. Consigan los materiales que aparecen en el recuadro y sigan los pasos.

Materiales

- Hoja de oficio o cartulina.
- Tijeras.

Paso 1 Con las tijeras, corten 3 tarjetas idénticas para simular las condiciones del curso

Paso 2 Identifiquen las tarjetas con los números 1, 2 y 3. Luego, por el reverso de una, escriban la palabra “automóvil” y en las otras escriban “cabra”.

Paso 3 Con las tarjetas, reproduzcan la situación varias veces, cuenten los resultados y en su cuaderno completen la siguiente tabla:

	Resultados	
Tarjeta	Gana	Pierde
Se mantiene		
Se cambia		

d. Según su análisis, ¿qué le conviene más a Leonardo?

e. Justifiquen utilizando probabilidades: ¿por qué es mejor una opción u otra?, ¿coincide con la idea que tenían inicialmente?

Actividad de aplicación ✓

El problema de Monty Hall y la toma de decisiones

Objetivo: Investigar y profundizar en el estudio probabilístico.

¿Qué haremos?: Crear un concurso similar al problema de Monty Hall

Planifiquemos e investiguemos

Paso 1 Reúnanse en grupos de 3 integrantes. Luego, ingresen el código T20M3MP023A en www.enlacesmineduc.cl.

Paso 2 Además de la información dada en el sitio web anterior, pueden buscar e indagar en otras páginas confiables de Internet o consultando la bibliografía que su profesor les recomiende. A partir de la información encontrada, respondan las siguientes preguntas:

Monty Hall

a. ¿Cuál es el contexto del problema de Monty Hall?

b. ¿Cuáles son los resultados de los siguientes casos según la decisión del concursante?

Si el concursante mantiene su elección

Caso	Puerta 1	Puerta 2	Puerta 3
A	Auto	Cabra	Cabra
B	Cabra	Auto	Cabra
C	Cabra	Cabra	Auto

Si el concursante cambia su elección

Caso	Puerta 1	Puerta 2	Puerta 3
A	Auto	Cabra	Cabra
B	Cabra	Auto	Cabra
C	Cabra	Cabra	Auto

c. Según la explicación matemática, el problema se basa en probabilidades condicionadas. ¿Cómo están definidos los sucesos?

d. ¿Cuál es la expresión que permite calcular la probabilidad de que un concursante gane?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que un concursante gane si mantiene su elección?, ¿y la probabilidad de que gane si la cambia?

Paso 3 Comenten con sus compañeros:

- ¿Cuál es la mejor estrategia: mantener o cambiar la elección?
- Al plantear el problema de Monty Hall, la gran mayoría de las personas piensan que el concursante, después de elegir por primera vez la puerta, tiene el 50 % de probabilidades de ganar al momento de cambiar su opción. ¿Por qué creen que sucede esto? Argumenten.

Presentemos

Paso 4 Inventen un concurso de un programa de televisión donde ocurra el mismo fenomeno que en el problema de Monty Hall. Realizen una presentación con sus compañeros como participantes.

A 17 a la 29

Para concluir

a. Explica con tus palabras lo que entiendes por el concepto de probabilidad condicionada.

b. ¿En qué otras situaciones se podrían tomar decisiones a partir de la probabilidad condicionada? Justifica tu respuesta.

PROBABILIDAD TOTAL

Objetivo: Comprender el teorema de la probabilidad total y aplicarlo en la toma de decisiones.

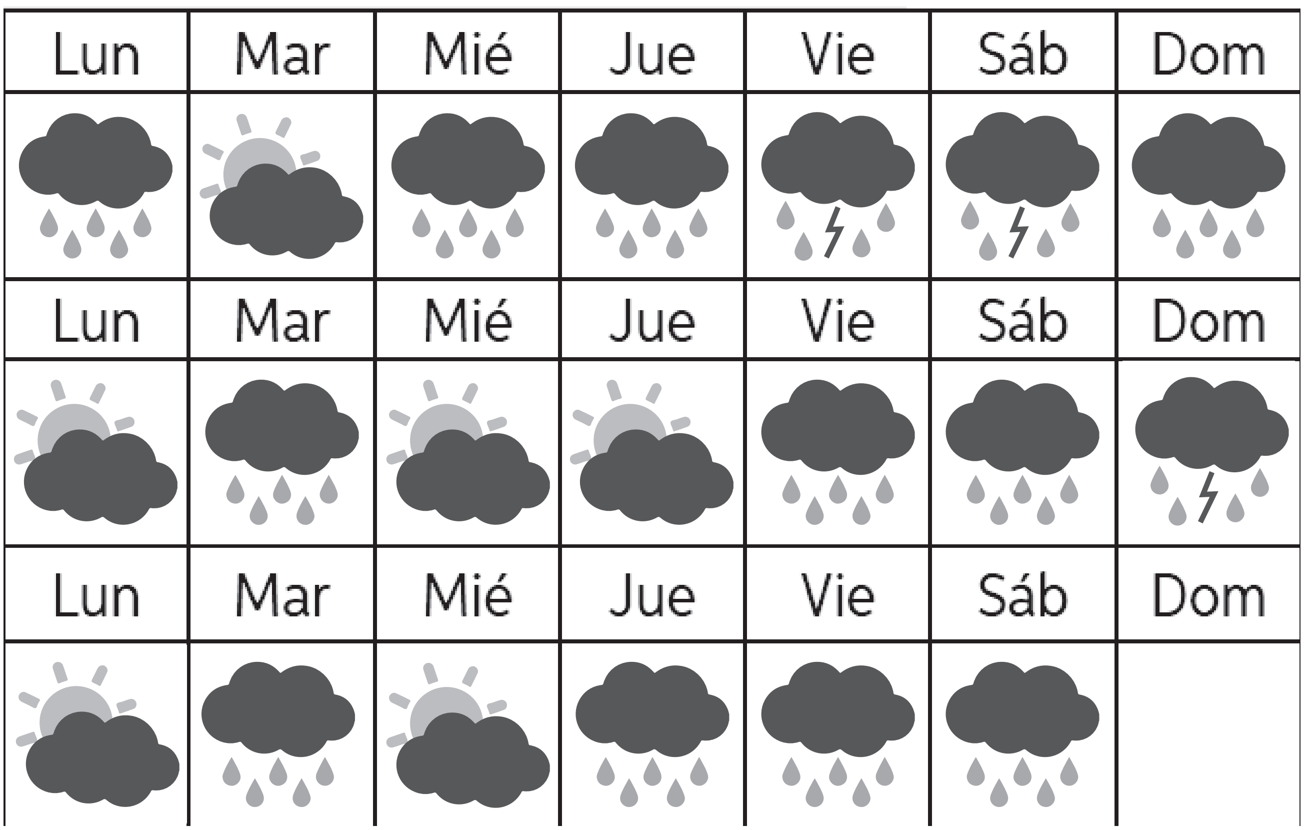
¿Qué expresión permite calcular la probabilidad condicionada?

Cuando los sucesos son independientes, ¿qué sucede con la expresión anterior?

1. Analiza la siguiente situación. Luego, realiza las actividades.

85

Se sabe que la probabilidad de que cierto autobús sufra un accidente durante un día lluvioso es 0,07 y durante un día seco 0,004. En un periodo de 20 días el tiempo ha sido el siguiente:



a. ¿Cuántos días ha llovido?, ¿cuántos han sido días secos?, ¿cuál es la probabilidad de cada uno?

b. ¿Cuál será la probabilidad de que se produzca un accidente? Analiza el siguiente procedimiento.

- Se definen los siguientes sucesos:

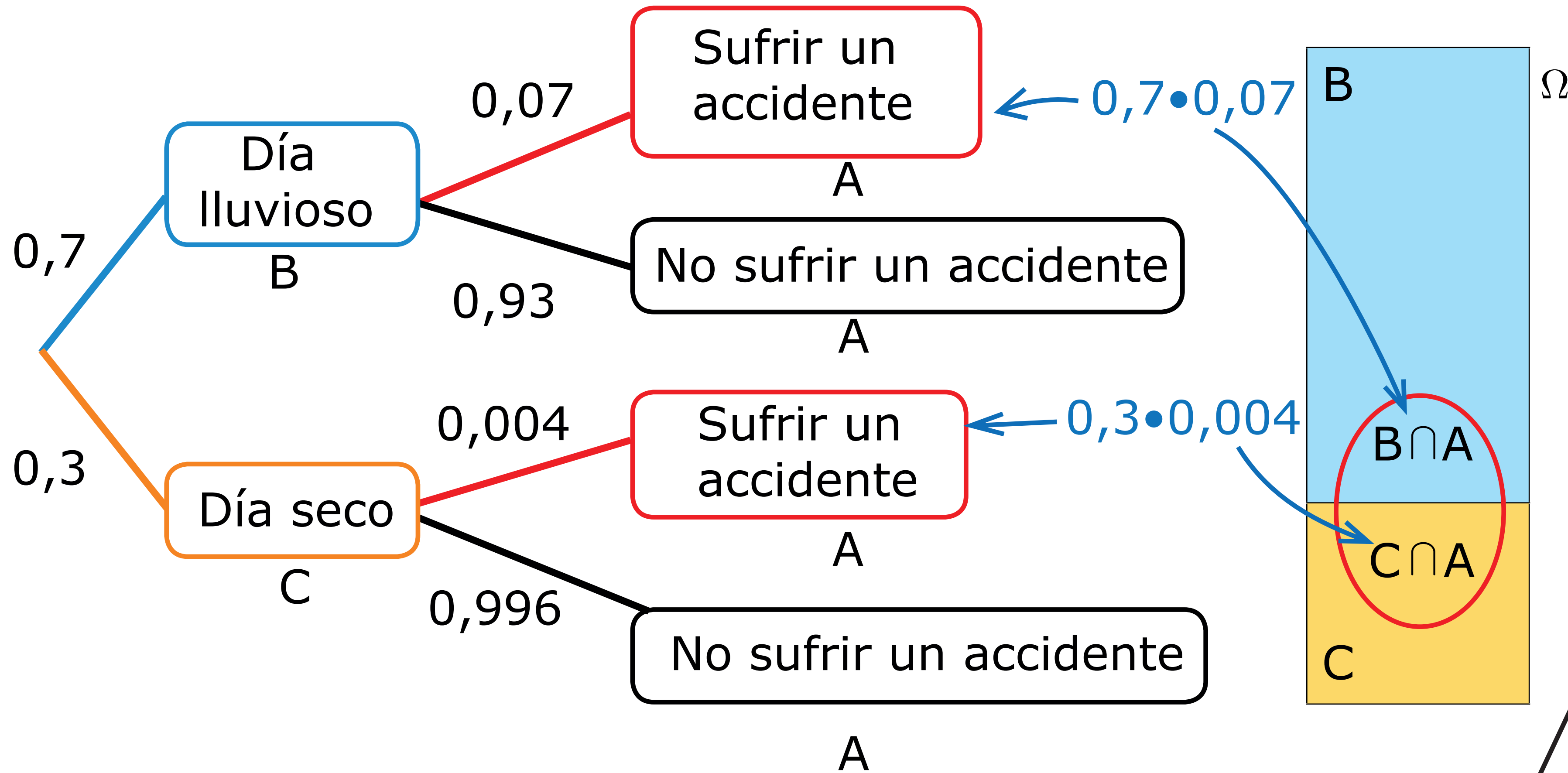
A = Sufrir un accidente

$\overline{A}$ = No sufrir un accidente

B = Día lluvioso

C = Día seco

• Se representa la situación en un diagrama de árbol:



¿Cómo se obtuvieron los valores de las primeras rama del árbol (0,7 y 0,3)?

- A partir de la información del diagrama, se determina la probabilidad de que ocurra un accidente. Esto es:

P(sufrir accidente) = *P*(sufrir accidente en día lluvioso) +
P(sufrir accidente en día seco)

Lo anterior expresado en notación conjuntista es:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap C)$$

$$P(A) = P(B) \cdot P(A/B) + P(C) \cdot P(A/C)$$

Se aplica la definición de probabilidad condicionada.

A esta igualdad se la conoce como probabilidad total.

- Se calcula la probabilidad pedida reemplazando los valores:

$P(A) = 0{,}7 \cdot 0{,}07 + 0{,}3 \cdot 0{,}004$

$P(A) = 0{,}049 + 0{,}0012$

$P(A) = 0{,}0502$

- Por lo tanto, la probabilidad de que se produzca un accidente es 0,0502, lo que representa un 5,02 %. Esto significa que, de cada 100 viajes realizados, en 5 de ellos podría ocurrir un accidente.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el autobús NO sufra un accidente?

Calcula e interpreta su resultado.

d. A partir de los resultados anteriores, ¿qué decisión tomarías: te subes o no a este autobús?, ¿por qué?

2. Lee atentamente la afirmación de Fabián. ¿Estás de acuerdo con él? Argumenta y comunica tu respuesta al curso.

Fabián: "Si un suceso se puede conseguir por más de un camino del diagrama de árbol, su probabilidad se obtiene sumando las probabilidades de todos los caminos que componen el suceso."

El **teorema de la probabilidad** total nos permite calcular la probabilidad de un suceso a partir de probabilidades condicionadas.

Sea A_1 , A_2 , ..., A_n un sistema completo de sucesos (una partición del espacio muestral) tal que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero, y sea B un suceso cualquiera para el que se conocen las probabilidades de

$P(B/ A_i)$,

entonces la probabilidad del suceso *B* viene dada por la siguiente expresión:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

¿Por qué las probabilidades de la situación del autobús son condicionadas? Argumenta tu respuesta

3. Emilia guarda todos sus calcetines sueltos en un cajón. El color y la cantidad de estos se muestra a continuación:

4 pares de calcetines azules 	2 pares de calcetines verdes 

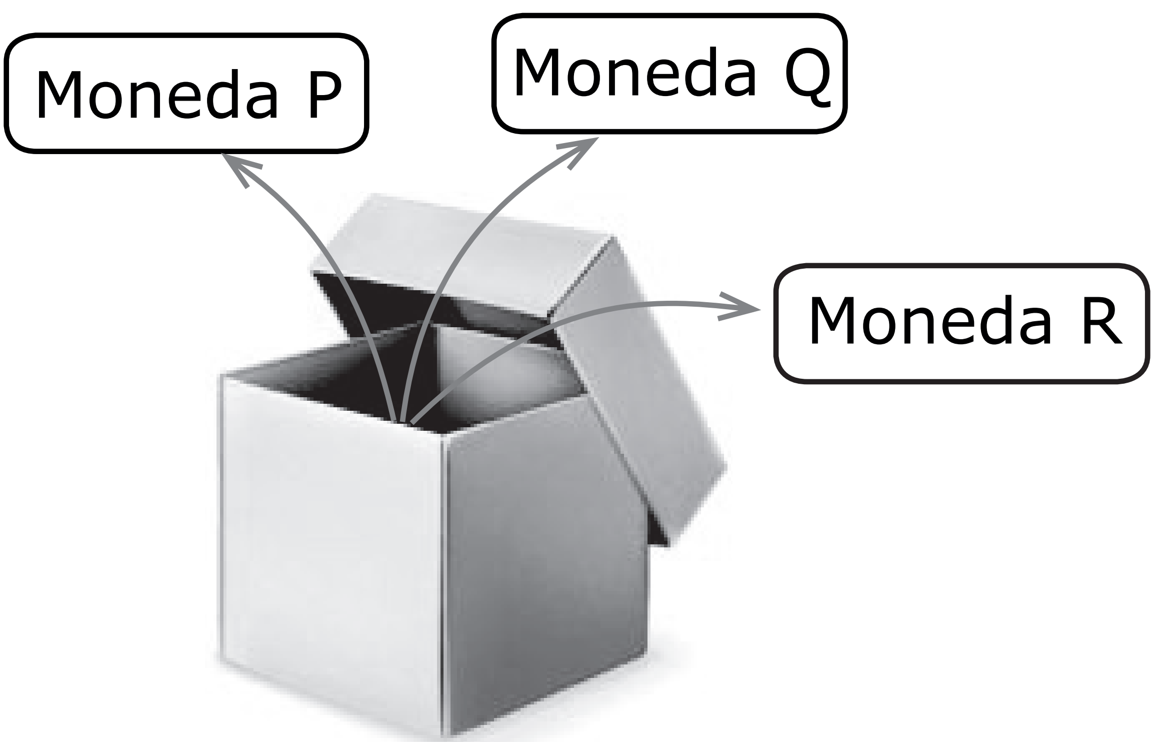
Para el cálculo considera el total de calcetines que hay de cada color.

Emilia decide colocarse cierto día dos calcetines de diferente color y los saca del cajón con los ojos cerrados.

a. Representa las probabilidades de cada suceso en un diagrama de árbol.

b. Calcula la probabilidad de que los calcetines sean de distinto color.

4. En un concurso hay una caja que contiene las siguientes monedas:



La moneda P es normal (tiene cara y sello).

La moneda Q tiene cara por los dos lados.

La moneda R está truncada de forma tal que la probabilidad de que salga cara es $\frac{1}{3}$

El concursante debe apostar por cara o por sello. Ganará si los resultados al extraer la moneda y al lanzarla coinciden con su apuesta.

a. Construye un diagrama de árbol con las probabilidades del experimento “extraer al azar una moneda y lanzarla al aire”.

b. ¿Qué le conviene apostar al concursante: cara o sello? Aplica el teorema de la probabilidad total.

5. Investiga de qué trata el teorema de Bayes. Explíca a un compañero. Ejemplifica con la actividad 1 (situación del autobús). Luego, responde:

a. ¿Qué semejanzas y diferencias existen con el teorema de la probabilidad total?

b. ¿Pudiste explicar con facilidad el teorema a tu compañero? ¿Necesitaste la ayuda de tu profesor? Justifica tu respuesta.

30 a la 35

Para concluir

a. ¿En qué situaciones puedes aplicar el teorema de la probabilidad total? Da un ejemplo diferente de los estudiados en este tema.

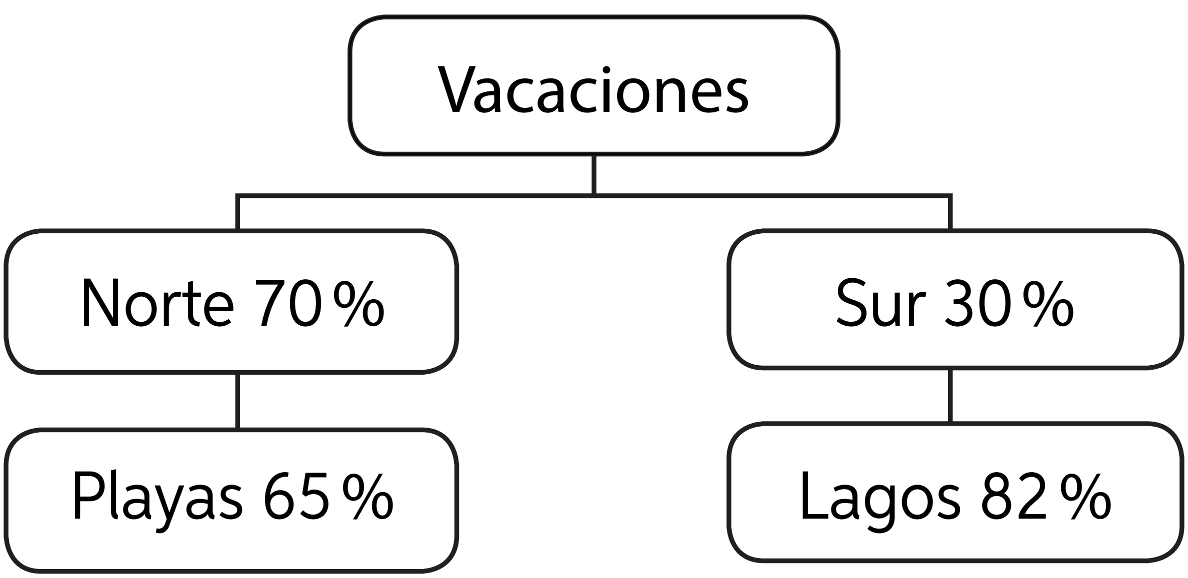
b. Señala las ventajas que tiene el uso Antes de continuar del diagrama de árbol para el cálculo de las probabilidades.

Antes de continuar

Evaluación intermedia

Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. Mientras planea sus vacaciones, Rosa comenzó a pensar en los lugares que ha visitado y realizó el siguiente esquema:



a. Construye un diagrama de árbol con las probabilidades de los sucesos considerando que el comportamiento de Rosa se podría repetir según sus estadísticas.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que vaya a un lugar que no sea playa,dado que ya ha decidido ir al norte?

Medicina

2. Para curar una enfermedad un grupo de doctores ha aplicado un nuevo tratamiento a una serie de pacientes en el cual obtuvieron los resultados reflejados en la siguiente tabla:

100

	Curados	No curados	Total
Tratamiento nuevo	60	21	81
Tratamiento antiguo	43	36	79
Total	103	57	160

Si se elige un paciente al azar, calcula la probabilidad de que:

a. Se haya curado.

b. No se haya curado.

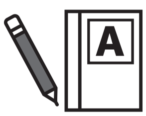
c. Se haya curado dado que se le aplicó el tratamiento nuevo.

d. No se haya curado dado que se le aplicó el tratamiento nuevo.

e. Se haya curado dado que se le aplicó el tratamiento antiguo.

f. No se haya curado dado que se le aplicó el tratamiento antiguo.

g. ¿Qué decisión debe tomar el grupo de doctores: seguir con el nuevo tratamiento o volver al antiguo?

 36 a la 40

3. Explica la utilidad del teorema de la probabilidad total.

Reflexiono

- ¿Qué representaciones de la probabilidad condicionada te parecieron más adecuadas para cada problema? Explica y compara tu respuesta.

- De acuerdo con el desempeño obtenido en esta evaluación, ¿en cuáles actividades tuviste más dificultades?, ¿qué podrías hacer al respecto? Crea un plan de mejora.

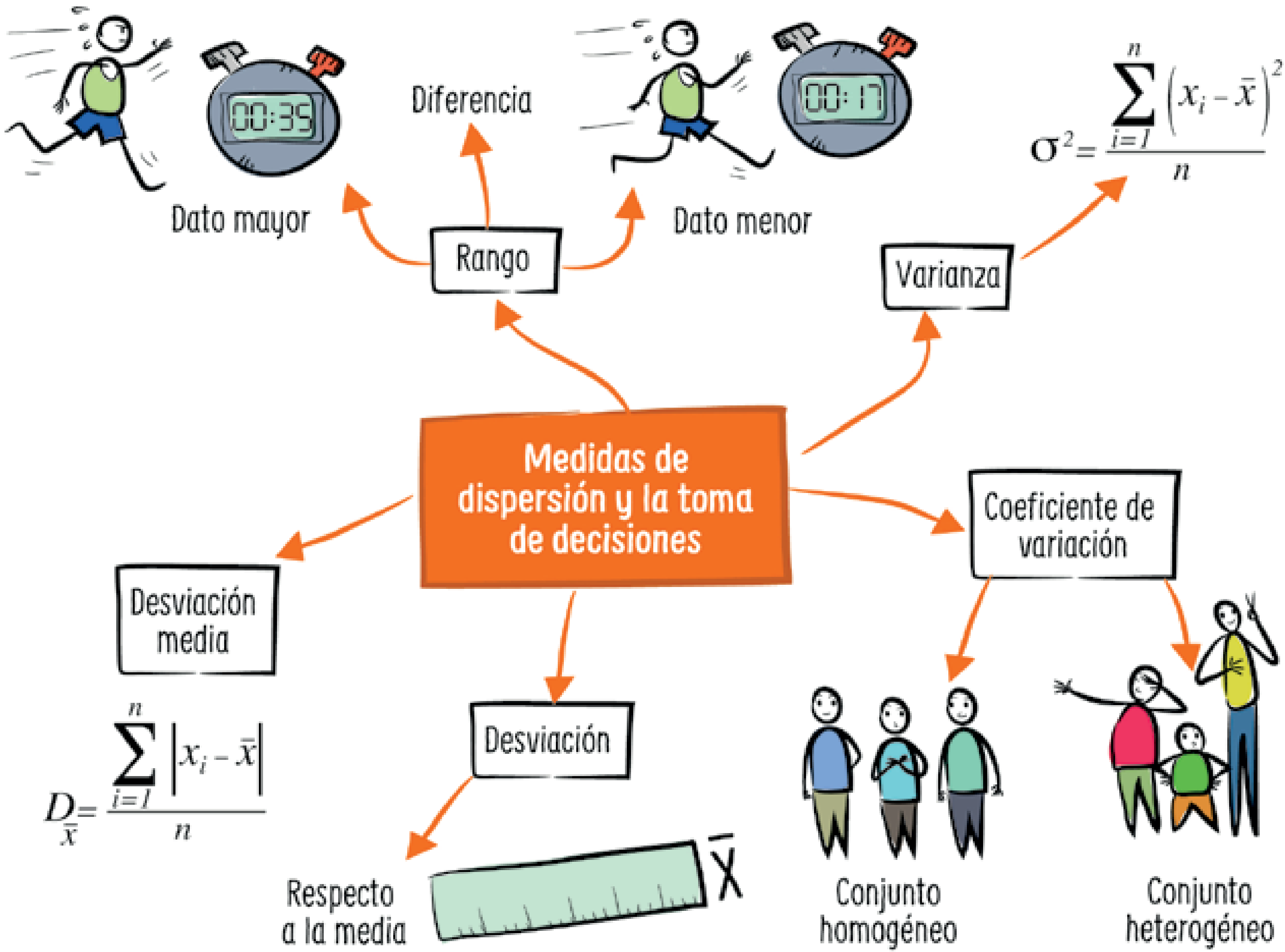
SÍNTESIS

Lee atentamente la información y realiza lo pedido.

¿Qué es un mapa mental?

Un mapa mental es un organizador visual que sirve para ordenar las informaciones o los conceptos y las relaciones que establecen entre sí. Parte de una idea central, la más importante o general, alrededor de la cual se van situando las ideas secundarias o los conceptos más concretos, y las relaciones que las unen.

A continuación, se presenta un ejemplo de mapa mental con algunos de los conceptos estudiados durante la Unidad.


Medidas de dispersión y la toma de decisiones
Rango
Dato mayor
00:35
Diferencia
Dato menor
00:17
Varianza
$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$
Coeficiente de variación
Conjunto homogéneo
Conjunto heterogéneo
Desviación
Respecto a la media
$\bar{X}$
Desviación media
$D_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$

Ahora, hazlo tú

1. Elabora un mapa mental para sintetizar lo estudiado en la Lección Toma de decisiones aplicando probabilidades condicionales.

2. Comparte con tu curso el mapa mental que elaboraste y responde:

- ¿Qué consideraron tus compañeros y tú para elaborar sus respectivos mapas mentales?
- ¿Qué similitudes y diferencias reconoces entre los diversos mapas elaborados?
- Los conceptos que fueron comunes, ¿con qué dibujo se representaron?

Repaso

Realiza las siguientes actividades.

Lección 1: Toma de decisiones aplicando medidas de dispersión

1. Define con tus palabras los siguientes conceptos:

a. Dispersión.

b. Rango.

c. Varianza.

d. Desviación media.

e. Conjunto homogéneo.

f. Conjunto heterogéno.

2. Se realizó una encuesta a estudiantes de dos colegios. La pregunta fue la siguiente:

¿Cuántas veces comes fruta en el día? Los resultados se organizaron en las tablas que se muestran a continuación:

Colegio A

N° de veces que comes fruta en el día	**f**
0	120
1	375
2	235
3	180
4	90

Colegio B

N° de veces que comes fruta en el día	**f**
0	90
1	240
2	280
3	120
4	80
5	10

a. Calcula el rango de cada muestra. ¿Cómo interpretarías los resultados?

b. En cada caso, calcula la varianza y la desviación estándar.

c. ¿En qué colegio el consumo de fruta es más homogéneo?

d. ¿Qué medida de dispersión usaste para dar la respuesta a la pregunta anterior?

e. Cierta institución quiere aplicar un programa de alimentación saludable en el colegio que presente el mayor coeficiente de variación. ¿Qué decisión tomará dicha institución?

Lección 2: Toma de decisiones aplicando probabilidades condicionales

3. Se realiza una rifa entre 450 números vendidos. Si el número ganador es múltiplo de 5, ¿cuál es la probabilidad de que gane una persona que compró los números 155 y 420?

4. En una sala de clases están reunidos 30 hombres y 25 mujeres. 4 hombres son ingenieros, 3 son técnicos, 8 son estudiantes de Pedagogía y los demás son estudiantes de Bachillerato. Entre las mujeres, 6 son ingenieras, 10 son estudiantes de Pedagogía y el resto son estudiantes de Bachillerato.

a. Construye una tabla de contingencia.

b. Calcula la probabilidad de escoger a una mujer si se sabe que es ingeniera.

c. Calcula la probabilidad de elegir a un estudiante de bachillerato si se sabe que es hombre.

5. Explica con tus palabras el teorema de la probabilidad total.

¿QUÉ APRENDÍ?

Realiza las siguientes actividades para evaluar los conocimientos aprendidos durante esta Unidad.

1. Los precios, sin redondear, de la bencina de 95 octanos durante la semana pasada en dos bencineras se registraron en la siguiente tabla.

Tabla de Precio de la bencina por litro durante la semana pasada en dos bencineras.

Día de la semana	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Precios ($) Bencinera 1	649,6	648,7	652,9	663,9	662,5	661,3	662,4
Precios ($) Bencinera 2	663,7	646,8	645,8	663,2	661,7	660,1	698,5

a. Calcula el rango, el promedio y la desviación estándar para el precio de la bencina en cada bencinera.

b. Si una persona quiere comprar en la bencinera que presenta la menor variación en el precio, ¿por cuál debería optar? Argumenta.

c. ¿Qué medida de dispersión te ayudó a responder la pregunta anterior?

2. La directora de un colegio otorgará una beca al estudiante de 1° medio cuyo buen rendimiento se haya mantenido durante el primer semestre. Para calcular el mejor promedio, se consideraron las asignaturas que se muestran a continuación.

Calificación de Gladys

Matemática 6,3

Lenguaje, Comunicación y Literatura...6,8

Historia, Geografía y Ciencias sociales...6,4

Ciencias Naturales 6,5

Calificaciones de Manuel

Matemática..6,1

Lenguaje, Comunicación

y Literatura.......................................6,9

Historia, Geografía y

Ciencias Sociales..............................6,2

Ciencias Naturales 6,8

a. ¿Cuál es el promedio semestral de Gladys y Manuel?

b. Calcula el rango, la varianza y la desviación estándar de las notas de cada estudiante.

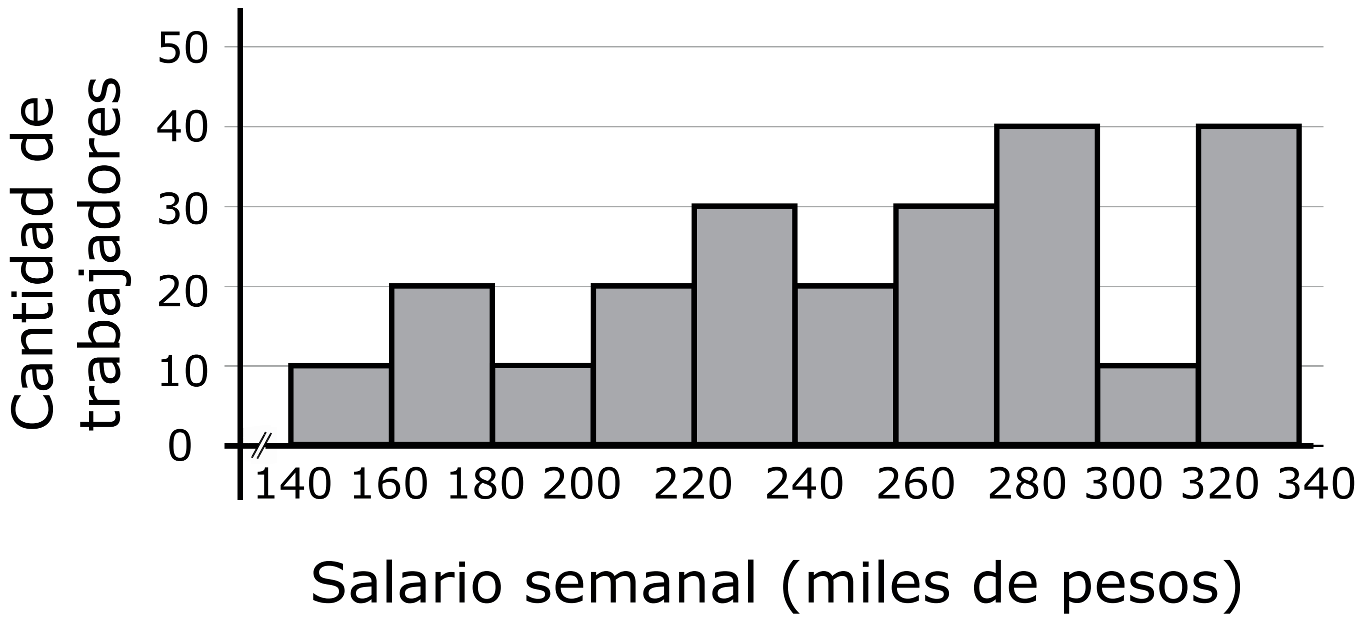
c. ¿Las notas de qué estudiante presentan mayor dispersión?

d. A partir de los resultados anteriores, ¿qué decisión tomará la directora si solo un estudiante debe ser elegido? Justifica tu respuesta.

3. Analiza la siguiente información. Luego, responde.

En el siguiente histograma se representa la distribución de los salarios semanales, en miles de pesos, de los trabajadores en una empresa.

Salarios de los trabajadores
de la empresa

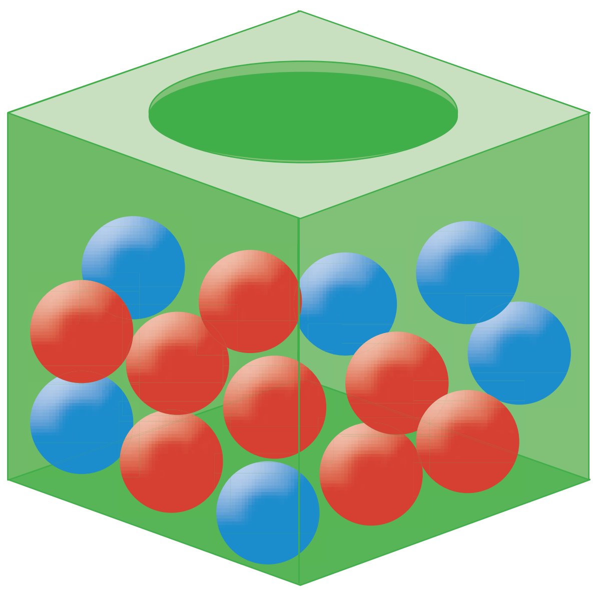


a. ¿Cuál es el salario promedio de los trabajadores de la empresa? ¿Cuál es el coeficiente de variación?

b. Se sabe que, en una empresa similar, los trabajadores reciben en promedio $120 000 semanales aproximadamente, con una varianza de $5000.

¿Qué empresa presenta sueldos más homogéneos?

4. Una urna contiene bolitas rojas y azules. La cantidad que hay de cada color se muestra en la imagen. Si se extraen dos bolitas sucesivas de esta urna, calcula:



a. La probabilidad de que la primera sea roja y la segunda azul, sabiendo que las extracciones se realizan sin reposición.

b. La probabilidad de que ambas sean azules, sabiendo que las extracciones se realizan con reposición.

c. La probabilidad de que ambas sean rojas, sabiendo que las extracciones se realizan sin reposición.

Tránsito

5. En un control de tráfico fueron multados 18 conductores: seis por no llevar puesto el cinturón de seguridad y los restantes por sobrepasar la velocidad máxima permitida.

Si se eligen al azar dos de los conductores multados, ¿cuál es la probabilidad de que ambos hayan sido multados por exceso de velocidad?

Reflexiono

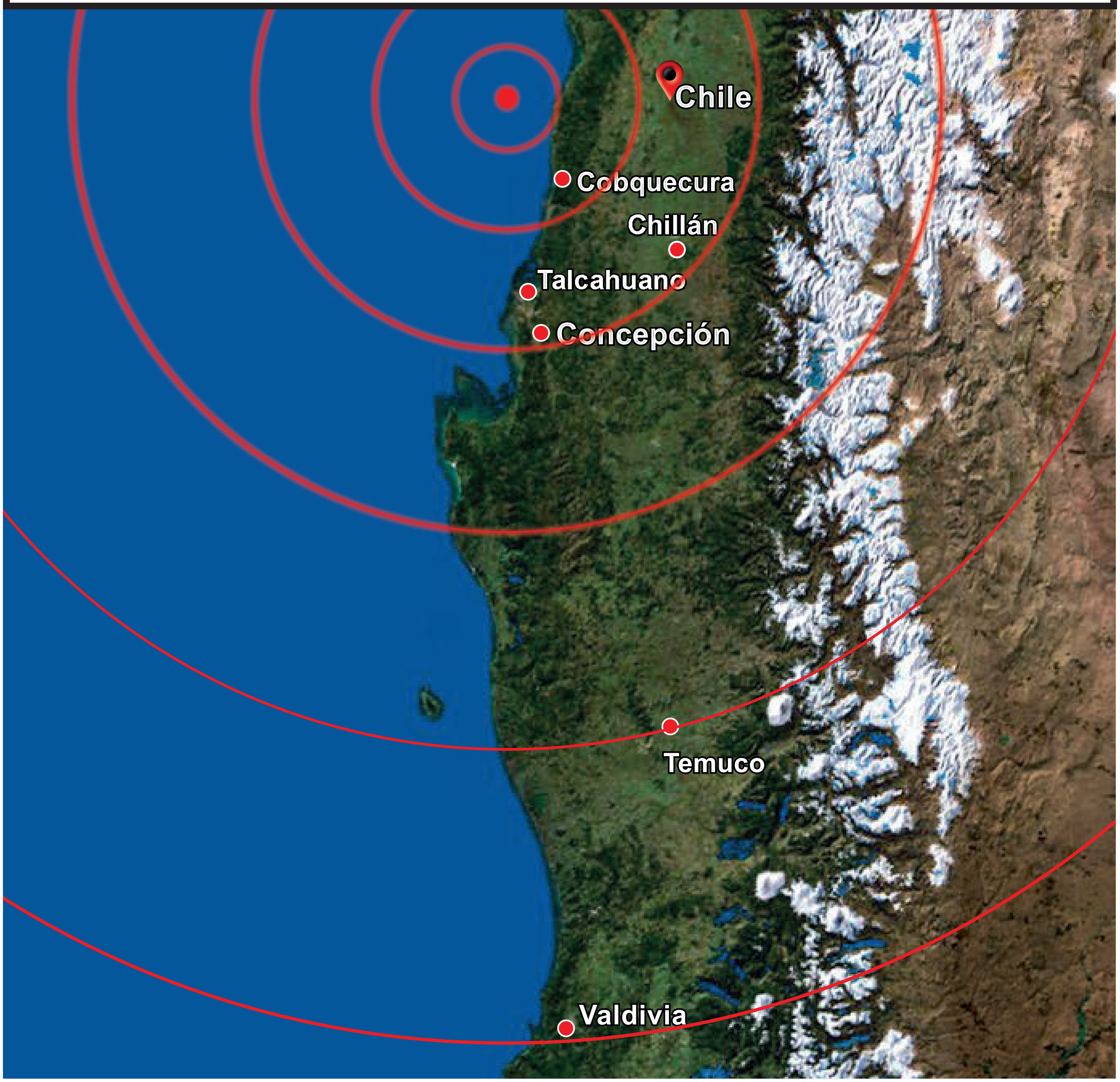
- ¿Tuvieron buenos resultados tus planes de mejorar propuestos en las evaluaciones anteriores? ¿A qué crees que se debe? Explica.

- ¿Qué tan interesante te resultó esta Unidad? ¿Para qué crees que es útil aprender sus contenidos? Fundamenta tus respuestas.

P: ¿Qué decisiones en situaciones de incerteza tomaste en la realización del proyecto de Unidad? Revisa tus avances y las metodologías que utilizaste.

UNIDAD 2

MODELAMIENTO MATEMÁTICO PARA DESCRIBIR Y PREDECIR



Álgebra y funciones

Terremoto de Valdivia, 1960, Chile

El gran terremoto de Valdivia ocurrió el domingo 22 de mayo de 1960 a las 15:11 hora local. Su epicentro se registró en las cercanías de Traiguén, Región de la Araucanía y su magnitud fue de 9,6 en la escala de Richter. Este terremoto, el más grande de los cuantificados en la historia de la humanidad, fue percibido en todo el planeta y dio origen a una serie de maremotos. Se estima que fallecieron entre 1655 y 2190 personas.

Terremoto de Chile, 2010

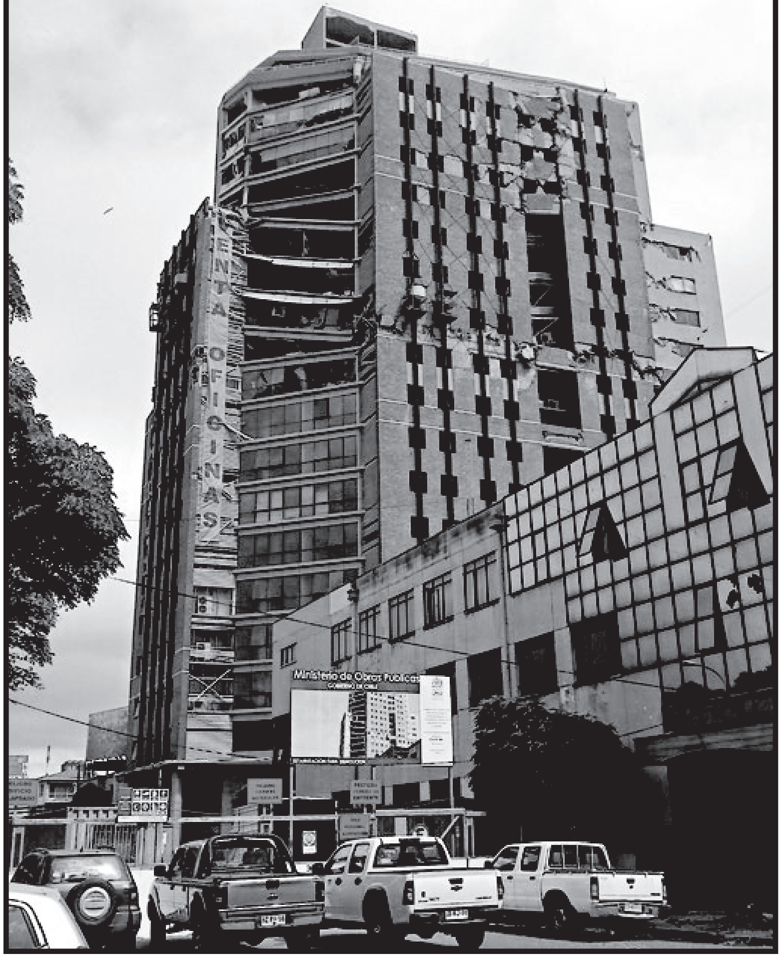
El segundo terremoto más grande registrado en Chile se produjo el sábado 27 de febrero de 2010 a las 03:34 hora local. Su epicentro se registró frente a las costas de la Región de Ñuble y su magnitud fue de 8,8. La duración del sismo fue de más de 4 minutos en las cercanías y de más de 2 minutos en Santiago.

La escala de Richter describe la magnitud de la energía liberada por un sismo. Pese a ser modificada para intensidades superiores a 7, se puede relacionar la magnitud de un sismo y la energía liberada en él mediante la siguiente expresión:

$$\log E = 1{,}5M + 11{,}8$$

donde E es la cantidad de energía liberada expresada en ergios y M es la magnitud del sismo en la escala de Richter. A su vez, aplicando la definición de logaritmo, la energía liberada en función de la magnitud del sismo es:

$$E = 10^{11{,}8+1{,}5M}$$



En parejas, respondan:

1.¿Qué les llamó la atención de las imágenes anteriores?, ¿por qué?

2. ¿Cómo se relaciona el título de la Unidad, “Modelamiento matemático para describir y predecir”, con la información presentada en estas páginas? Expliquen.

3. ¿Qué otros modelos matemáticos conocen que sean aplicados en otras disciplinas? Mencionen al menos 2.

4. Una persona le dice a otra que el terremoto de Valdivia fue casi 1 grado más fuerte que el de 2010. ¿Piensan que es correcta esta afirmación?, ¿qué significará esta diferencia de magnitud en términos de energía liberada? Discútanlo en grupos y retomen esta pregunta al finalizar el estudio de esta Unidad.

En esta Unidad estudiarás y aprenderás acerca de:

- Modelamientos de fenómenos con la función exponencial.
- Modelamientos de fenómenos con la función logarítmica.

Activo lo que sé

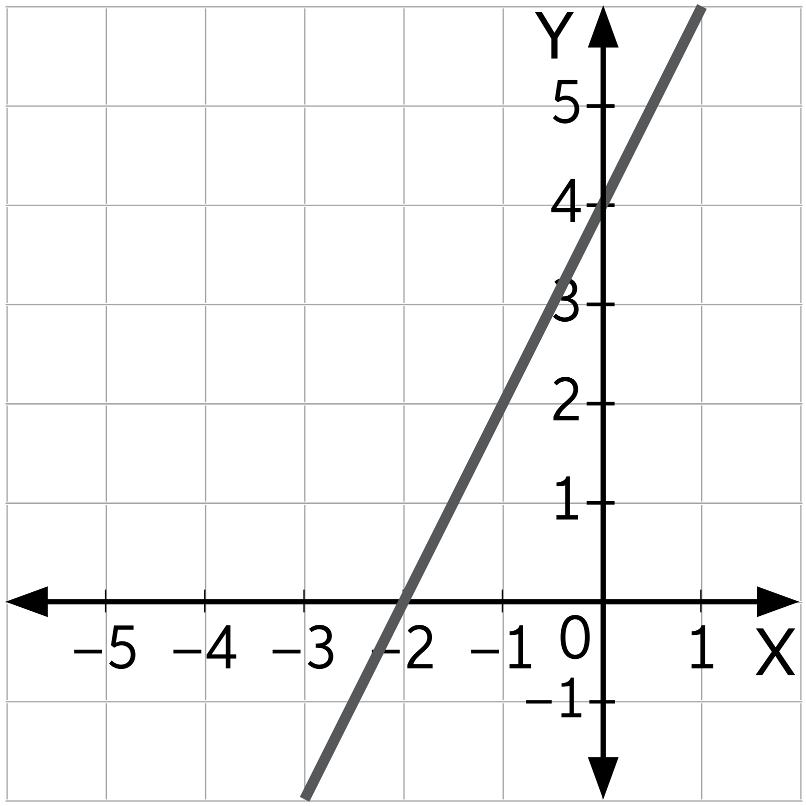
Evaluación diagnóstica

Realiza las siguientes actividades para activar tus conocimientos previos sobre la Unidad.

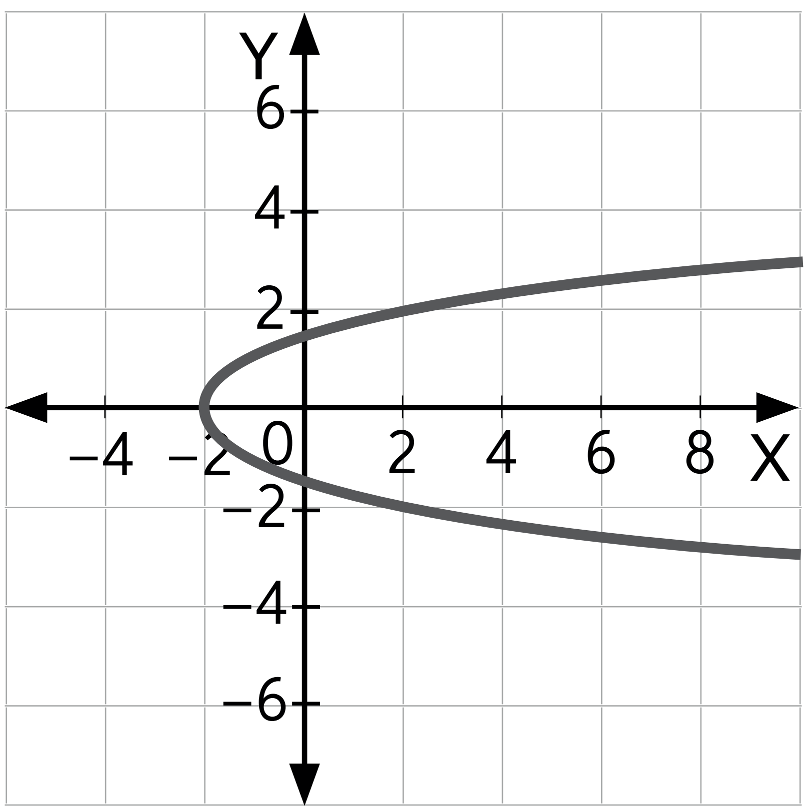
1. Indica, en cada caso, si la gráfica representa una función.

128

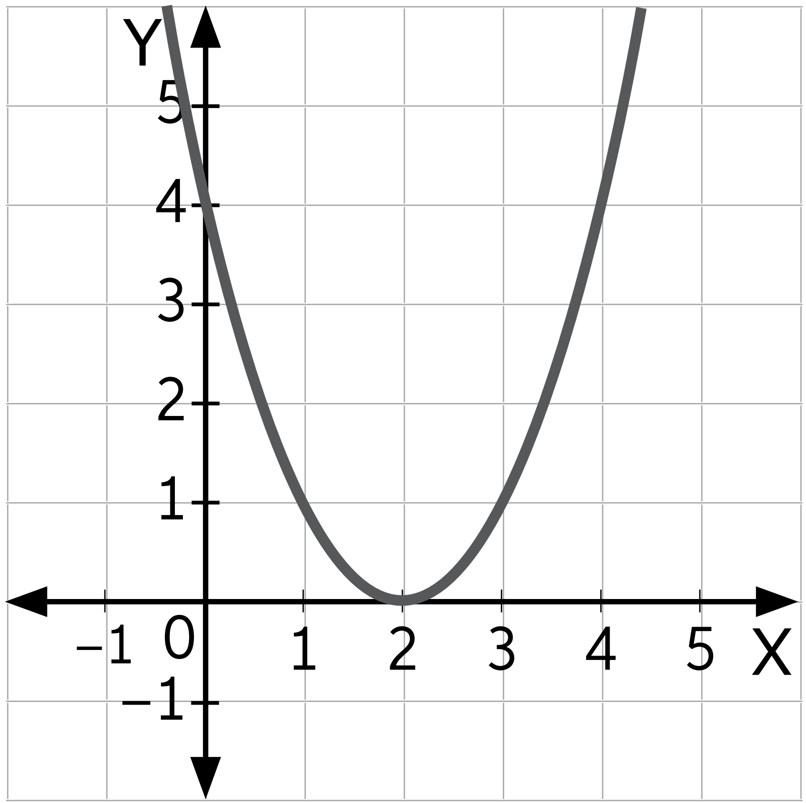
a.



b.



c.



2. Calcula en cada caso el valor X.

a. $4^x = 64$

b. $0{,}5^x = 4$

c. $X^{-5} = 243$

d. $\log_9 x = 3$

e. $\log_x 8 = 0{,}5$

f. $\log_6 216 = x$

3. Representa en un mismo plano cartesiano las siguientes funciones definidas para números reales según la regla de formación dada.

$f(x)=-2x$	$g(x)=\frac{1}{3}x+1$
$h(x)=-x^2+3$	$r(x)=x+2$

4. Determina el dominio y el recorrido de las funciones de la actividad 3.

5. Describe la gráfica de la función $f(x) = kx$ si:

a. *k* es un número mayor que cero.

b. *k* es un número menor que cero.

6. El sueldo que ganará Andrés considera un monto fijo más una comisión por cada venta que realice. ¿Qué expresión modela el sueldo mensual *S(x)* que recibirá en función de la cantidad *x* de ventas?

Mi sueldo mensual será de $650.000.

¡Correcto!...

Y por cada venta que realices tendrás una comisión de $12.000.

132

Reflexiono

- Con respecto a tu desempeño en esta evaluación, ¿qué te resultó más fácil y más difícil de responder?, ¿por qué?

- ¿Reconoces los contenidos trabajados?, ¿cuáles de esos contenidos crees que debes repasar antes de continuar?

Lección

3

Modelamiento de fenómenos con la función exponencial

Objetivo: Describir modelos y representar gráficamente las funciones exponenciales

Función exponencial

¿Qué funciones estudiaste en cursos anteriores? Descríbelas.

¿Qué estrategia utilizas para representar gráficamente una función?

1. Observa la siguiente situación.

Luego, realiza lo pedido.Francisca estudia el comportamiento de dos cultivos de bacterias, 1 y 2.

Ambos comenzaron inicialmente con una cantidad de 1000 bacterias.

El cultivo 1 se encuentra en condiciones muy favorables y se triplica cada hora.

Mientras tanto, en el cultivo 2 se está

probando un antibiótico y, a cada hora, la población disminuye a su tercera parte.

a. ¿Qué función permite modelar la cantidad de bacterias en el cultivo 1? Analiza el procedimiento que usó Francisca.

- Para hacer el estudio, construye una tabla de valores y escribe lo que se muestra a continuación.

Tiempo (hrs)	Cantidad de bacterias		
0	1.000	$\rightarrow 1.000$	$\leftrightarrow 1.000 \cdot 3^0$
1	3.000	$\rightarrow 1.000 \cdot 3$	$\leftrightarrow 1.000 \cdot 3^1$
2	9.000	$\rightarrow 1.000 \cdot 3 \cdot 3$	$\leftrightarrow 1.000 \cdot 3^2$
3	27.000	$\rightarrow 1.000 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	$\leftrightarrow 1.000 \cdot 3^3$
4	81.000	$\rightarrow 1.000 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	$\leftrightarrow 1.000 \cdot 3^4$

- En este caso, la función que permite modelar la situación está dada por $f(t) = 1.000 \cdot 3^t$, con $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, donde $f(t)$ es la cantidad de bacterias y t es el tiempo expresado en horas.

b. ¿Por qué la relación $f(t) = 1.000 \cdot 3^{t}$ es función? Explica.

c. Transcurrido un tiempo, ¿la cantidad de bacterias describe un modelo lineal? Argumenta tu respuesta.

d. ¿Qué función modela la cantidad de bacterias en el cultivo 2? Nómbrala como g(t).

El tipo de función en que la variable independiente se encuentra en un exponente recibe el nombre de función exponencial.

e. ¿Cuántas bacterias habrá en cada cultivo al cabo de 8 horas? Usa una calculadora y aproxima a la décima el resultado .

Se define como función exponencial a la función de la forma

$f(x) = ab^{x}$, donde a, b $\in \mathbb{R}$, con

$b > 0$ y $b \neq 1$.

¿Cuál sería el dominio de las funciones de la situación anterior?

2. En parejas, utilicen la versión online de GeoGebra y sigan los pasos.

Paso 1 Ingresen a www.geogebra.org. Luego, inserten 2 deslizadores, *a* y *b*. Los valores mínimo y máximo para *a* serán –10 y 10, y para *b*, 0 y 10.

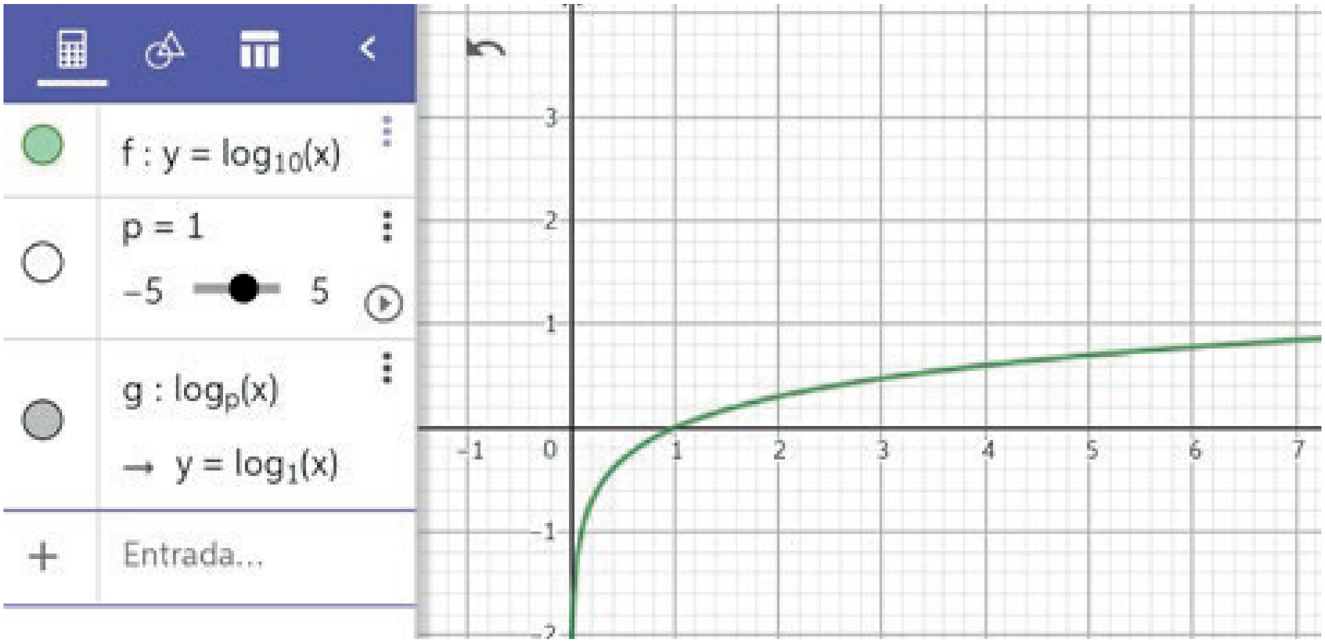
Paso 2 Escriban en la celda Entrada $f(x) = ab^x$ y presionen Enter.

Para escribir *f(x)* = debes digitar *a*b^x*.

Repitan el procedimiento para $g(x) = 2^x$. Obtendrán la siguiente gráfica:

a. ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de g?

b. ¿Cuál es la intersección con el eje Y? ¿Qué sucede con la gráfica respecto del eje X?



Paso 3 Fijen el valor en a = 1 y muevan el deslizador. Luego,analicen lo que ocurre con la gráfica de la función en los siguientes casos:

b>2	2>b>1	0<b<1

c. ¿Qué ocurre con el dominio y el recorrido en cada caso?

d. ¿Qué ocurre con las intersecciones con los ejes en cada caso?

e. Expliquen con sus palabras lo que ocurre con la gráfica de la función cuando b toma distintos valores.

Paso 4 Fijen el valor b = 2 y muevan el deslizador a. Luego, analicen lo que ocurre con la gráfica de la función en los siguientes casos:

a>1	0>a> 1	-1<a<0	a< -1

f. ¿Qué ocurre con el dominio y el recorrido en cada caso?

g. ¿Qué ocurre con las intersecciones con los ejes en cada caso?

h. Expliquen con sus palabras lo que ocurre con la gráfica de la función cuando a toma distintos valores.

5. Representa en un mismo plano cartesiano las siguientes funciones.

$f(x)=3^x$	$g(x)=5^x$	$p(x)=(\frac{1}{5})$	$q(x)=(2{,}5)^{-x}$

Para graficar una función exponencial puedes:

-Dar valores para *x* y determinar su correspondiente en *f(x)*.

-Ubicar los puntos en el plano cartesiano.

-Trazar la gráfica uniendo los puntos.

A partir de las gráficas, responde:

a. ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de las funciones?

b. ¿Qué punto en común tienen las gráficas?

c. ¿Intersecan las gráficas el eje X?

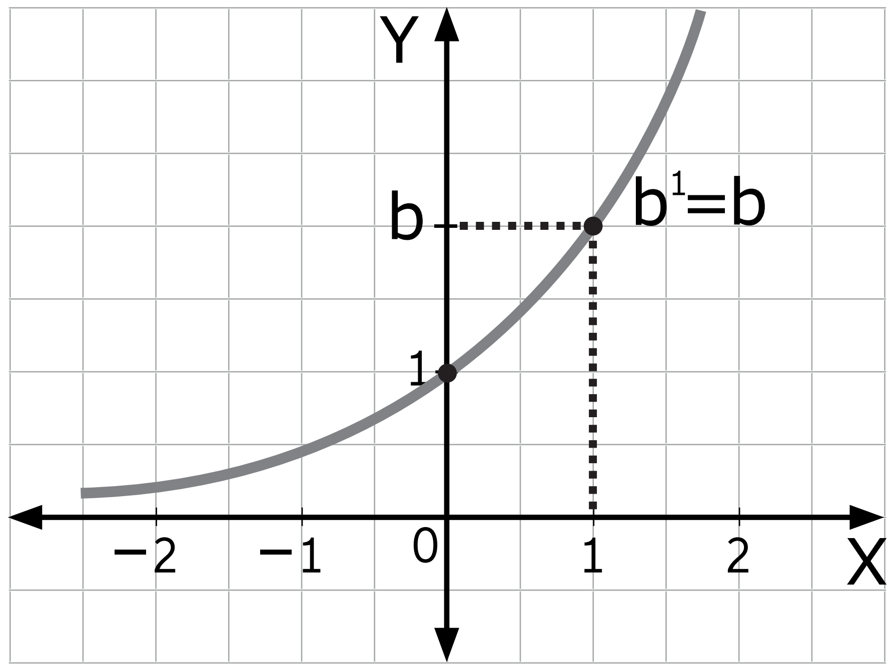
d. ¿Qué sucede con la gráfica respecto del eje X? Explica.

e. ¿Qué ocurre con la gráfica de f y g a medida que x aumenta?, ¿y con la gráfica de p y q?

En una función exponencial de la forma $f(x) = ab^x$, donde a, $b \in \mathbb{R}$, con $b>0$ y $b\neq 1$, podemos observar lo siguiente:

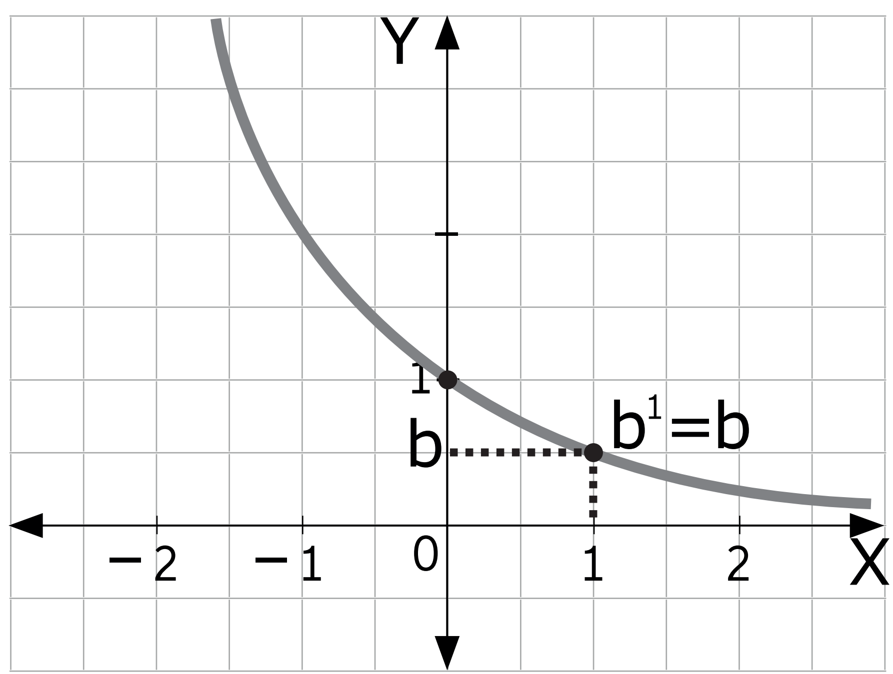
- Su dominio es el conjunto de todos los números reales ($\mathbb{R}$).
- Su recorrido es el conjunto de todos los números reales positivos ($\mathbb{R}^+$).
- La gráfica interseca el eje Y en el punto (0, a) y no interseca el eje X, que actúa como asíntota de la gráfica.
- La gráfica de una función exponencial de la forma $f(x)=b^x$ depende del valor de *b*. Así:

Si b >1



La función es creciente.

Si 0 <b<1



La función es decreciente.

Si $|a|<1$, la gráfica de $y=ab^x$ es una dilatación de $y=b^x$, mientras que $|a|>1$ es una contracción. Además, mientras mayor es el valor de b, la función tiene un mayor crecimiento.

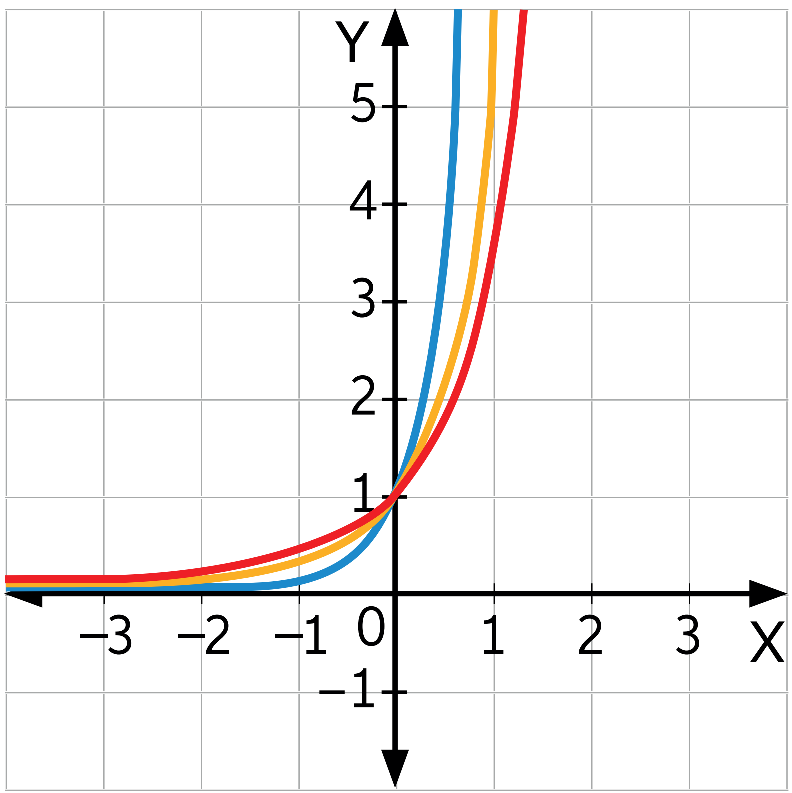
▶ ¿Por qué, en la situación de las bacterias (actividad 1), el dominio de la función no son todos los números reales? Explica.

▶ Considera una función exponencial de base mayor que 1. ¿Cómo es su comportamiento para valores negativos de x?

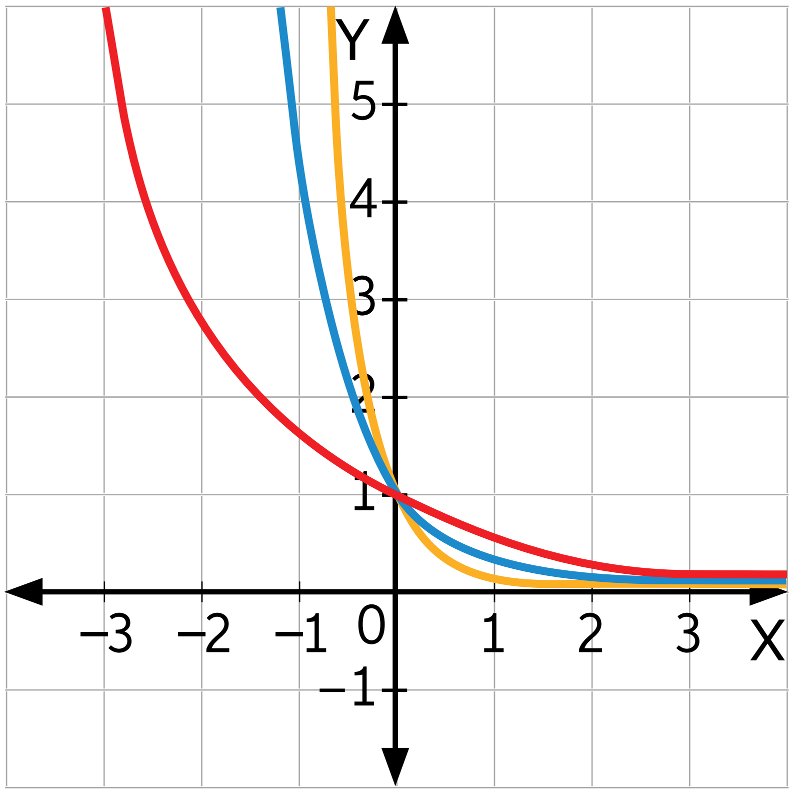
▶ ¿Cómo crees que sería la gráfica de $f(x) = 2^x + 3$?

6. Identifica en cada caso a qué curva corresponden las funciones dadas.

a. $f(x)=3^x$, g$(x)=$, $h(x)=10^x$



b. $f(x)=0{,}3^x$, $g(x)=0{,}6^x$, $h(x)= 0{,}1^x$



7. Representa en el software GeoGebra las funciones de los casos 1 y 2. Luego, responde.

Caso 1

$f(x)=2^{x}$	$g(x)=2^{x+3}$	$h(x)=2^{x-1}$

Caso 2

$p(x)=(\frac{1}{3})^{x}$	$q(x)=(\frac{1}{3})^{x}-2$	$r(x)=(\frac{1}{3})^{x}+3$

a. ¿Qué ocurre con la gráfica de las funciones en el caso 1?, ¿y en el 2?

b. Escribe las conclusiones que puedes obtener con respecto a la traslación de las funciones.

c. ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de las funciones?

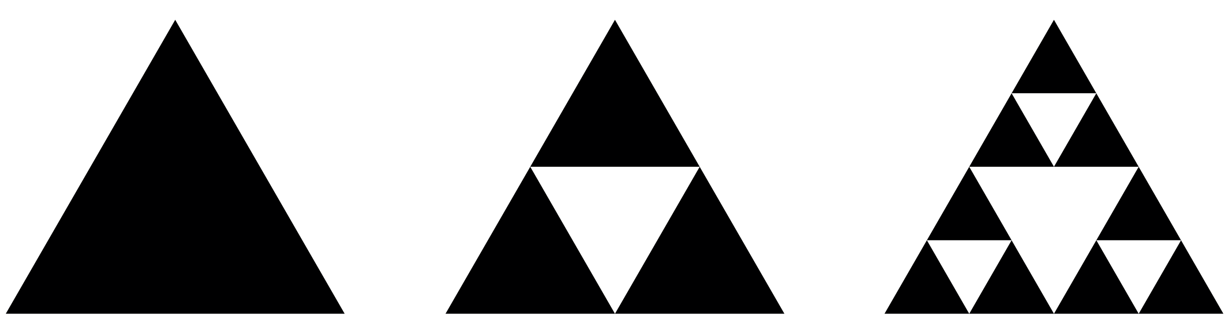
La gráfica de $y = ab^{x-c}$ es una t**ras-lación horizontal** de c unidades respecto de $y = a\,b^{x}$, hacia la **derecha** si $c > 0$ y hacia la **izquierda** si $c < 0$.

La gráfica de $y = a\,b^{x} + h$ es una **traslación vertical** de h unidades respecto de $y = a\,b^{x}$, hacia **arriba** si $h > 0$ y hacia **abajo** si $h < 0$.

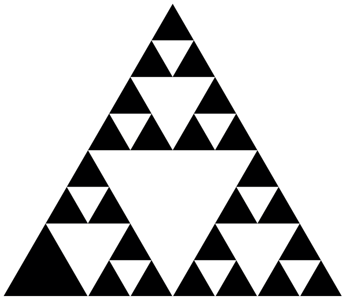
▶ ¿Cómo graficarías la función $f(x)=2^{x+1}-2$?, ¿qué estrategia usarías? Explica.

Geometría

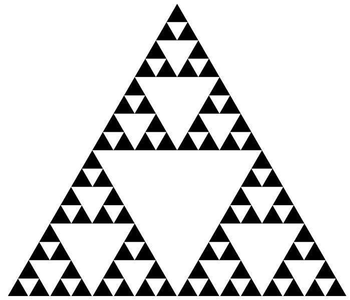
8. El **triángulo de Sierpinski** es una figura que se construye a partir de un triángulo equilátero (etapa 0), sobre el cual se trazan las medianas y se retira el triángulo central (etapa 1). Para las siguientes etapas, esto se repite en cada uno de los triángulos restantes. En rigor, el triángulo de Sierpinski es la figura obtenida después de infinitas etapas.



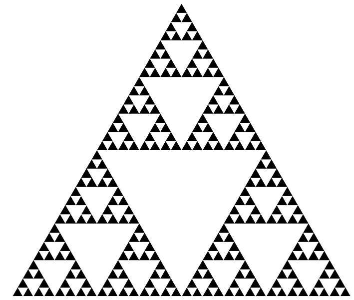
Etapa 0 Etapa 1 Etapa 2



Etapa 3



Etapa 4



Etapa 5

b. ¿Qué función permite modelar la cantidad de triángulos negros *C(n)* que habrá en la etapa *n*?

Biología

9. En epidemiología se utilizan diversos modelos matemáticos para representar el número de personas contagiadas por una enfermedad. Por ejemplo, el número de personas contagiadas por un virus está dado por la función

$$f(t) = \frac{10.000 \cdot (2{,}72)^{t}}{(2{,}72)^{t} + 9.000}$$

donde *t* es la cantidad de días.

a. ¿Cuántos contagiados se espera que habrá luego de 1, 4 y 10 días?

"Usa una calculadora"

b. Grafica la función en GeoGebra. ¿Qué ocurre al cabo de mucho tiempo? Comenta tu respuesta con tu curso.

c. ¿Es una función creciente o decreciente?

Actividad de aplicación ✓

Crecimiento en el uso de redes sociales

¿Qué haremos?: Describir el crecimiento en el uso de las diferentes redes sociales en Chile o a nivel mundial.

Joven 1:" En las noticias escuché que el uso de redes sociales ha tenido un crecimiento muy acelerado."

Joven 2: “Corresponderá a un crecimiento exponencial?”

Planifiquemos

Paso 1 Organícense en grupos de 3 o 4 estudiantes. Cada grupo deberá escoger una red social.

Paso 2 Investiguen en Internet acerca de la red social que escogieron y estudien cómo ha sido el crecimiento de su uso. Para ello, busquen y registren la cantidad de usuarios durante los últimos años.

Para tener más datos, pueden investigar sobre la cantidad de usuarios por mes. Así se podrá obtener un mejor análisis de la información.

Analicemos y presentemos

Paso 3: Representen en un gráfico la información obtenida y observen el comportamiento de los datos. Luego, respondan.

- ¿Representa la gráfica un crecimiento o decrecimiento?, ¿cómo lo supieron?
- ¿Pueden afirmar que la red social que escogieron presenta un crecimiento exponencial en su uso? Fundamenten su respuesta.

- Estimen la cantidad de usuarios que habrá para 2028 si sigue el mismo comportamiento.

Paso 4 Elaboren un tríptico o folleto informativo acerca del trabajo realizado. Luego, compartan el trabajo realizado en alguna plataforma digital de uso común para el curso.

41 a la 51

Para concluir

a. ¿Cómo se define una función exponencial? Explica con un ejemplo.

b. Si una población de animales tiene una variación porcentual negativa constante, ¿cuál base elegirías para la función exponencial que modela la situación: una mayor a 1 o menor a 1? Justifica tu respuesta.

c. ¿Qué dificultades tuviste en el desarrollo de este tema?, ¿cómo las superaste?

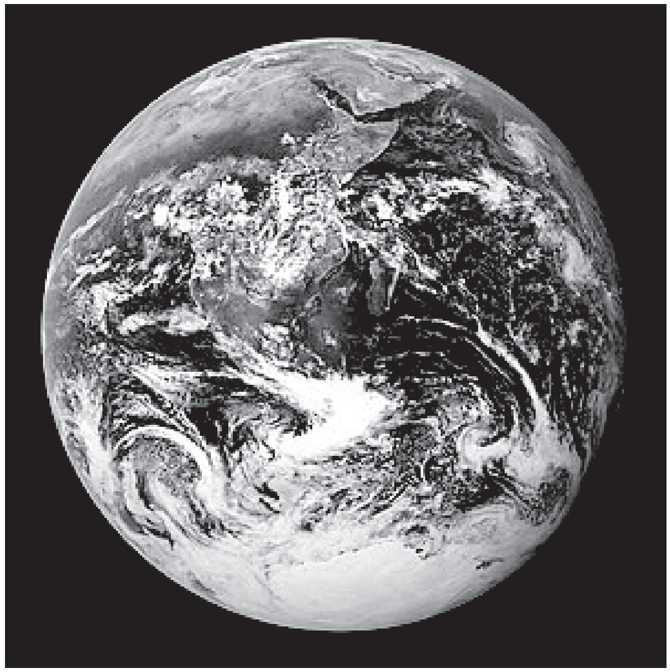
CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO EXPONENCIAL

Objetivo: Aplicar modelos matemáticos que describen situaciones de crecimiento y decrecimiento exponencial.

¿Qué características tiene una función exponencial? Descríbelas.

¿Cómo diferencias gráficamente entre una función exponencial de base mayor a 1 y una con base mayor a 0 y menor a 1?

Población mundial



2018: 7.400 millones

1. Lee la información del recuadro. Luego, realiza lo pedido.

162

El economista y demógrafo inglés Thomas Malthus (1766 -1834) estudió la población humana y concluyó que el número de habitantes se puede modelar según la expresión $P(t) = P_0 \cdot e^{rt}$, donde ***P(t)*** es la población en un tiempo ***t***, P_0 es la población en ***t = 0*** y **r** es una constante relacionada con la tasa de crecimiento.

Según la información recolectada por los censos del Instituto nacional de Estadísticas (INE), en Chile había 13.348.401 habitantes en 1992 y 15.116.435 en 2002.

a. Observa el procedimiento para estimar la cantidad de habitantes que había en Chile en 2012.

- Como pasaron 10 años entre ambos censos, se puede conocer el valor de r resolviendo la ecuación:

$t = 0 \longrightarrow$ año 1992

$t = 10 \longrightarrow$ año 2002 $\quad 15.116.435 = 13.348.401 \cdot e\ 10^{r}$

$P_0 = 13.348.401$ $\quad 15.116.435 = e^{10r} \quad /In$

$P(t) = 15.116.435$ $\quad 13.348.401$

$$\text{In}\left(\frac{15.116.435}{13.348.401}\right) = 10\,r \longrightarrow r \approx 0{,}01243$$

Se aplica logaritmo natural para despejar la incógnita.

- Luego, la población estimada de habitantes en Chile en 2012 es:

P(10)=15.116.435 $\cdot$ $e^{0,01243 \cdot 10}$ $\longrightarrow$ *P(10)* ≈ 17.117.179 habitantes.

b. ¿Qué puedes decir con respecto a la estimación anterior? Para responder esta pregunta investiga en sitios web de información confiable y compara.

c. Considera la población mundial que había en 2018 y realiza una estimación para 2040. Luego, investiga sobre las predicciones que se han hecho para ese año.

¿Se acerca tu estimación a lo esperado? Justifica.

La función exponencial modela muchas situaciones de diversas áreas. Por ejemplo, en ciencias sociales, el crecimiento demográfico; en biología, el crecimiento bacteriano, y en economía, el interés compuesto, entre otras.

Si el crecimiento de las variables que experimenta un fenómeno se puede modelar con una función de la forma $f(x)=ab^x$, con $a>0$ y $b>1$ entonces presenta un crecimiento exponencial.

Si el crecimiento de las variables que experimenta un fenómeno se puede modelar con una función de la forma $f(x) = a\, b^{x}$, con $a > 0$ y $0 < b < 1$, entonces presenta un decrecimiento exponencial.

¿Cómo se relaciona el título de la Unidad con lo trabajado en las páginas 160 y 167?

2. Lee la situación y realiza lo pedido.

Marcos decide abrir una cuenta de ahorro para financiar en el futuro los estudios de su hijo recién nacido. Por su parte, el banco le ofreció la tasa de interés anual que se muestra en la imagen.

El monto que depositó Marcos en la cuenta fue de $1.000.000. Si no retira el dinero ni los intereses, ¿qué capital tendrá a los 5 años?, ¿qué capital tendrá cuando su hijo cumpla 18 años?

Interés anual 4,8%

a. Analiza el siguiente procedimiento para responder las preguntas planteadas.

• El capital (C1) que tendrá al primer año será:

$$C_1 = 1.000.000 + 1.000.000 \cdot \frac{4,8}{100}$$

$$C_1 = 1.000.000 + 1.000\ 000 \cdot 0,048$$

$$C_1 = 1.000.000 \cdot (1 + 0,048)$$

$$C_1 = 1.000.000 \cdot (1,048) \longrightarrow C_1 = 1.048.000$$

Para los años siguientes formamos la siguiente tabla:

Tiempo (años)	Capital ($)
0	1.000.000
1	$1.000.000 \cdot 1{,}048 = 1.048.000$
2	$1.048.000 \cdot 1{,}048 = 1.000.000 \cdot (1{,}048)^2 = 1.098.304$
3	$1.098.304 \cdot 1{,}048 = 1.000.000 \cdot (1{,}048)^3 \approx 1.151.304$

Sea $i = \dfrac{r}{100}$, entonces se verifica que:

Al final del 1°. año $\longrightarrow C_1 = C + Ci = C(1 + i)$

Al final del 2.° año $\longrightarrow C_2 = C_1(1 + i) = C(1+i)^2$

Al final del 3.° año $\longrightarrow C_3 = C_2(1 + i) = C(1+i)^3$

b. Según lo anterior, si depositas un capital *C* a una tasa de interés de *r %*, ¿qué capital (C_t) se habrá formado al cabo de t años?

c. Utiliza una calculadora y responde las preguntas de la situación.

172

El **interés compuesto** es una ley de capitalización por la cual los intereses obtenidos al final de cada periodo se suman al capital anterior para producir nuevos intereses en el siguiente periodo. Un capital inicial *C* al *r* %, al cabo de t años se convierte en:

$$C_t = C(1+i)^t \text{ , donde } i = \frac{r}{100}$$

Función exponencial de base *(1+i)*

Esta expresión se aplica en general: en procesos en los que el aumento es un porcentaje de la cantidad existente, para estudiar el crecimiento de poblaciones de seres vivos y también para emplearla en los casos en que $C\,t < C$, con tal de sustituir $(1+i)^t$ por $(1-i)^t$.

¿Es el interés compuesto una aplicación relacionada con el crecimiento o el decrecimiento exponencial?, ¿por qué?

3. Resuelve cada situación. Para ello, analiza el ejemplo.

Un bosque tiene 28.000 m^3 de madera y aumenta 3,5 % cada año. Si sigue creciendo en las mismas condiciones, ¿cuánta madera tendrá al cabo de 15 años? ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse la cantidad de madera?

174

• El crecimiento del bosque está dado por la función

M(t) $=28.000\cdot(1+0{,}035)^{t}$, donde *M(t)* indica la madera, en m^3, que tendrá al cabo de *t* años. Por lo tanto, para *t*=15, se obtiene $M(15) = 28.000\cdot(1+0{,}035)^{15}\approx 46.910$ m^3.

• Para duplicar la cantidad de madera, se realiza lo siguiente:

$$56.000 = 28.000(1+0{,}035)^{t}$$

$$2 = 1{,}035^{t} \quad / \log$$

$$\log 2 = t \cdot \log 1{,}035$$

$$t = \frac{\log 2}{\log 1{,}035} \approx \frac{0{,}301}{0{,}015} \approx 20 \text{ años}$$

a. En una automotora se vende la moto que muestra la imagen en $1.490.000. La depreciación anual de este vehículo consiste en la disminución del 20 % de su precio.

• ¿Cuál es la función que modela la situación?

• ¿Esta situación corresponde a un crecimiento o decrecimiento exponencial?

• ¿Qué valor tendrá la moto luego de 5 años?

• ¿Cuántos años transcurrirán para que su precio sea de $249.081?

b. En la caja de un fármaco se indica lo siguiente:

Por cada mes transcurrido disminuye 50 % la efectividad 150 mg

¿Qué tanto por ciento de efectividad tendrá luego de 2 meses?, ¿y a los 4 meses?

c. Un cubo de hielo de 4 cm^3 se introduce en un vaso de agua. Por cada minuto que pasa, el 10 % de su volumen se transforma en agua líquida.

- ¿Cuál es la función que modela la situación?

• ¿Qué cantidad de hielo quedará al cabo de 12 minutos?

52 a la 59

Para concluir

a. Con respecto a la actividad 2, ¿en Cuánto tiempo el capital depositado por Marcos se duplicará?

b. Explica cómo reconoces cuando un modelo describe un crecimiento o un decrecimiento exponencial.

c. ¿Qué estrategia usaste para resolver los problemas?, ¿por qué esa y no otra? Explica.

Antes de continuar

Evaluación intermedia

Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. En un mismo plano cartesiano, construye la gráfica de las siguientes funciones:

a. $f(x)= 3^{x} - 4$

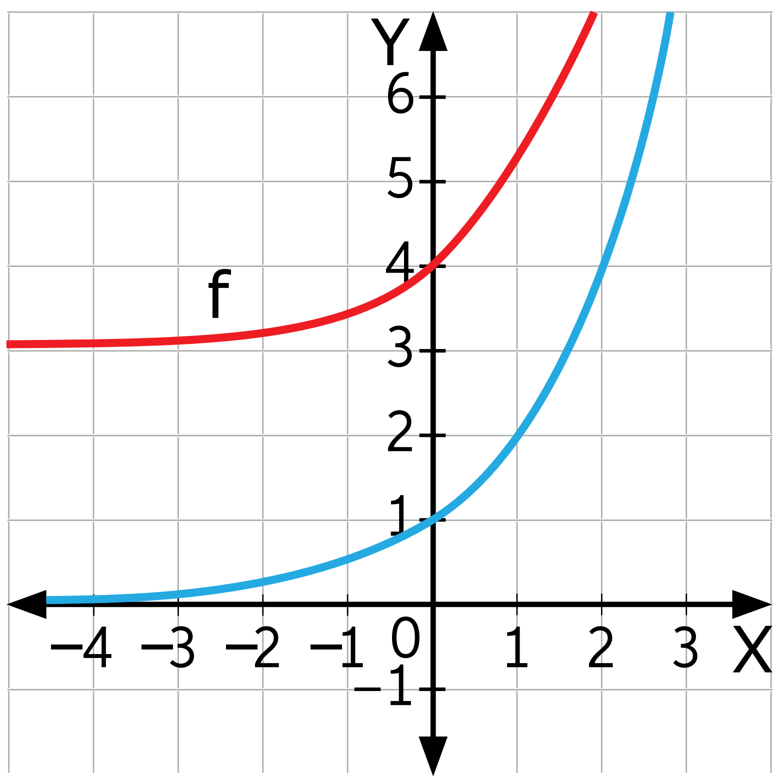
b. $h(x)= 5^{2-x} - 2$

c. $i(x)= -2^{-x+6}$

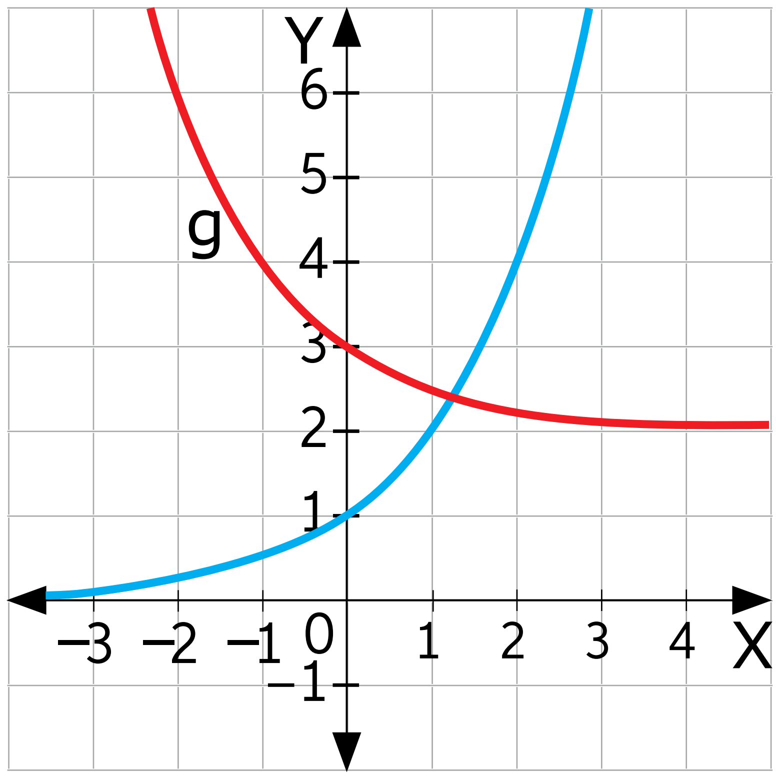
2. Determina el dominio y el recorrido de las funciones de la actividad anterior.

3. En cada caso, identifica la función correspondiente a la gráfica. La curva en azul, corresponde a $y=2^x$.

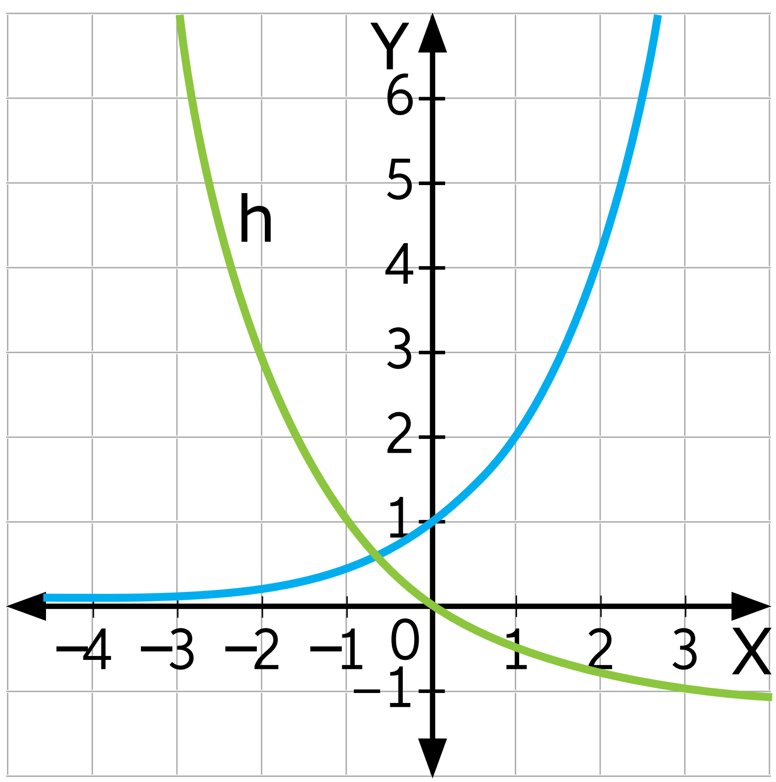
a.



b.



c.



4. Un capital de \$800.000 ha sido invertido en un banco a una tasa de 7 % de interés anual.

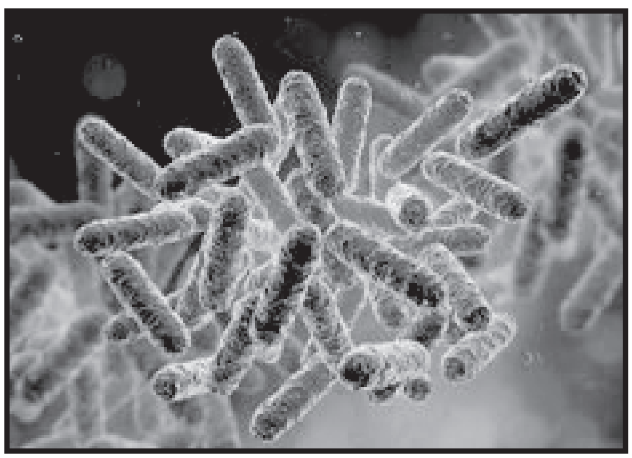
a. ¿Cuál es el capital final luego de 10 años?

b. ¿Cuánto tiempo tardará en triplicarse el monto inicial?

Biología

5. Un equipo de biólogos ha proyectado que, dentro de x días los siguientes cultivos tendrán una cantidad *C(x)* de millones de bacterias según lo que se indica.

$$C(x) = 3 \cdot 2^{0,2x}$$



$$C(x) = 2 \cdot e^{0,1x}$$

a. ¿Cuál de los cultivos de bacterias presenta el crecimiento más rápido? Justifica tu respuesta.

b. ¿Cuántas bacterias habrá en 10 días en cada caso? Justifica tu respuesta.

60 a la 63

Reflexiono

- De las aplicaciones de la función exponencial vistas en la Lección, ¿de cuál te gustaría saber más? Investiga y comparte con un compañero.

- De acuerdo con tu desempeño en esta evaluación, ¿en cuáles actividades tuviste más dificultades?, ¿qué podrías hacer al respecto?. Crea un plan de acciones que permitan superar dichas dificultades.

Lección

4

Modelamiento de fenómenos con la función logarítmica

Objetivo: Aplicar modelos matemáticos de funciones logarítmicas y también representar gráficamente dichas funciones.

Función logarítmica

¿Cómo se define un logaritmo? Explica con un ejemplo.

¿Cuáles son las propiedades de los logaritmos que estudiaste en cursos anteriores?

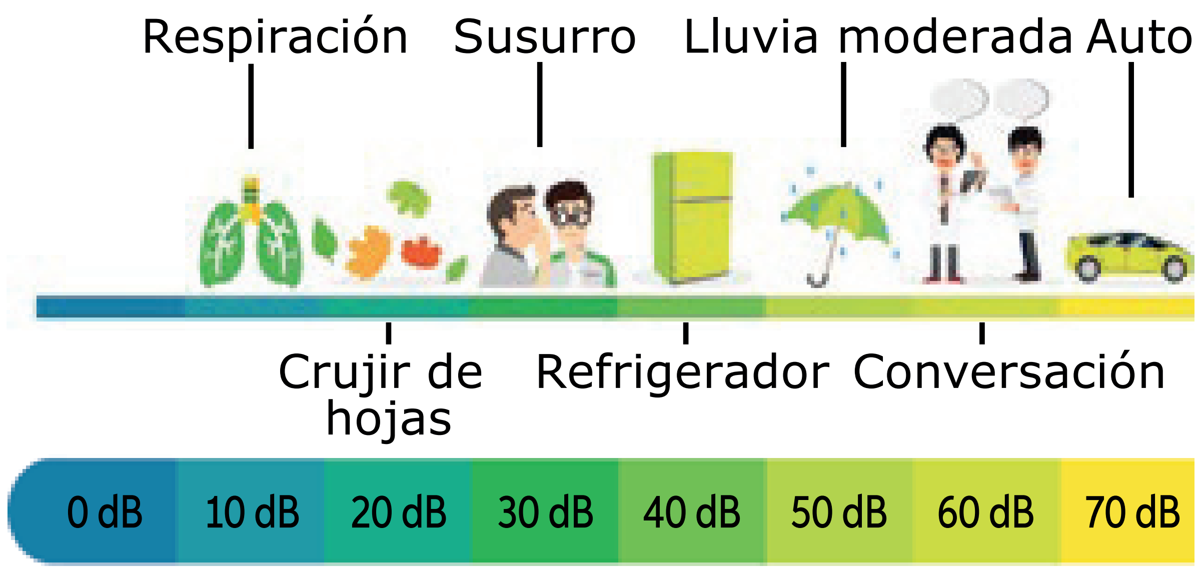
Acústica

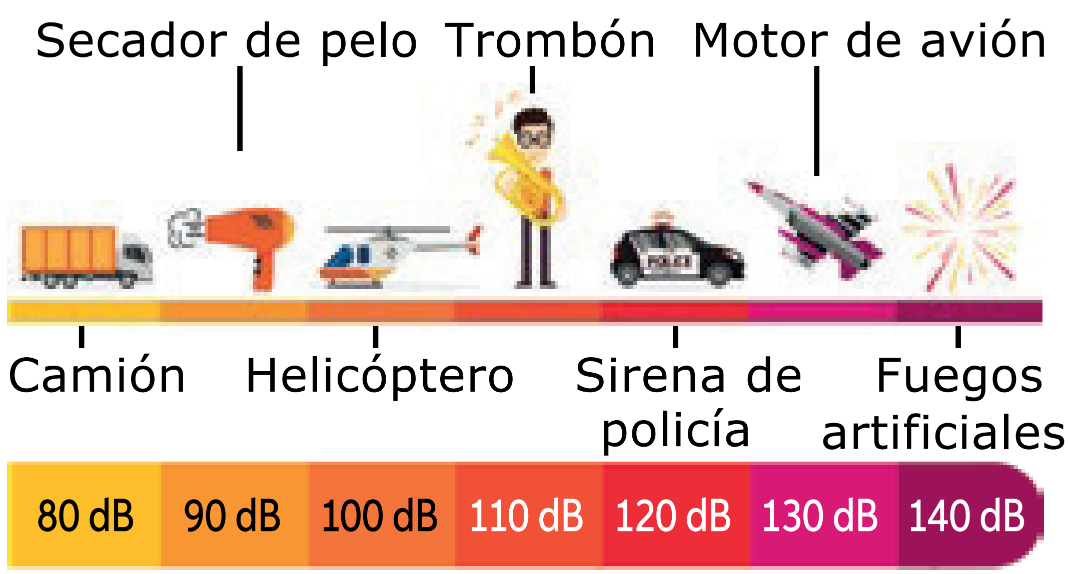
1. Lee la siguiente información.

Luego, responde.

La intensidad del sonido se mide en vatios por metro cuadrado (W/m^2). La menor intensidad que puede captar el oído humano, llamado umbral de audición, es 10-12 W/m^2. A partir de 1 W/m^2, comienza el umbral del dolor en el oído. Para comparar un sonido cualquiera con la menor intensidad audible, se utiliza la siguiente función:

$\beta(I) = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, donde β es el nivel de intensidad sonora medido en decibeles (dB), I es la intensidad del sonido en W/m^2 e I_0 es el umbral de audición (10^{-12} W/m^2).





a. Calcula el nivel de intensidad sonora (en decibeles) del umbral del dolor. Guíate por el siguiente ejemplo del umbral de audición.

$$\beta(10^{-12}) = 10\log\left(\frac{10^{-12}}{10^{-12}}\right)$$

$$\beta(10^{-12}) = 10\log 1$$

$$\beta(10^{-12}) = 0$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad sonora del umbral de audición es 0 dB.

b. Escoge 3 situaciones de las que aparezcan en la imagen y calcula la intensidad de sonido (W/m^2) de cada una. Observa el ejemplo para el refrigerador (40 dB).

$$40 = 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$

Se aplican propiedades de logaritmo.

$$4 = \mathrm{Log}I - \log(10^{-12})$$

$$4 = \log I + 12\log 10$$

$$4 = \log I + 12$$

$$-8 = \log I \longrightarrow I/ = 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2}$$

Se aplica la definición de logaritmo.

c. En general, se recomienda que, al usar audífonos, no se superen los 80 dB. Sin embargo, muchas personas los utilizan cerca de los 100 dB.

- ¿Cuál es la intensidad del sonido de estas magnitudes?
- ¿Cuántas veces mayor es la intensidad de los 100 dB que la recomendada?

2. Aplica el modelo matemático anterior para conocer el nivel de intensidad sonora (en decibeles) de los siguientes fenómenos:

- Discoteca $10^{-1} W/m^2$
- Tren en túnel $10^{-3} W/m^2$
- Bomba de Hiroshima $10^{8} W/m^2$
- Tráfico intenso $10^{-4} W/m^2$
- Biblioteca $10^{-10} W/m^2$
- Aspiradora $10^{-5} W/m^2$

▶ Si se sabe que un equipo de sonido tiene una intensidad igual al doble de la de otro, ¿cuál es la diferencia que poseen en decibeles?

¿A qué volumen escuchas música? ¿Te has informado de los cuidados que debes tener para no dañar tus oídos?

3. Representa la función $f(x) = \log_2 x$. Para ello, realiza lo pedido.

a. Elabora una tabla de valores y grafica la función en el plano cartesiano.

Recuerda que, para una potencia $y=a^x$, se define el logaritmo $x=\log_a y$. Por ejemplo:

$$2^4=16 \leftrightarrow 4 = \log_2 16$$

b. A partir de la gráfica, responde:

- ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función?
- ¿En qué punto la gráfica se interseca con el eje X?
- ¿La gráfica interseca el eje Y?
- ¿Qué ocurre con los valores de la función cuando aumenta el valor de x? ¿Es una función creciente o decreciente?

Se define función logarítmica como la función de la forma:

$f(x) = \log_a x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.

En ella se tiene que:

- Su dominio es el conjunto de todos los números reales positivos ($\mathbb{R}^+$).
- Su recorrido es el conjunto de todos los números reales ($\mathbb{R}$).
- La gráfica **interseca** el eje **X** en el punto (1, 0) y no interseca el eje Y, que actúa como asíntota de la gráfica.

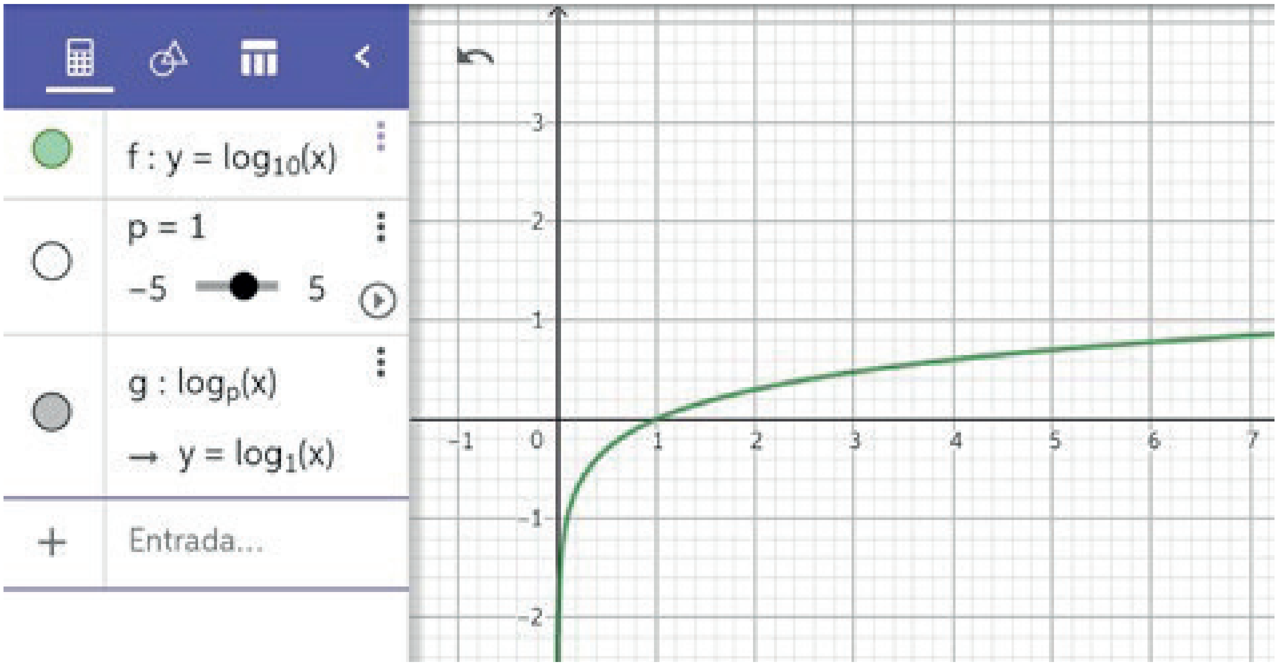
Existen varios fenómenos o situaciones de la naturaleza que son modelados mediante una función logarítmica. Por ejemplo: la intensidad del sonido, la magnitud de un sismo, la escala del pH, entre otros.

TIC

4. En parejas, utilicen la versión online del software GeoGebra y sigan los pasos.

Paso 1 Escriban en la celda Entrada la función y=lg(x). Luego, presión en Enter.

Paso 2 Construyan la gráfica de $y=\log_p x$. Para ello, inserten un deslizador *p* escribiendo en la celda Entrada *y*=log*(p, x).* Luego, presionen Enter y muevan el deslizador para que tome distintos valores. Deben obtener la gráfica que se muestra a continuación:



a. ¿Cambian el dominio y el recorrido de la función?

b. ¿Qué ocurre con los puntos en que la gráfica se interseca con los ejes?

c. ¿Qué ocurre con la gráfica de la función cuando p toma valores cada vez mayores?

d. Describan lo que ocurre con la gráfica de la función cuando p toma valores entre 0 y 1. ¿Por qué se produce esto?

e. ¿Puede tomar p valores negativos? Justifiquen su respuesta.

Paso 3 Inserten un deslizador *b*, escribiendo en la celda Entrada $y = \lg(x) + b$. Presionen Enter y muevan el deslizador.

a. ¿Cambian el dominio y el recorrido de la función? ¿Qué ocurre con los puntos en que la gráfica se interseca con los ejes?

b. Describan lo que ocurre con la gráfica de la función cuando b toma valores cada vez mayores.

c.¿Puede b tomar valores negativos? Justifiquen y describan lo que ocurre.

Paso 4 Inserten un deslizador *c*, escribiendo en la celda Entrada $y = \lg(x - c)$. Presionen Enter y muevan el deslizador.

a. ¿Cambian el dominio y el recorrido de la función? ¿Qué ocurre con los puntos en que la gráfica se interseca con los ejes?

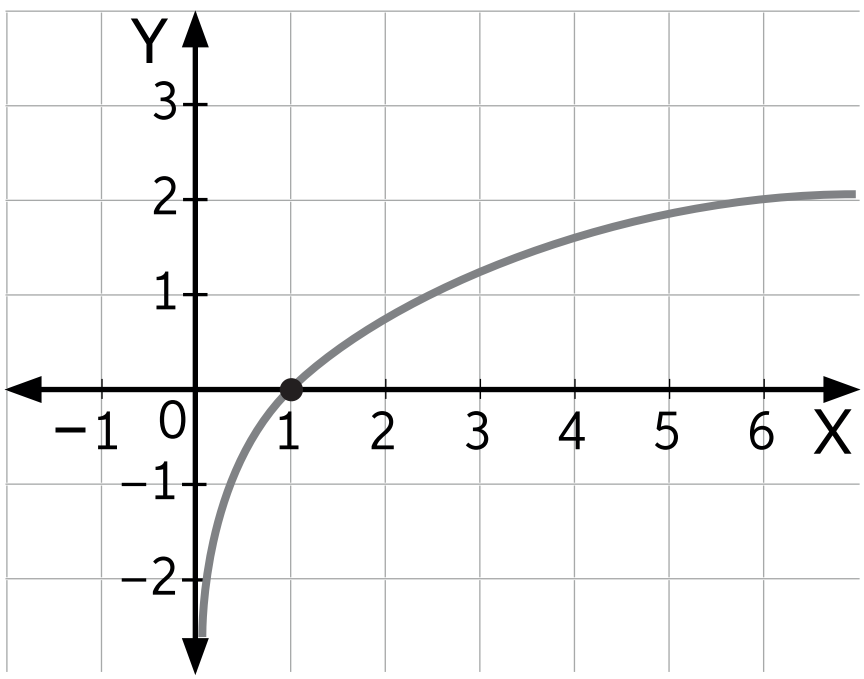
b. Describe lo que ocurre con la gráfica de la función cuando *c* toma distintos valores.

En una clase de computación el profesor dice: “En GeoGebra se utiliza lg en lugar de log para el logaritmo de base 10.”

198

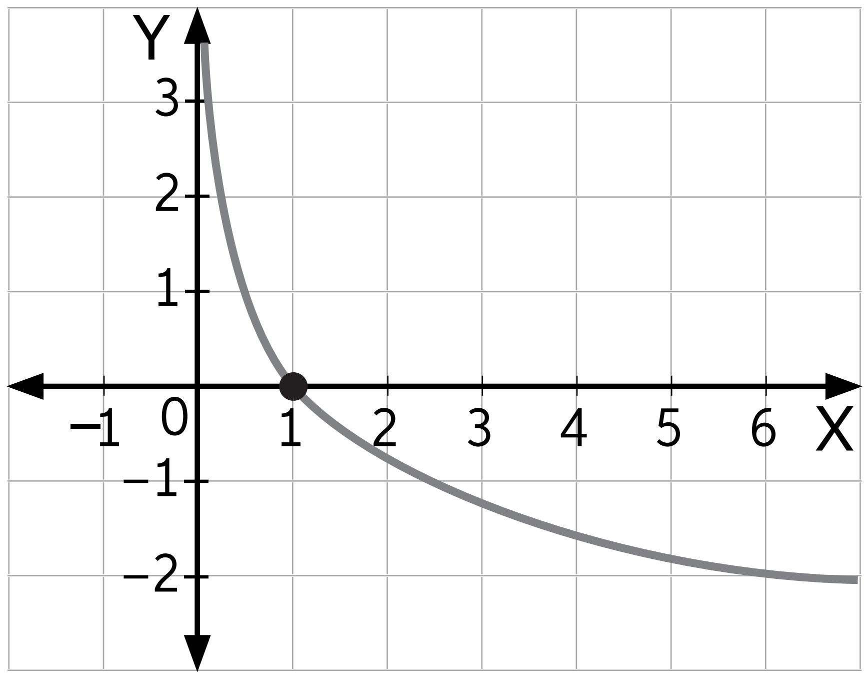
La gráfica de una función logarítmica de la forma $f(x) = \log_a x$ depende del valor de *a*. Así:

Si a > 1



La función es **creciente.**

Si 0 a > 1



La función es **decreciente.**

Además, mientras mayor es el valor de a, la función tiene un mayor crecimiento.

La gráfica de $y = \log_a x + b$ es una **traslación vertical** de *b* unidades respecto de $y = \log^a x$, hacia arriba si b

> 0 y **hacia abajo** si b < 0.
La gráfica de $y = \log_a x + b$ es una **traslación horizontal** de *c* unidades respecto de $y = \log_a x$, **hacia la derecha** si $c > 0$ y **hacia la izquierda** si $c < 0$.

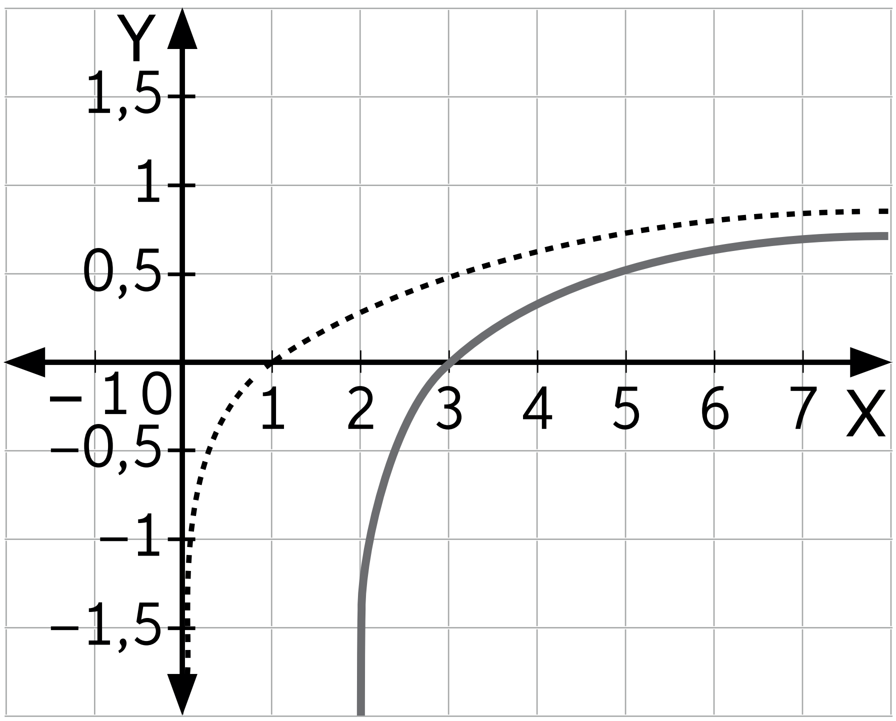
¿Cómo sería la gráfica de la función $f(x) = -\log x$? Comenta con tu curso.

5. Representa en un mismo plano cartesiano las siguientes funciones logarítmicas. Guíate por el ejemplo.

$$f(x) = 1 - \log(x - 2)$$

Se gráfica y = log*x* y se traslada 2 unidades a la derecha para obtener

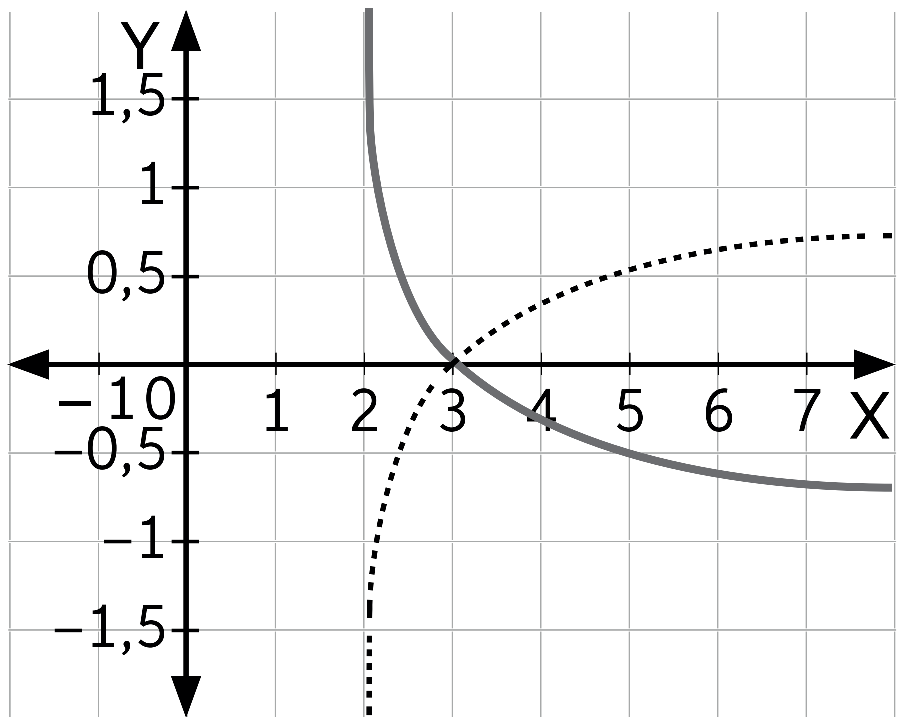
y = log(x – 2).



a. *f(x)* = 1-logx

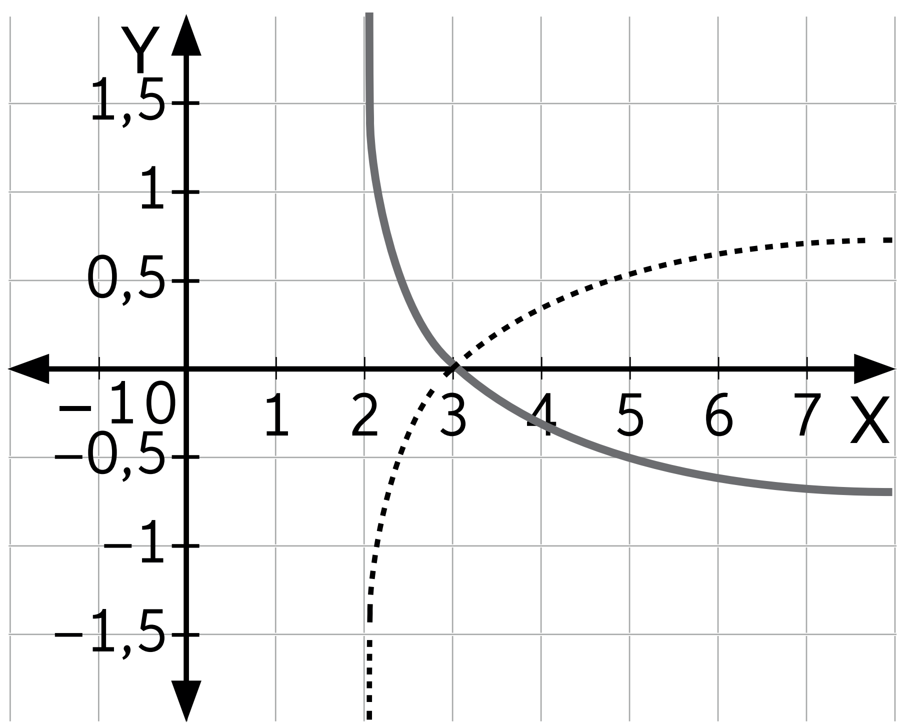
$$f(x) = 1\text{-}\log(x\text{-}2)$$

Se refleja respecto del eje X para obtener $y = -\log(x - 2)$.



b. $g(x) = 2\log(x){+}3$

Se traslada verticalmente una unidad hacia arriba para obtener $y = 1 - \log(x - 2)$.



c. $h(x) = \log(x+1)-1$

6. Escribe el dominio y el recorrido de las funciones de la actividad 5.

7. Determina los puntos de intersección con los ejes de las gráficas de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \log(x + 10)$.

b. $g(x) = \log(-x + 5)$.

c. $h(x) = 2 + \log_2(x-2)$.

Actividad de aplicación ✓

Logaritmos en la astronomía

¿Qué haremos? Determinar la magnitud aparente de algunos objetos celestes.

La magnitud aparente mide el brillo de un objeto celeste tal y como es observado por una persona en la Tierra.

En el siglo XIX se clasificaron las estrellas en primera y segunda magnitud según su brillo. Fue el astrónomo inglés Norman Pogson quien descubrió que una estrella de primera magnitud es 100 veces más brillante que una de sexta magnitud.

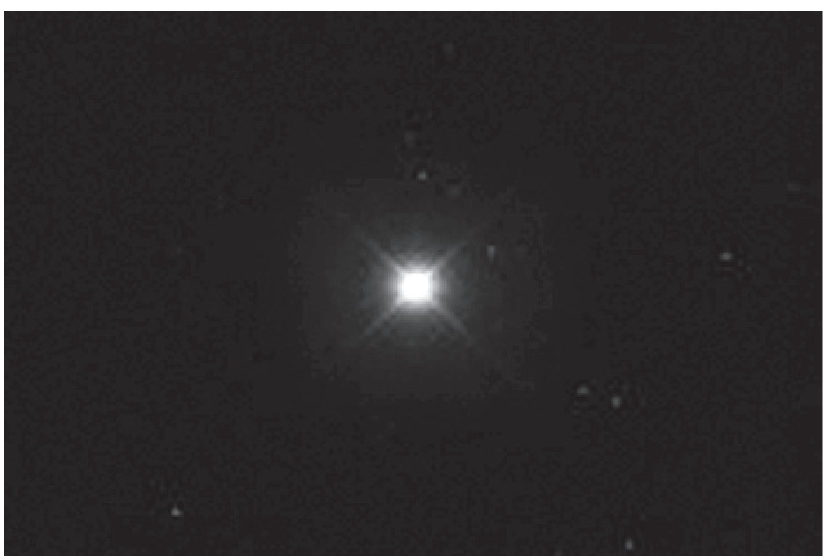
La expresión que determinó Pogson para la magnitud aparente de las estrellas está dada por:

$$m_1 - m_2 = -2{,}5\log\left(\frac{b_1}{b_2}\right)$$

Donde m es la magnitud aparente entre las estrellas y $\frac{b_1}{b_2}$ es la relación de su brillo.

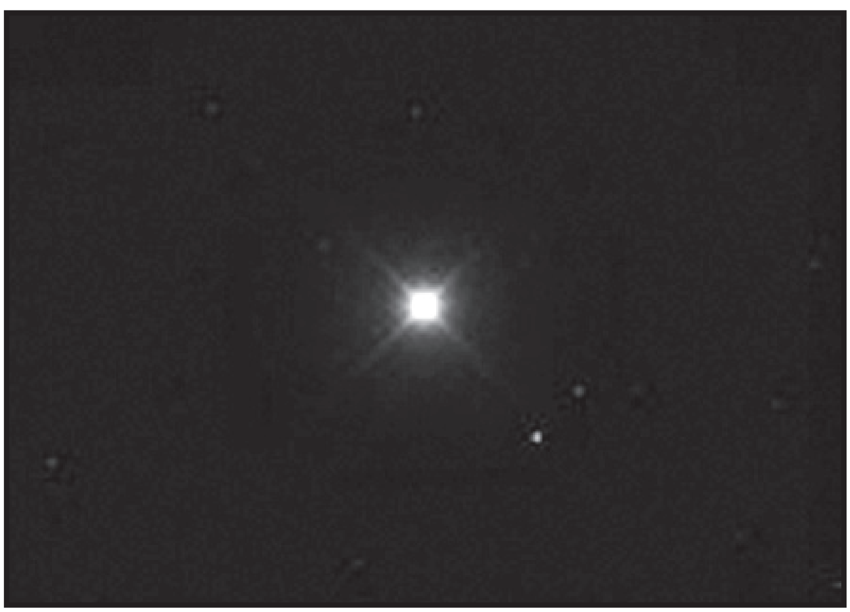
Planifiquemos

Paso 1 En parejas, investiguen la magnitud de al menos 6 objetos celestes, entre ellos los que se muestran a continuación:



Sirio

Saturno



Canopus

Paso 2 Determinen cuántas veces más brillante es el Sol que los distintos objetos celestes. Para ello, reemplacen los valores de las magnitudes en la fórmula y dejen expresado $\frac{b_1}{b_2}$ Luego, confeccionen una tabla para ordenar la información obtenida.

Presentemos y concluyamos

Paso 3 Usando las redes sociales, presenten de forma creativa los resultados y las conclusiones que obtuvieron a partir del trabajo realizado.

64 a la 72

Para concluir

a. ¿Cómo se define una función logarítmica? Explica con un ejemplo.

b. ¿Cómo es la gráfica de una función logarítmica? Describe sus características.

c. ¿Cómo se diferencian gráficamente la función exponencial y logarítmica?

d. De lo estudiado en este tema, ¿qué crees que necesitas reforzar?

210

RELACIÓN ENTRE LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

Objetivo: Comprender la relación que existe entre las funciones exponencial y logarítmica.

¿Cómo resuelves $2^x = 128$? Explica tu estrategia.

¿Qué estrategia usas para graficar una función exponencial?, ¿y una logarítmica?

1. Lee la situación. Luego, realiza lo pedido.

Ricardo y Ariela realizan la tarea que les dio la profesora de Matemática. Deben analizar dos funciones: una exponencial $f(x)2^{x} =$ y otra logarítmica $g(x)=\log_{2}x$.

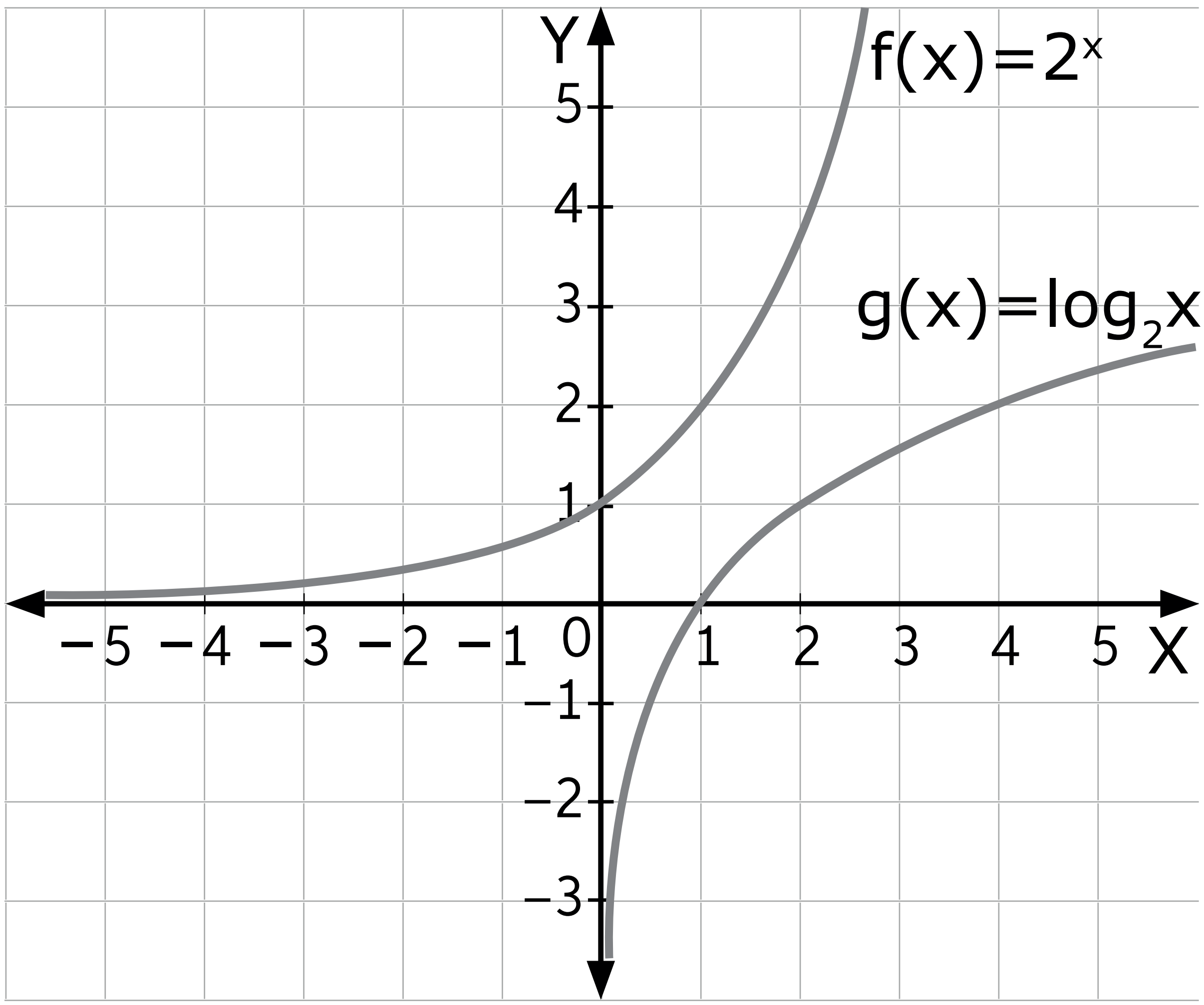
Ricardo: “Mira, Ariela, ambas funciones tienen la misma base. ¿Recuerdas cómo calcular un logaritmo?”

Ariela: “Sí, mira, para calcular por ejemplo , debemos preguntarnos “2 elevado a qué número nos da 2”.

a. Observa las tablas de valores de cada función y sus gráficas respectivas.

x	$f(x)=2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4

x	$g(x)=\log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2



b. Identifica la gráfica correspondiente a cada función.

c. Fíjate en los valores asignados a las columnas de cada tabla. ¿Qué observas?

d. ¿Cuáles son las intersecciones de las gráficas con los ejes?

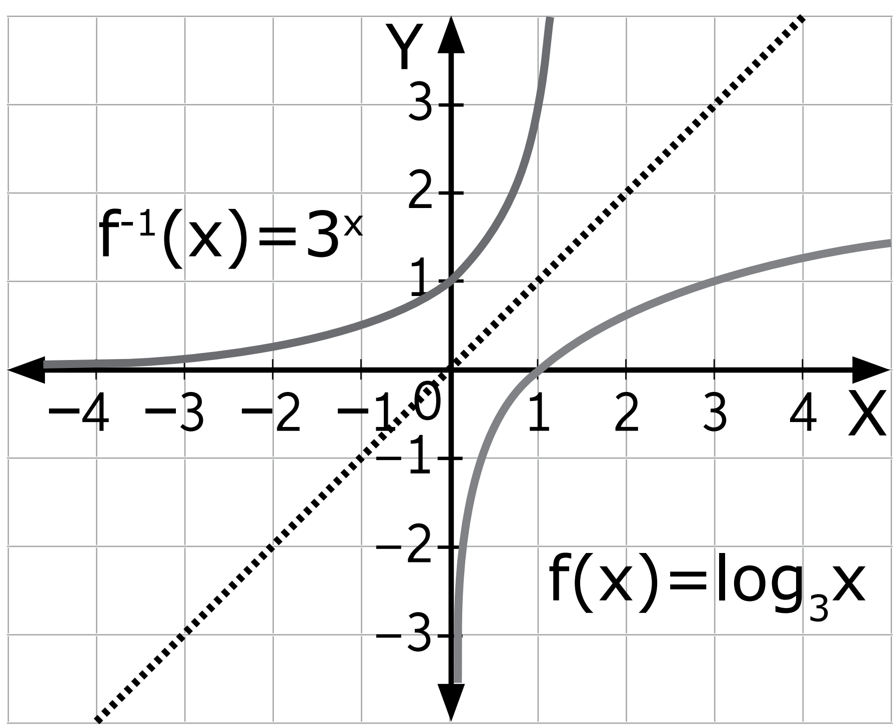
e. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de ambas funciones? ¿Cómo puedes explicar esta relación? Comenta con tu curso.

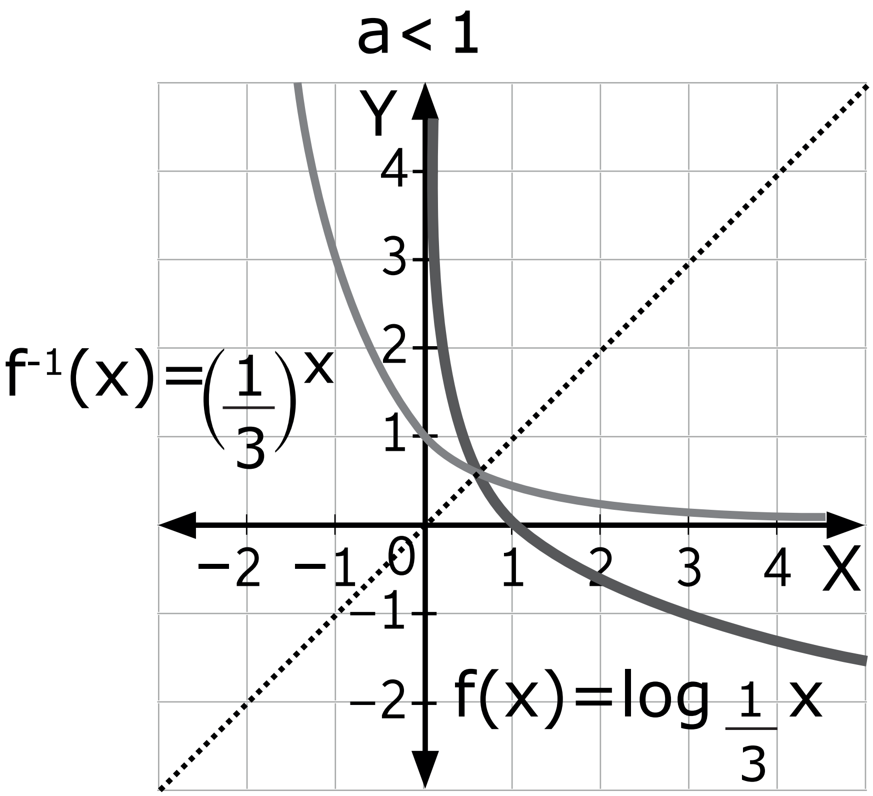
▶ ¿Existe simetría entre las gráficas de las funciones?

La función logarítmica $f(x)=\log_a x$ es la función inversa de la función exponencial

$f^{-1}(x)=a^x$. Las gráficas de estas funciones que tienen la misma base son **simétricas** respecto de la recta y=x.

a > 1





Recuerda que si es la función inversa de f, se cumple que

$$f: A \longrightarrow B \longrightarrow f^{-1}: B \longrightarrow A.$$

2. Representa en el plano cartesiano cada función logarítmica y su inversa.

a. $f(x)=\log_2 x$ **b.** $p(x)=\log_{\frac{1}{4}} x$

c. $g(x)=\log x$

Verifica los gráficos construidos usando una herramienta tecnológica como GeoGebra.

3. Determina algebraicamente la función inversa de las siguientes funciones exponenciales. Observa el ejemplo para $f(x) = 3^x$.

$$y = 3^x \quad / \log_3$$
$$\log_3 y = \log_3 3^x$$
$$\log_3 y = x$$
$$\log_3 x = y \longrightarrow f^{-1}(x) = \log_3 x$$

a. $f(x)4^x$ **b.** $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)$

c. $f(x) = e^x$

Sismología

4. Aplica el modelo que se mencionó en el inicio de Unidad (página 123) y calcula:

a. La energía liberada (E) en los terremotos de Valdivia (1960) y en el de 2010.

b. La magnitud (M) en los terremotos de Algarrobo y Vallenar:

Algarrobo (1985):3,16·10^{23} ergios

Vallenar (2013): 1,9·10^{22} ergios

Para concluir

a. ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de Valdivia (1960) que el de 2010?

b. Explica a un compañero cuál es la relación algebraica y gráfica que existe entre la función exponencial y la logarítmica.

c. ¿Cómo se relacionan los dominios y recorridos de las funciones exponencial y logarítmica?

73 a la 82

Antes de continuar

Evaluación intermedia

Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. Construye en un mismo plano cartesiano la gráfica de las siguientes funciones:

a. $f(x)=\log(x-4)$.

b. $g(x) = 1 - \log(2x)$

c. $h(x) = \log(x + 3) - 2$

2. Determina el dominio y el recorrido de las funciones anteriores.

3. Calcula algebraicamente la función inversa de cada función.

a. $f(x)= \log_{\frac{1}{5}} x$

b. $g(x)=$

c. $h(x)=\log_{\frac{3}{4}} x$

Química

4. El pH es una medida de la acidez o alcalinidad de una solución. Este se calcula con la siguiente expresión

$pH = -\log[H^+]$, donde $[H^+]$

es la concentración de iones de hidrógeno, medida en moles/litro.

Si el pH es menor que 7, la sustancia es ácida; si es igual a 7, es neutra; si es mayor que 7, es básica.

a. Determina el pH de una sustancia, cuya concentración de iones de hidrógeno es de 0,00000038 moles por litro. ¿Cómo se clasifica la sustancia?

b. Calcula la concentración de iones de hidrógeno de las siguientes sustancias conociendo su pH aproximado.

Jugo de naranja pH = 4,5

Jabón de manos pH = 9,5

c. En algunos lugares muy contaminados se produce el fenómeno de la "lluvia ácida". Calcula la concentración de iones de hidrógeno para una lluvia ácida con un pH de 2,8.

d. ¿Qué ocurre con el pH de una solución cuya concentración de iones de hidrógeno se triplica? Utiliza el gráfico de la función para analizarlo. ¿Depende de su concentración original?

Reflexiono

• De las temáticas estudiadas en esta Lección, ¿cuáles fueron tus fortalezas?, ¿y tus debilidades?

• De acuerdo con el desempeño obtenido en esta evaluación, ¿en cuáles actividades tuviste más dificultades?, ¿qué podrías hacer al respecto? Plantea acciones que permitan superar dichas dificultades.

83 a la 86

SÍNTESIS

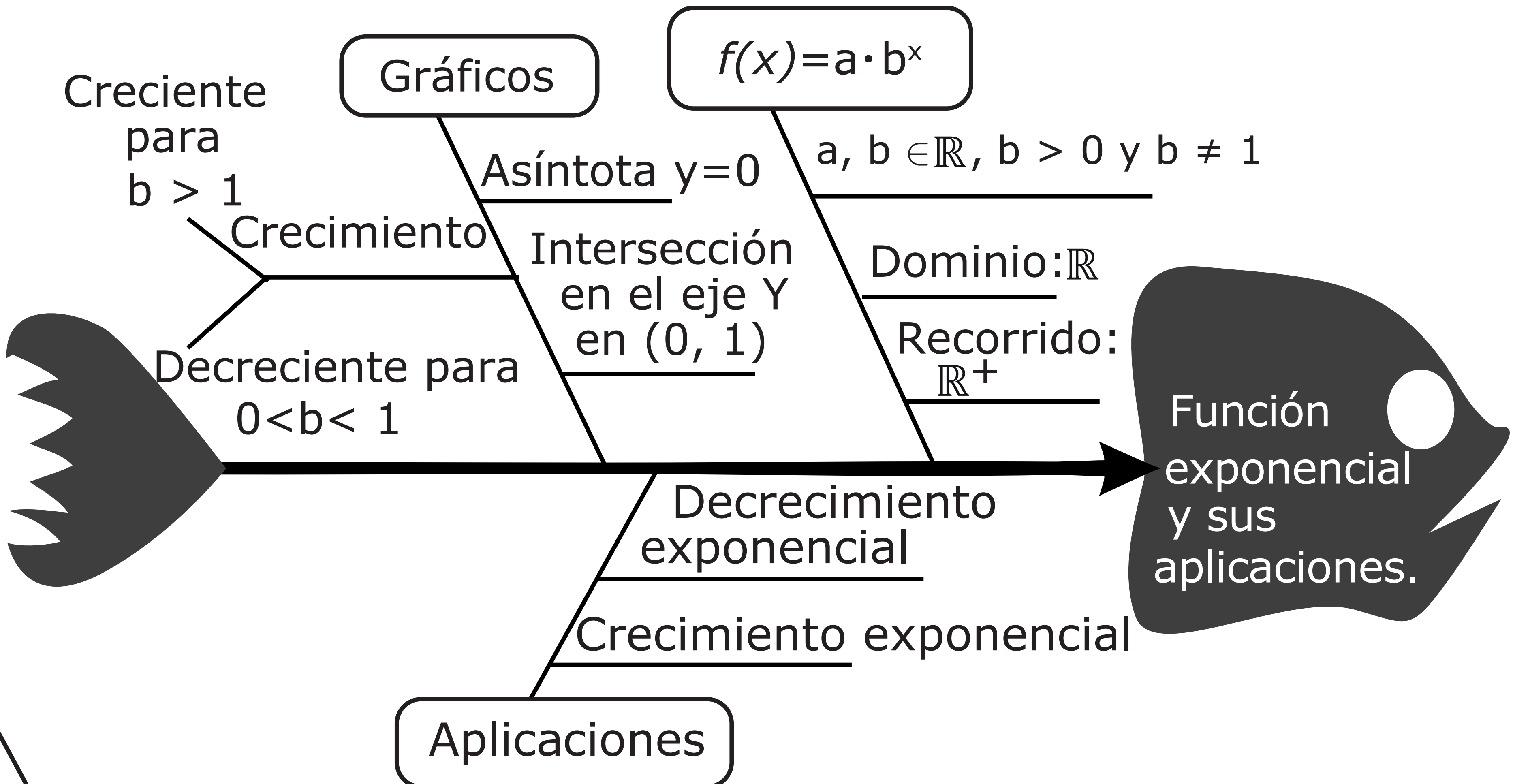
Lee atentamente la información y realiza lo pedido.

¿Qué es un diagrama de pez?

Conocido también como diagrama de Ishikawa, es un organizador gráfico que nos muestra la relación de diversos factores que conforman un proceso o fenómeno, estructurando ideas y encaminando el proceso principal. Para confeccionar este diagrama, se debe definir el eje central y los sucesos que intervienen e identificar cómo los procesos están involucrados entre sí.

226

Observa el diagrama de pez que sintetiza la función exponencial.



Ahora, hazlo tú

1. Explica el diagrama de pez observado.

2. Realiza un diagrama de Ishikawa con la lección de función logarítmica.

3. En parejas, compartan y analicen los diagramas. ¿Qué conceptos utilizaron para crear su síntesis? ¿Qué semejanzas y diferencias hay entre sus diagramas?

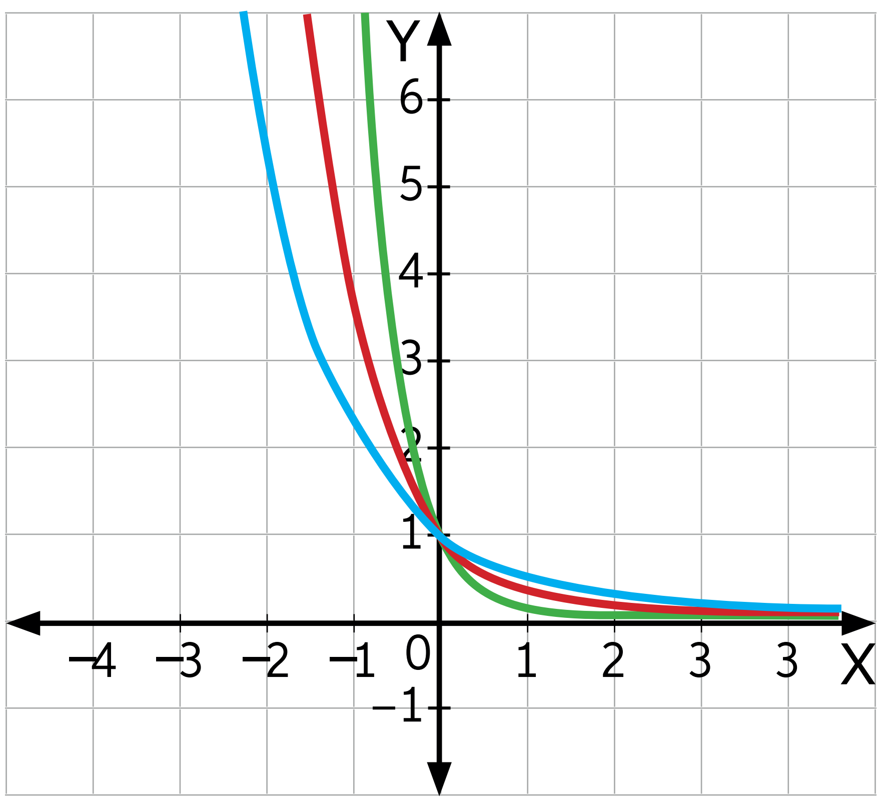
Repaso

Realiza las siguientes actividades

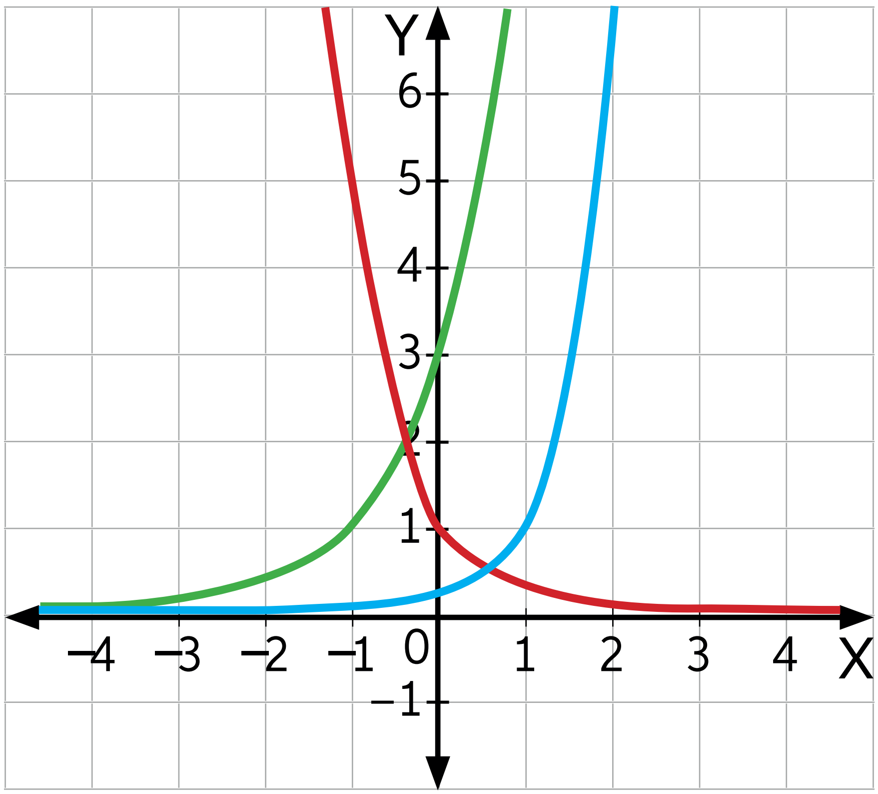
Lección 3: Modelamiento de fenómenos con la función exponencial

1. Identifica en cada caso a qué curva corresponden las funciones indicadas

a. $f(x)=0,4^{x}$ $g(x)=0,1^{x}$ $h(x)=0,3^{x}$



b. $f(x)=3^{X+1}$ $g(x)=0,2^{X}$ $h(x)=10^{X-1}$



2. Representa la función $f(x)=2^{X+1}-1$ en GeoGebra y realiza lo pedido.

a. Determina el dominio y el recorrido.

b. ¿Cuál es el punto de intersección con el eje de las ordenadas?

c. ¿La función interseca el eje X?

d. Indica si la función es creciente o decreciente.

Medicina

3. La cantidad del medicamento que tomó Sofía disminuye en el torrente sanguíneo aproximadamente en 30 % por cada hora.

a. Determina el modelo de decrecimiento exponencial.

b. Calcula el tiempo que tardará el torrente sanguíneo en tener 150 mg de medicamento.

Con esta dosis de 400 mg te sentirás mejor.

Lección 4: Modelamiento de fenómenos con la función logarítmica

4. Grafica las siguientes funciones logarítmicas en un mismo plano cartesiano.

a. $f(x) = \log_2 x$

b. $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

c. $g(x) = \log_4 x$

d. $t(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

5. Grafica la función $f(x)=\log_2(x-4)$ en GeoGebra y realiza lo pedido.

a. Determina el dominio y el recorrido.

b. ¿Cuál es el punto de intersección con el eje X?, ¿y con el eje Y?

c. Indica si la función es creciente o decreciente.

6. ¿Qué relación existe entre las funciones exponencial y logarítmica? Explica.

¿QUÉ APRENDÍ?

Realiza las siguientes actividades para evaluar los conocimientos aprendidos durante esta Unidad.

1. Representa las siguientes funciones en un mismo plano cartesiano.

a. $f(x) = 2^{-x} + 1$

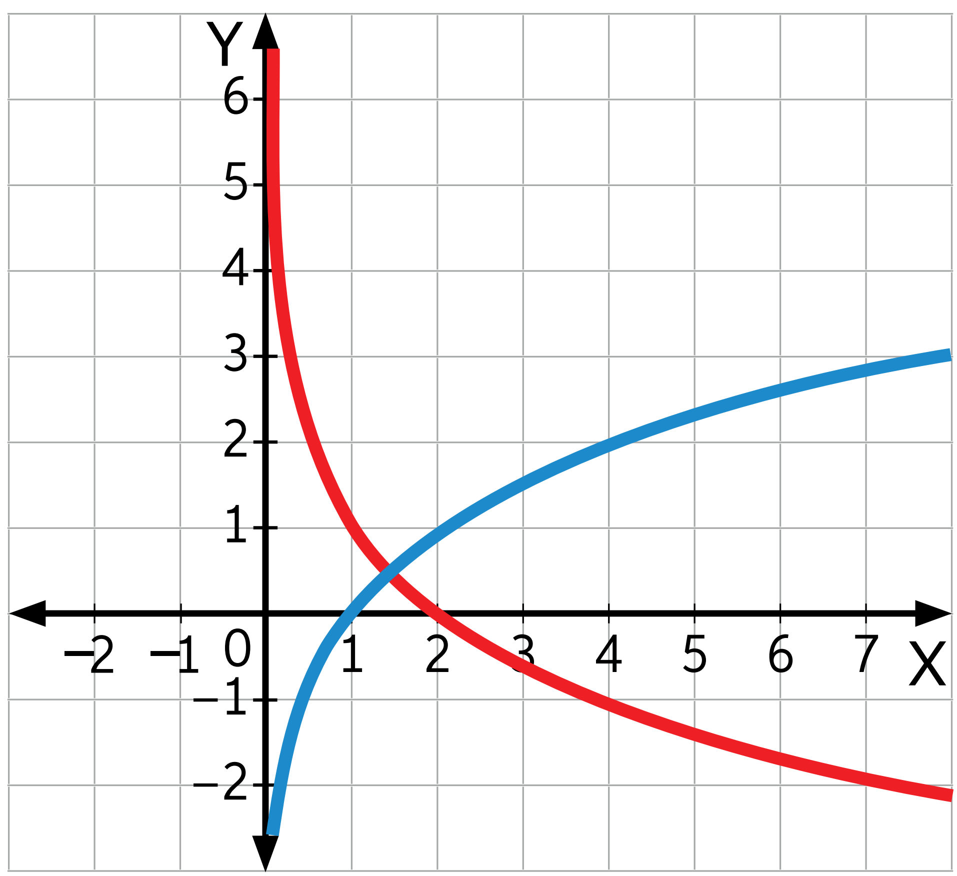
b. $g(x) = 5^{x+3}$

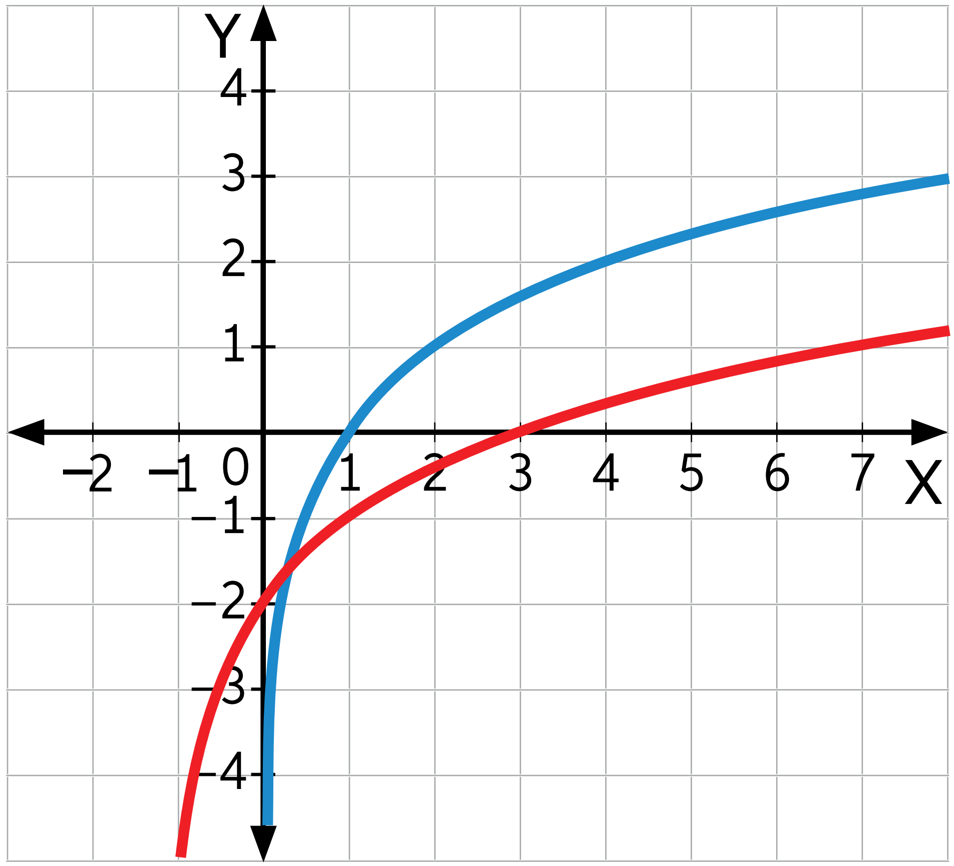
c. $h(x) = \log_2 (x - 1)$

d. $p(x) = 2 - \log(x)$

2. Determina el dominio, el recorrido y los puntos de intersección de las gráficas de las funciones anteriores.

3. Identifica las funciones correspondientes a la curva en rojo. La curva en azul corresponde a $\boldsymbol{y=\log^{2}x}$





Medicina

4. La cantidad de miligramos de un medicamento que queda en la sangre luego de t horas de haber sido administrado se calcula mediante la expresión:

$$C(t) = 10e^{-0,2t}$$

a. ¿Cuántos miligramos del medicamento hay en la sangre luego de una hora?

b. Si la cantidad de miligramos no puede bajar de 3, ¿cada cuánto tiempo aproximadamente debe tomarse el medicamento?

c. Según este modelo matemático, ¿hay algún momento en que deja de haber medicamento en la sangre? Justifica tu respuesta.

Química

5. Observa la siguiente tabla con los pH aproximados de las siguientes sustancias:

Sustancia	pH
Vinagre	2,9
Jugo gástrico	1,5
Orina	6,5

Calcula la concentración de iones de hidrógeno de cada sustancia sabiendo que $pH = -\log[H^+]$, donde $[H^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno

6. En noviembre de 2010, Alonso compró un auto por $5.000.000. Si cada año este disminuye 16% su precio inicial, ¿cuál será su valor en el mercado en 2025?

Acústica

7. Para las siguientes actividades, aplica el modelo $\beta = 10 \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$ donde β es el nivel de intensidad medido en decibeles e I es la intensidad de sonido en W/m^2.

a. Calcula la intensidad del sonido que producen los siguientes fenómenos:

Avión despegando: 130 dB	Personas gritando: 90 dB

Taladro eléctrico: 100 dB

b. Si un equipo de música genera un sonido cuya magnitud expresada en W/m^2 triplica la de otro, ¿cuánto mayor es la intensidad en decibeles que posee?

c. Un amplificador para una guitarra eléctrica tiene 2500 W/ m^2 de salida. ¿Cuál es su nivel de intensidad en decibeles?

240

Sismología

8. Lee la siguiente información y responde.

El terremoto de Haití de 2010 tuvo una magnitud de 7,2. Fue registrado el martes 12 de enero de 2010 a las 16:53:09 hora local con epicentro a 15 km de Puerto Príncipe, la capital de Haití.

¿Cuántas veces menos energía liberó este terremoto que el de Chile del mismo año? Considera el modelo $E=10^{1,5M+11,8}$ donde *E* es la energía liberada en ergios y *M* es la magnitud del sismo en la escala Richter.

Reflexiono

• Según los planes de mejora que te propusiste en cada evaluación intermedia, ¿obtuviste un buen desempeño en esta evaluación?

• ¿En qué temáticas pudiste responder con mayor facilidad?, ¿en cuáles fue más difícil responder?

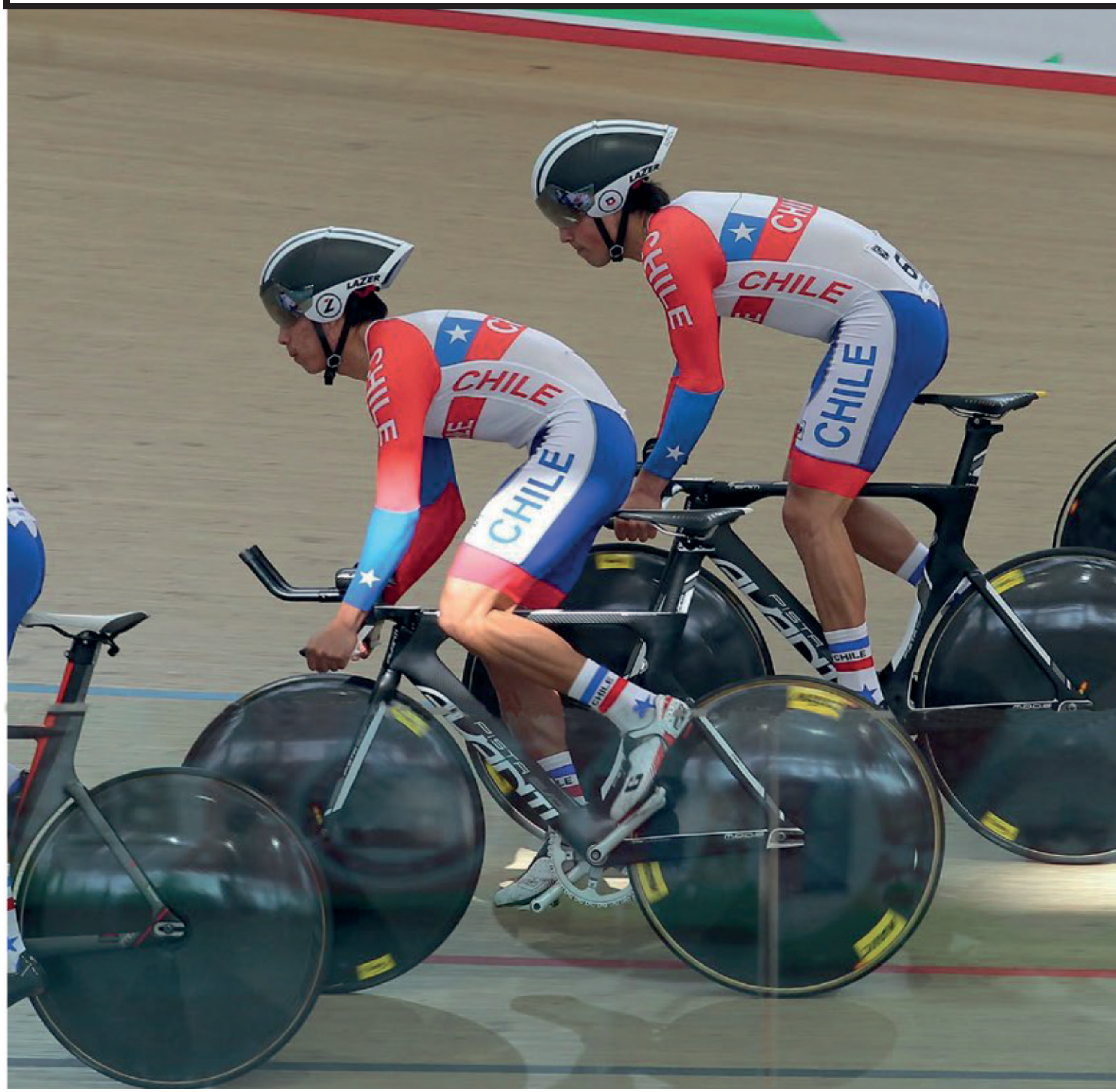
• ¿Por qué crees que es importante estudiar sobre modelos matemáticos? Explica.

¿Cómo aplicaste el modelamiento matemático en la realización del proyecto?

Revisa tus avances y las metodologías que utilizaste. Corrígelas de ser necesario.

UNIDAD 3

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA



Observa la imagen de la página anterior. Luego, comenta tu respuesta con tu curso.

1. Analiza el nombre de la Unidad: ¿qué relación puedes establecer entre este y la imagen? Explica.

2. ¿Qué conceptos geométricos de la circunferencia recuerdas? Identifica 3 de ellos en la imagen.

3. Uno de los eventos deportivos más importantes a nivel mundial son los Juegos Olímpicos. Investiga sobre sus disciplinas e identifica aquellos deportes en donde estén presentes elementos de la circunferencia.

En esta Unidad estudiarás y aprenderás acerca de:

- La resolución de problemas con ángulos en la circunferencia.
- La resolución de problemas con segmentos en la circunferencia.

El 2015, el equipo chileno consiguió la medalla de bronce en el Campeonato Panamericano de Ciclismo en Pista, realizado en Santiago de Chile.

Activo lo que sé

Evaluación diagnóstica

Realiza las siguientes actividades para activar tus conocimientos previos sobre la Unidad.

1. Define cada uno de los siguientes conceptos geométricos:

a. Circunferencia.

b. Círculo.

c. Centro de la circunferencia.

d. Radio.

e. Diámetro.

f. Cuerda.

g. Recta secante.

h. Recta tangente.

i. Arco.

2. Dibuja una circunferencia y ubica los elementos definidos en la actividad anterior.

3. Observa la siguiente circunferencia de centro O y anota estos elementos:

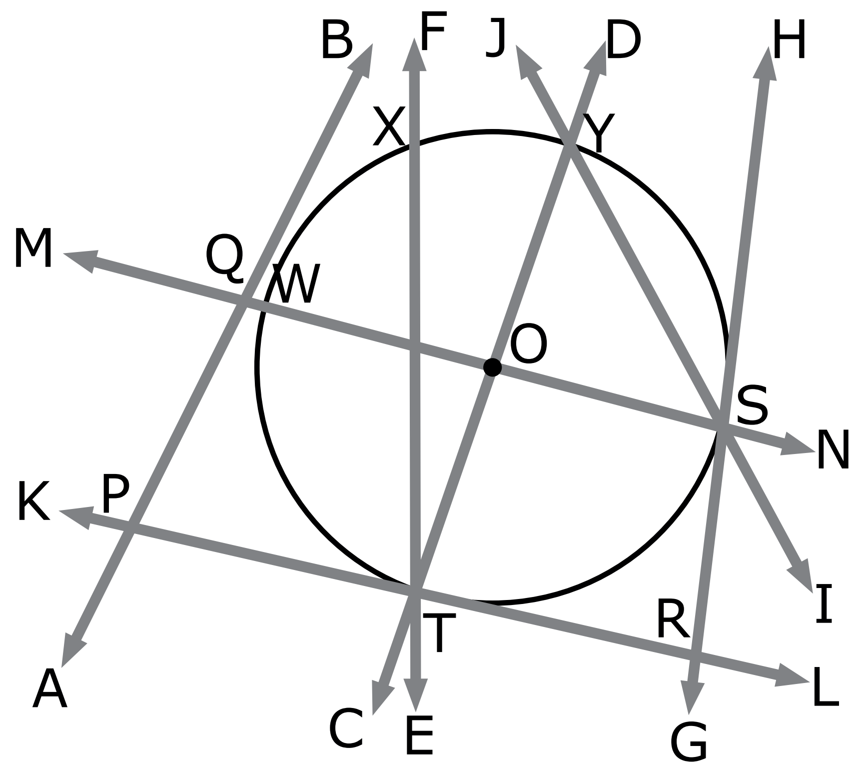
a. 2 radios.

b. 1 diámetro.

c. 3 arcos.

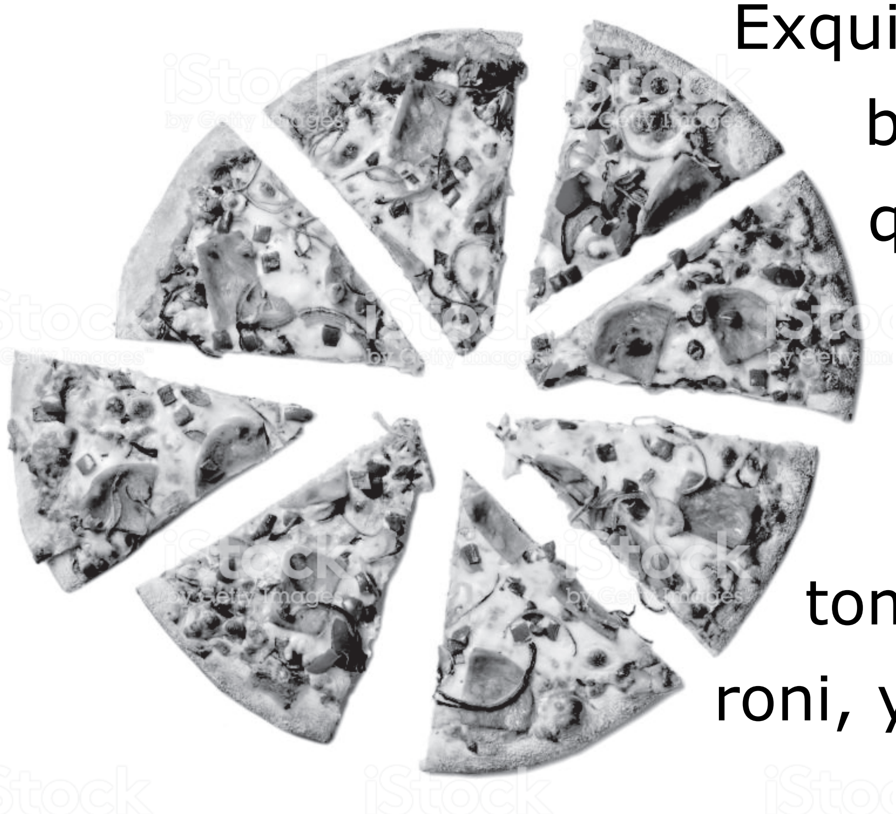
d. 2 rectas secantes.

e. 2 rectas tangentes.



4. Analiza la situación. Luego, responde. En un local de comida lanzan la siguiente promoción de pizza de forma circular.

Ahora alcanza para ti y tus amigos!



Exquisita pizza con borde extra de queso cheddar y rellena con queso mozzarella, tomate y pepperoni, y en su centro una aceituna

a. ¿Qué parte de la pizza corresponde a una circunferencia y cuál a un círculo?

b. Si la pizza la asociaras a una circunferencia, ¿a qué correspondería la aceituna?

c. Si el radio *r* de la pizza es 18 cm, ¿cuál es su perímetro y su área? Considera $\pi \approx 3,14$.

d. Si otra pizza de diferente tamaño a la de la promoción se divide entre 8 amigos en partes iguales, a cada uno le toca un trozo con un arco de 9,4 cm de longitud. ¿Cuál es el radio r de la pizza? Considera $\pi \approx 3,14$.

Reflexiono

- ¿Reconoces los contenidos trabajados?, ¿cuáles de esos contenidos crees que debes repasar antes de continuar?
- ¿Cuáles elementos de la circunferencia recordabas?, ¿fueron tus definiciones acertadas?

Lección

5

Resolución de problemas con ángulos en la circunferencia

ANGULOS DEL CENTRO E INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA

Objetivo: Resolver problemas que involucren ángulos del centro e inscrito en una circunferencia.

¿Qué tipos de ángulos conoces? Nómbralos.

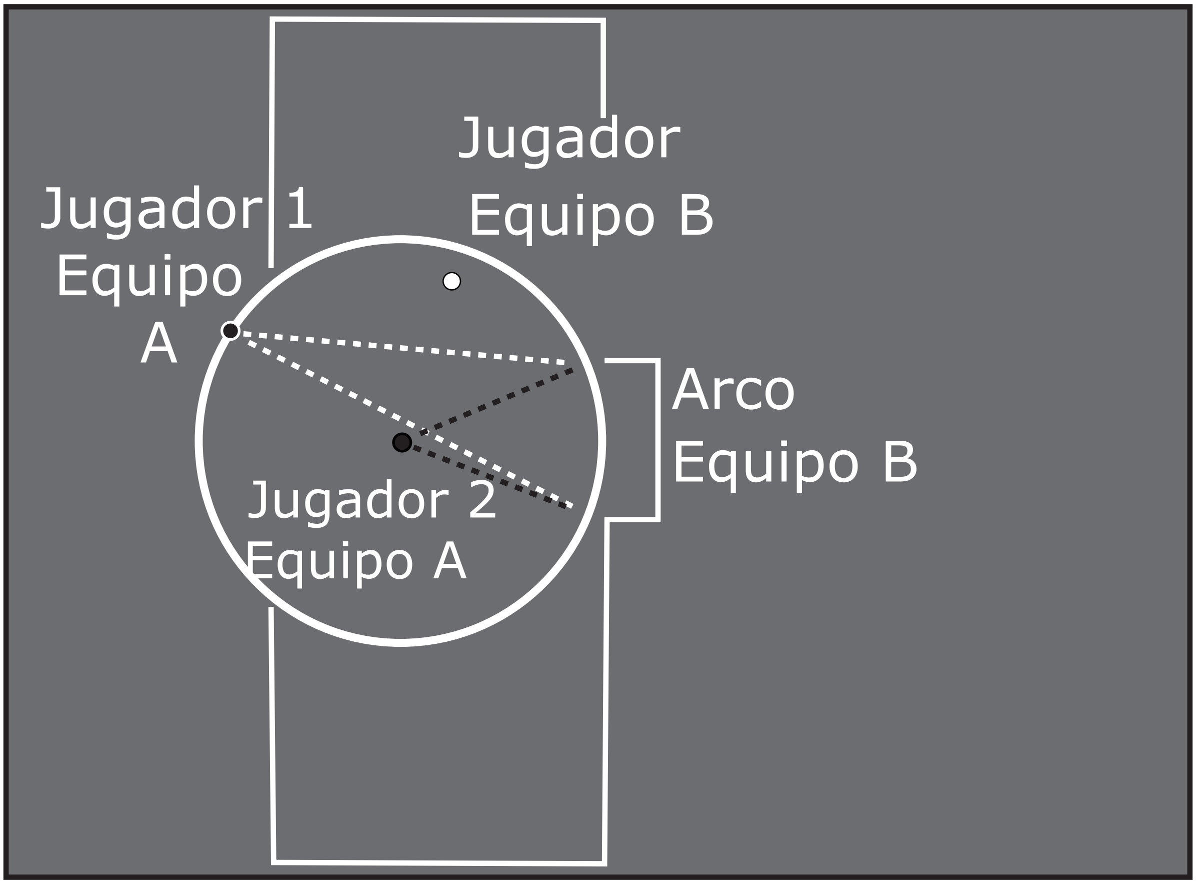
¿Cuáles son los elementos de una circunferencia?

Deportes

1. En parejas, analicen la situación y realicen las actividades utilizando GeoGebra. Finalmente, respondan.

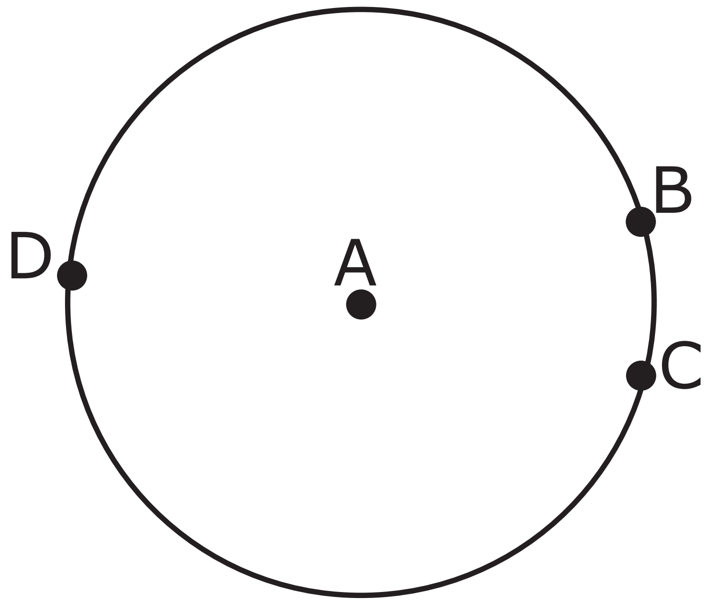
Durante el partido, dos jugadores del equipo A se acercan al arco del equipo B. Para estudiar el ángulo de lanzamiento que tienen los jugadores de A, se realiza el siguiente análisis geométrico, donde el centro de la circunferencia corresponde a la posición del jugador 2 del equipo A.

Para encontrar los ángulos de lanzamiento, sigan estos pasos:

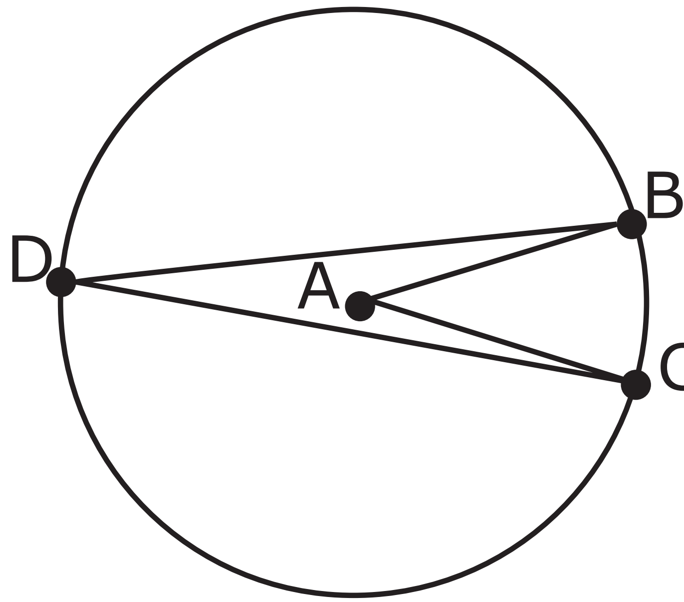


Paso 1 Construyan una circunferencia con la opción Circunferencia (centro, punto). Luego, presionen 2 veces sobre la circunferencia para crear los puntos *B* y *D*.

254



Paso 2 Con la herramienta Segmento, unan el punto *D* con *B* y con *C*, y el punto *A* con el punto *B* y con *C*. Luego, con la herramienta Ángulo, midan ∢ CAB y ∢ CDB. Finalmente, rotulen el punto A como “Jugador 2” y el punto D como “Jugador 1”.



a. ¿Cuál es la relación entre el ángulo de lanzamiento del jugador 2 y del jugador 1 del equipo *A*?

b. Muevan el punto *C*, de manera que varíe el ángulo de lanzamiento del jugador 1. ¿Qué sucede con la medida del ángulo de lanzamiento del jugador 2? Expliquen.

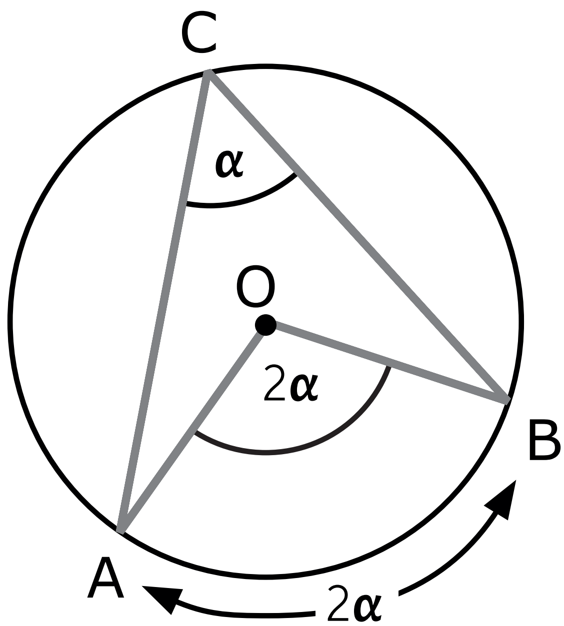
256

En una circunferencia de centro *O*, el ángulo del centro es aquel que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y cuyos lados son radios de esta. La medida del arco $\widehat{AB}$ es igual a la medida del ángulo del centro *AOB*. Es decir:

$$m(\sphericalangle AOB) = m(\widehat{AB})$$

El **ángulo inscrito** es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y cuyos lados son cuerdas de la misma.

Si un ángulo del centro y un ángulo inscrito en una circunferencia subtienden el mismo arco, el ángulo del centro mide el doble que el ángulo inscrito.

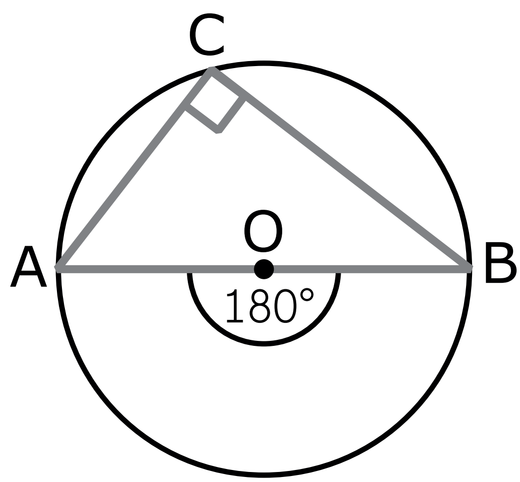


$$m(\sphericalangle AOB) = 2m(\sphericalangle ACB)$$

Además de lo anterior, en una circunferencia de centro *O*, se cumplen los siguientes teoremas:

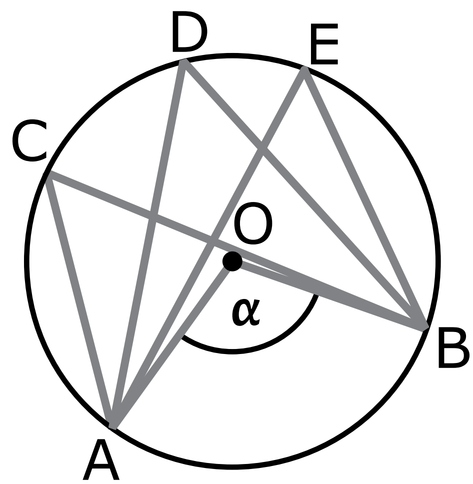
Teoremas

1. Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.



$$m(\sphericalangle ACB) = \frac{180^{\circ}}{2} = 90^{\circ}$$

2. Ángulos inscritos que subtienden arcos iguales son congruentes entre sí.



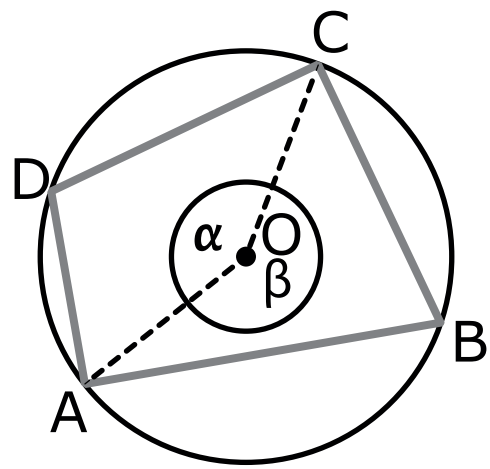
$$m(\measuredangle ACB)=\frac{m(\measuredangle AOB)}{2};m(\measuredangle ADB)=$$

$$\frac{m(\measuredangle AOB)}{2};$$

$$m(\measuredangle AEB)=\frac{m(\measuredangle AOB)}{2}$$

Por lo tanto, $\measuredangle ACB \cong \measuredangle ADB \cong \measuredangle AEB$

3. En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia, sus ángulos opuestos son suplementarios.



$\alpha+\beta=360°$, pero m($\measuredangle$ CBA)$=\dfrac{\alpha}{2}$ y

m($\measuredangle$ *ADC*)$=\dfrac{\beta}{2}$

Así, m($\measuredangle$ CBA)+m($\measuredangle$ ADC)= 180°

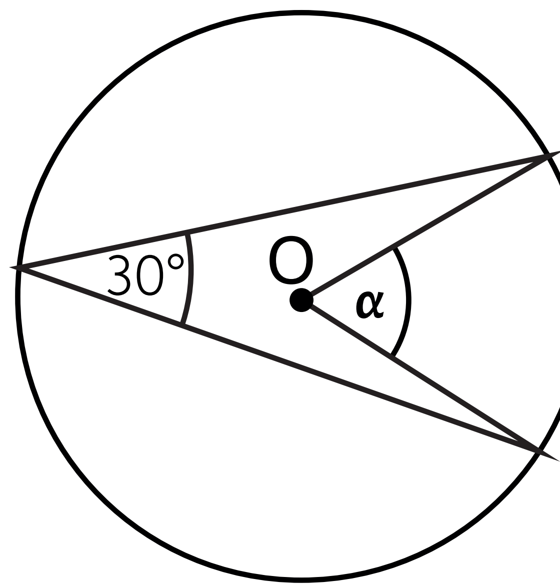
Del mismo modo se obtiene:

m($\measuredangle$ BAD) + m($\measuredangle$ DCB) = 180°

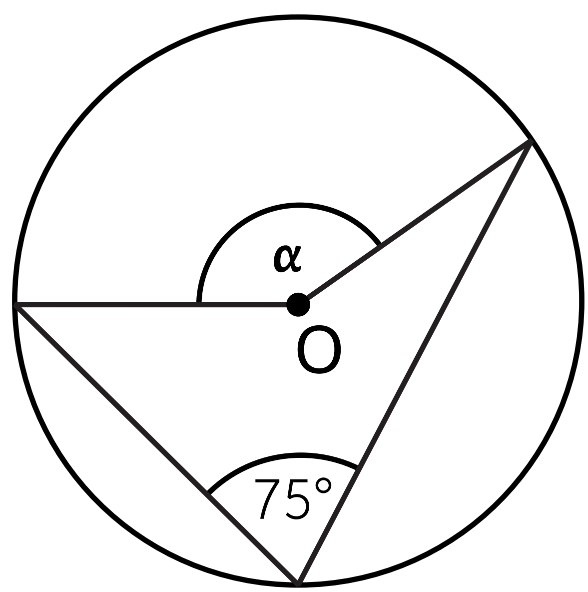
¿Cuál es la medida máxima de un ángulo del centro? Explica tu respuesta.

2. Calcula la medida de α en cada caso.

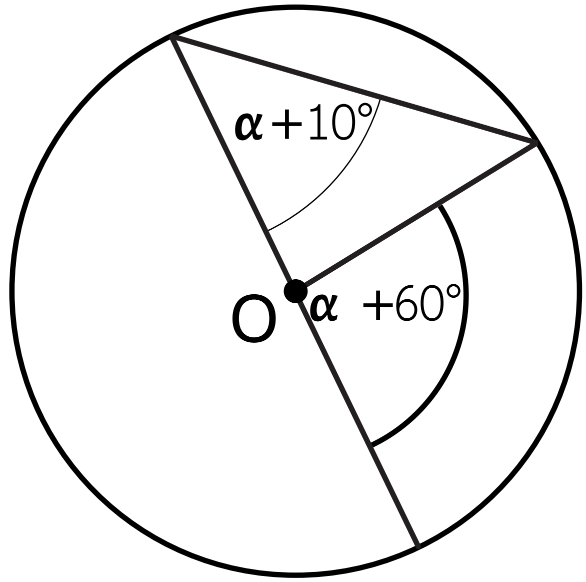
a.



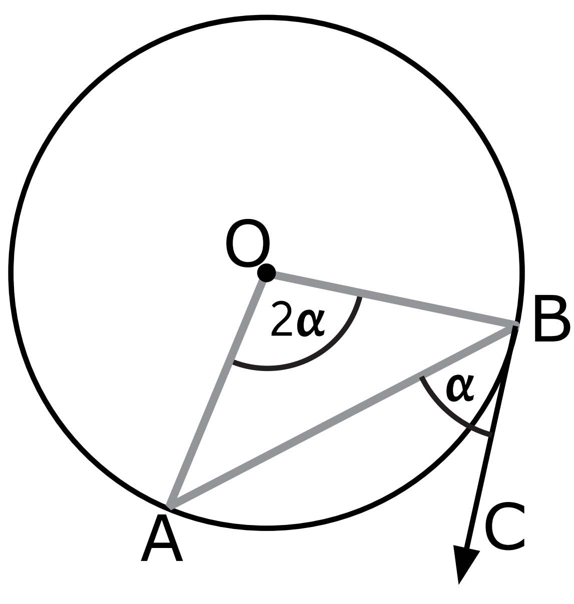
b.



c.



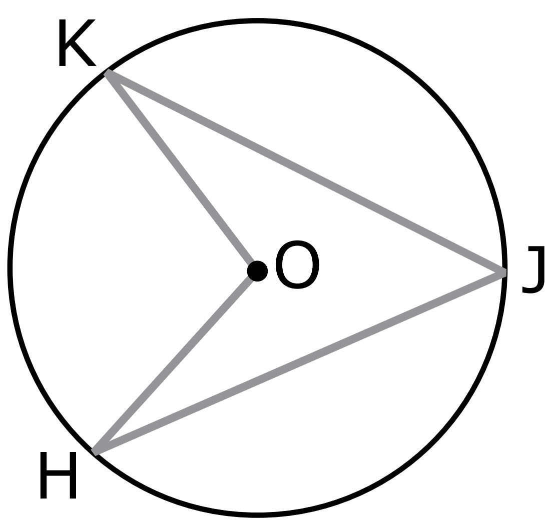
El **ángulo semiinscrito** es aquel cuyo vértice pertenece a la circunferencia. Además, uno de sus lados es una cuerda y el otro es tangente a la circunferencia.



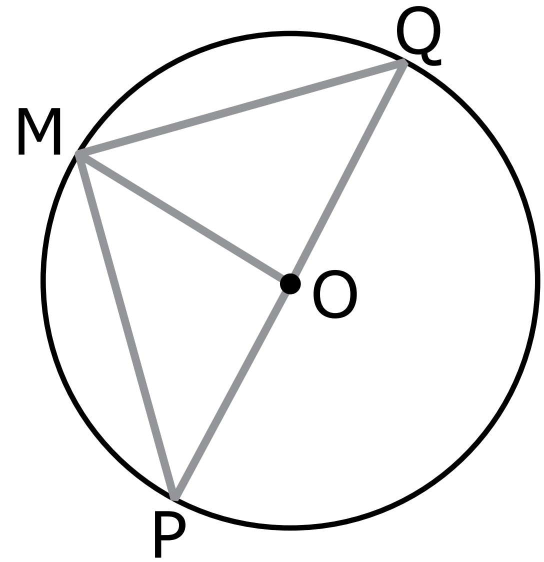
Teorema: si un ángulo del centro y un ángulo semiinscrito en una circunferencia subtienden el mismo arco, el ángulo del centro mide el doble que el ángulo semiinscrito.

3. Resuelve los problemas.

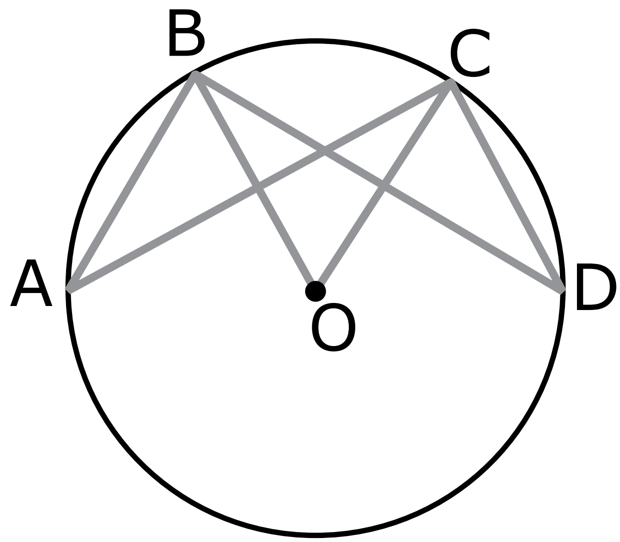
a. Si ∢*OKJ* y ∢*JHO* miden 30°, ¿cuál es la medida ∢*KOH*?



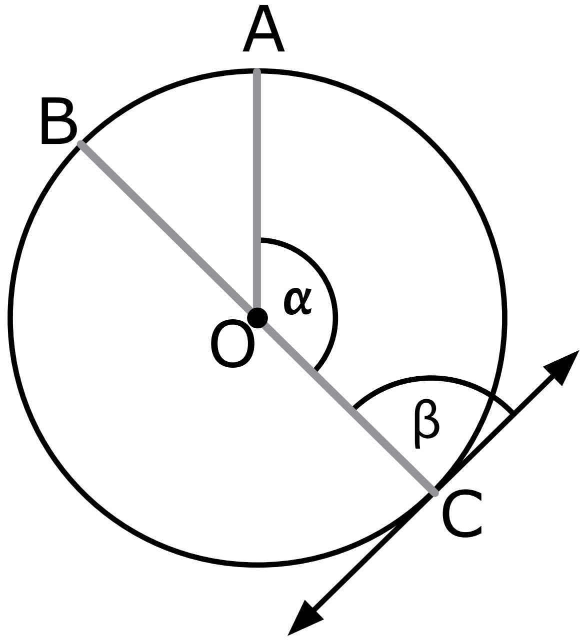
b. Si $\overline{PQ}$ es diámetro y la medida angular de $\widehat{QM}$ es 60°, ¿cuál es la medid de $\sphericalangle PMO$?



c. Si $\sphericalangle$CDB mide 15°, ¿cuánto mide medida $\sphericalangle$CAB?



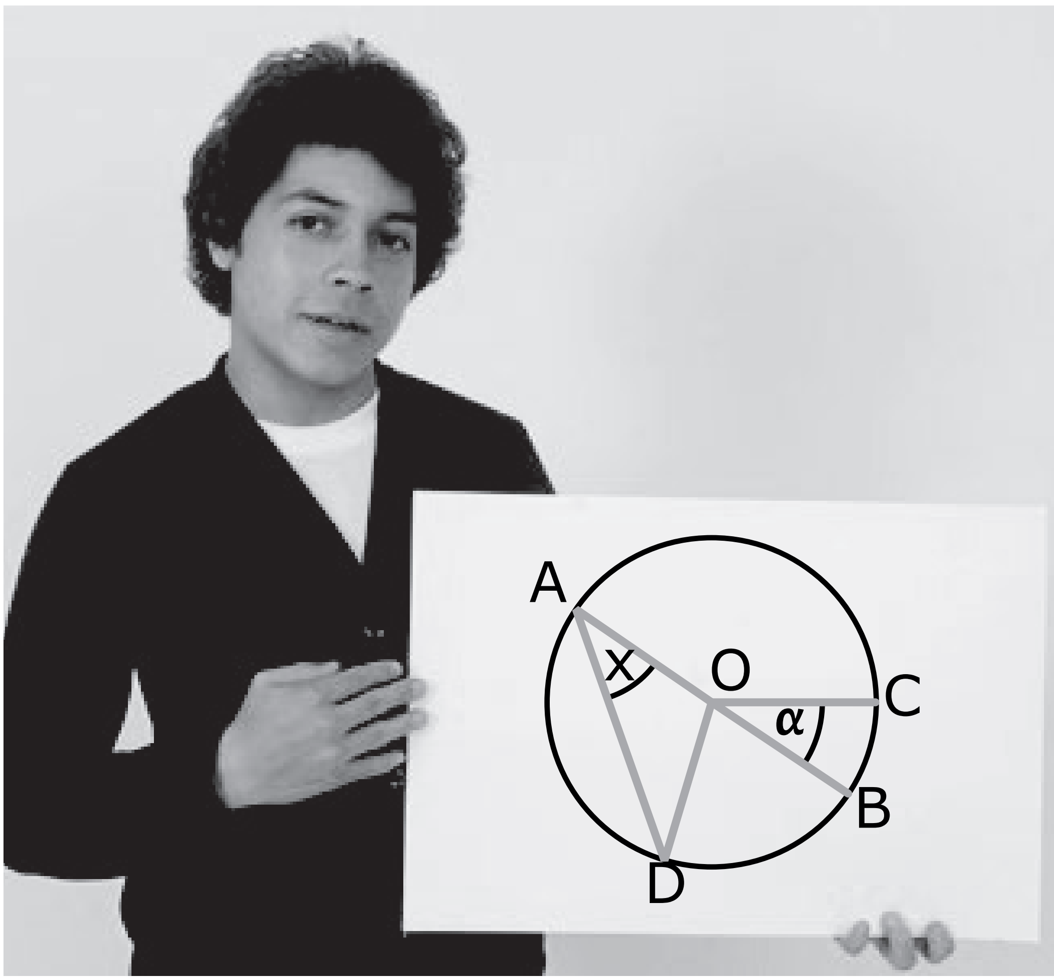
d. Si $\widehat{AB}$ mide 50°, $\overline{BC}$ es diámetro y C es punto de tangencia a la circunferencia, ¿cuáles son las medidas de α y β?



4. Analiza la situación. Luego, responde. Fabián expone la solución de un ejercicio que pedía calcular la medida del ángulo x en función de α. Se sabe que $\overline{AB}$ es diámetro y que la medida angular de $\widehat{DB}$ es el doble que la medida angular de $\widehat{BC}$.

Lo que concluyó Fabián es incorrecto. ¿Cuál fue su error? Explica. Luego, calcula la medida de x.

Fabian:,"El ángulo *DOB* mide x por lo tanto, $\widehat{DB}$ mide x. Así, $\widehat{BC}$ mide $\dfrac{x}{2}$, por lo que $\alpha = \dfrac{x}{2}$."



¿Qué otros errores crees que es común cometer en el cálculo de ángulos en la circunferencia? Comenta tu respuesta con tu curso.

Actividad de aplicación ✓

Ángulos del centro e inscrito en una circunferencia mediante videos

¿Qué haremos?

Crear un video con situaciones cotidianas en las que se visualicen los teoremas referentes a ángulos del centro e inscrito en una circunferencia.

Planifiquemos

Paso 1 Organícense en grupos de 4 a 5 estudiantes. Revisen videos con tutoriales de geometría y escojan un estilo.

Algunos ejemplos son:

- Video cómico
- Video musical

Paso 2 Asignen roles al equipo, por ejemplo:

- ¿Quién será el camarógrafo?
- ¿Qué materiales y/o recursos necesitan para el video?
- ¿Quién editará el video?
- ¿Quiénes van a actuar?
- ¿Cuánto tiempo destinará cada integrante a realizar su tarea?

Paso 3 Escriban un guión para su video que no supere los 5 minutos.

Ejecutemos

Paso 4 Realicen todas las grabaciones necesarias. Luego, reúnan el material y monten el video con ayuda de algún software de edición de video.

Compartamos

Paso 5 Coordinen un mismo canal de Youtube para el curso y suban ahí todos los videos.

Paso 6 Utilicen sus redes sociales para compartir sus videos. Si desean, pueden realizar un concurso de popularidad entre sus videos, el que será compartido con el resto del colegio.

Finalmente, respondan.

- ¿En qué los ayudó esta actividad para el estudio de este tema?
- ¿Qué ventajas tiene utilizar este tipo de recursos para el estudio?
- ¿Qué dificultades tuvieron durante el desarrollo del proyecto?, ¿cómo las superaron?

"Recuerden que, mientras más creativo e innovador sean, mucho mejor. Pueden combinar y transformar ideas de otros canales de YouTube para obtener su propia creación original.”

87 a la 94

Para concluir

a. ¿Qué estrategia utilizaste para resolver los problemas de este tema?, ¿podrías haber utilizado otras? Explica.

b. Reescribe con tus palabras las demostraciones de los teoremas de este tema.

272

ÁNGULOS INTERIORES Y EXTERIORES EN LA CIRCUNFERENCIA

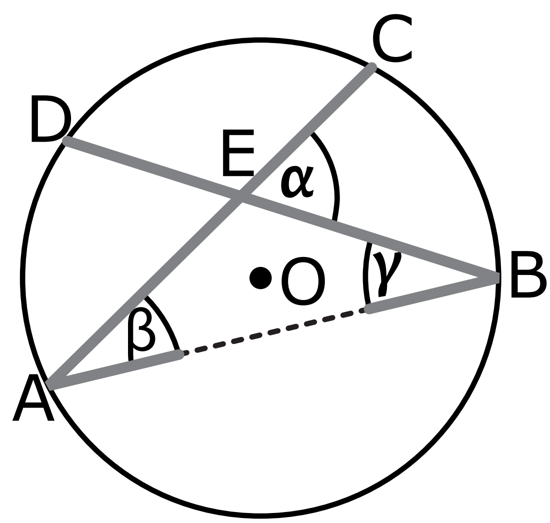
Objetivo: Resolver problemas que involucren ángulos del centro e inscritos en una circunferencia.

¿Qué es una secante?, ¿y una tangente?

¿Qué propiedades se cumplen en los ángulos interiores y exteriores de un triángulo? Explica.

1. Analiza la información y realiza las actividades.

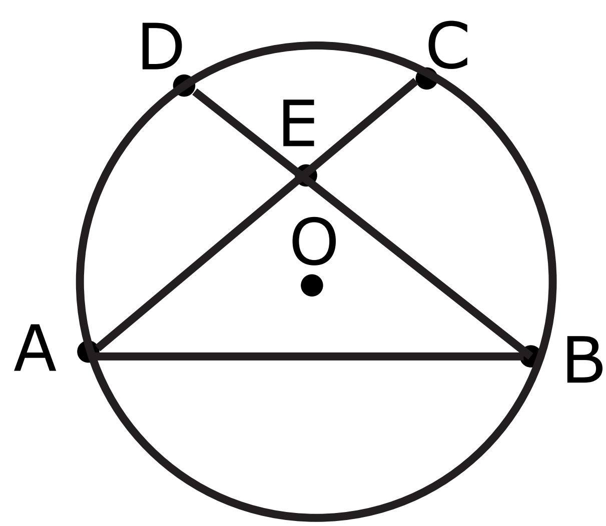
Un ángulo interior α está formado por la intersección de dos cuerdas en un punto al interior de la circunferencia. En la imagen que se muestra al costado, las cuerdas son $\overline{CA}$ y $\overline{DB}$.



a. Considerando que $\alpha = \beta + \gamma$, Por que ángulo exterior al triángulo AEB expresa la medida de α en función de los arcos $\overset{\frown}{DA}$ y $\overset{\frown}{BC}$.

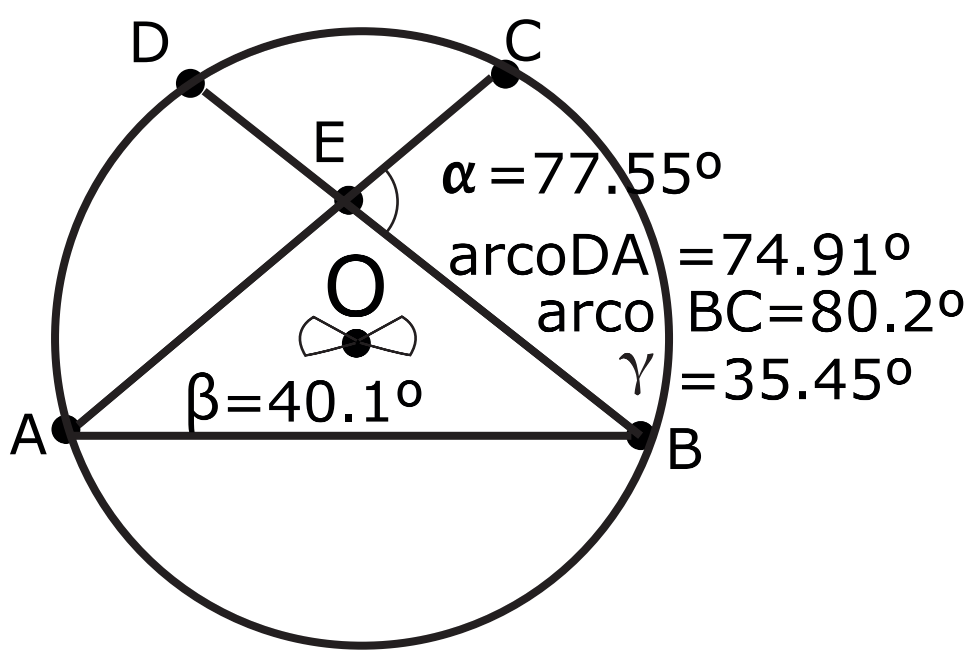
b. Utiliza GeoGebra y construye la circunferencia anterior. Sigue los pasos:

Paso 1 Construye una circunferencia con la herramienta Circunferencia (centro, punto). Rotula el centro de la circunferencia como “O”. Con la herramienta Segmento, traza las cuerdas $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Finalmente, marca el punto donde se intersecan las cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.



Paso 2 Con la herramienta Ángulo, mide ∢ BEC, ∢ BAE y ∢ DBA. Con la herramienta Sector circular, forma los sectores circulares *AOD* y *BOC*.

Paso 3 Con la herramienta Ángulo, mide ∢ DOA y ∢ BOC, que serán las medidas angulares de los arcos y respectivamente. Puedes rotularlos como “arco DA” y “arco BC”. Finalmente, oculta los sectores circulares.

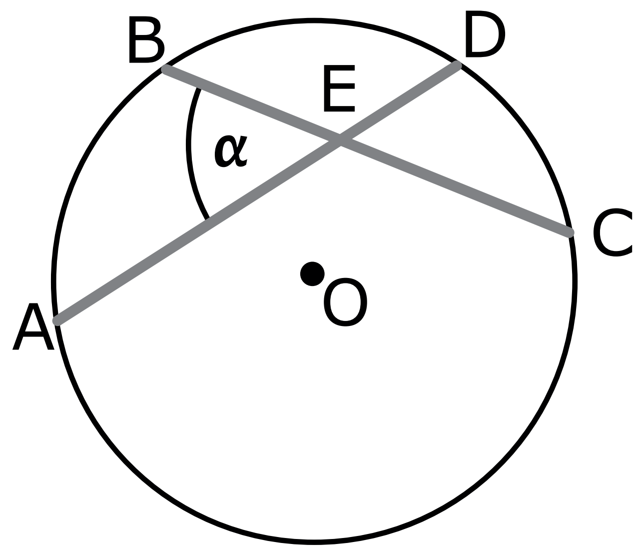


c. Mueve tu construcción de manera tal que varíen los ángulos β y γ. Para cada variación de β y γ, anota el valor de α .Verifica que se cumple la expresión obtenida en *a*.

Dada una circunferencia de centro *O*, con $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ secantes que se intersecan en el punto *E*, se cumple lo siguiente:

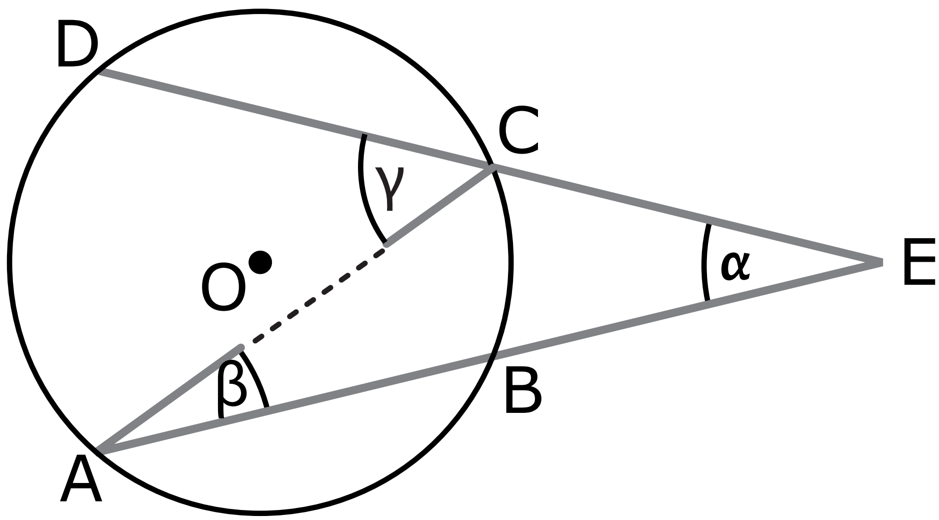
Teorema: La medida de un ángulo interior es igual a la semisuma de los A arcos que subtienden sus lados y la prolongación de ellos.

$$\alpha = \frac{m(\overset{\frown}{DA}) + m(\overset{\frown}{CD})}{2}$$



2. En parejas, analicen la información. Luego, respondan.

Un ángulo exterior α es aquel cuyo vértice está fuera de la circunferencia. Puede estar formado por la intersección de dos secantes, una secante y una tangente, o dos tangentes. En la imagen, las secantes son $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$.



a. Expresa β en función de la medida angular de $\widehat{BC}$ y γ en función de la medida angular de $\widehat{DA}$.

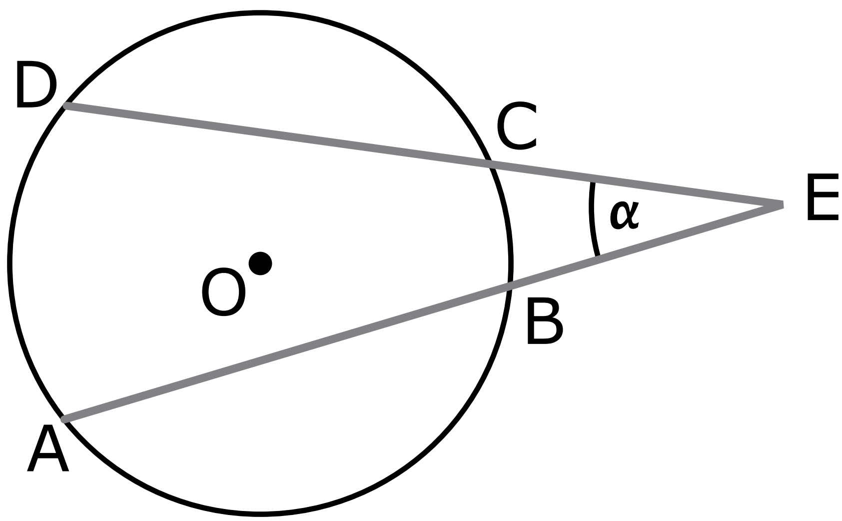
b. Considerando que $\gamma = \alpha + \beta$, por ser ángulo exterior al triángulo *AEC*, ¿qué expresión representa el valor de α en función de los arcos $\widehat{DA}$ y $\widehat{BC}$?

c. Si $m(\widehat{DA})=100°$ y $m(\widehat{BC})= 30°$, ¿cuánto mide el ángulo α ?

d. Si el ángulo α mide 70° y $m(\widehat{BC}) = 50°$, ¿cuál es la medida angular de $(\widehat{DA})$?

Dada una circunferencia de centro *O*, con $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ secantes que se intersecan en el punto E, se cumple lo siguiente:

$$\alpha = \frac{m(\overset{\frown}{DA}) - m(\overset{\frown}{BC})}{2}$$

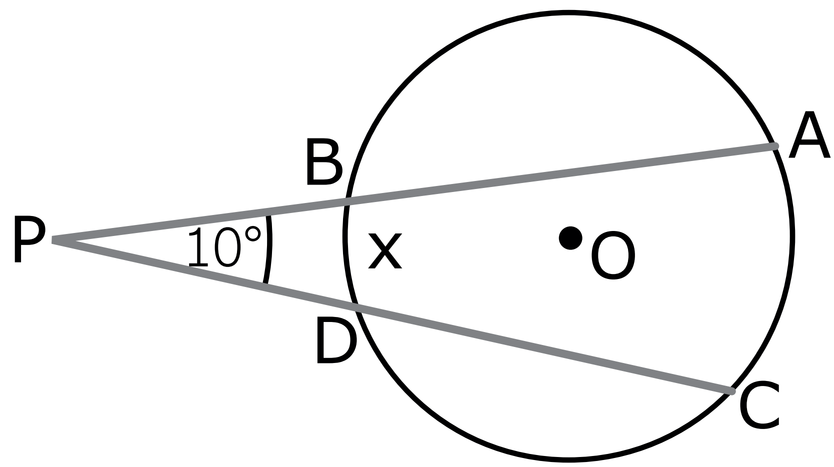


Teorema: La medida de un ángulo exterior es igual a la mitad de O ɑ la diferencia de los arcos que subtienden los lados del ángulo.

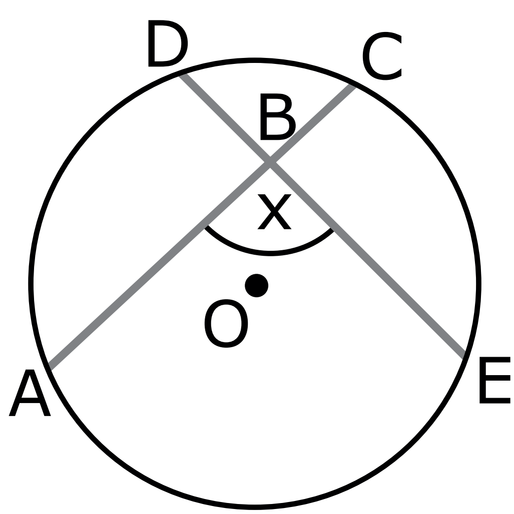
¿Cuál es la mayor medida que puede tener un ángulo exterior? Fundamenta.

3. Calcula el valor de x en cada caso.

a. m($\overset{\frown}{DA}$)=80º

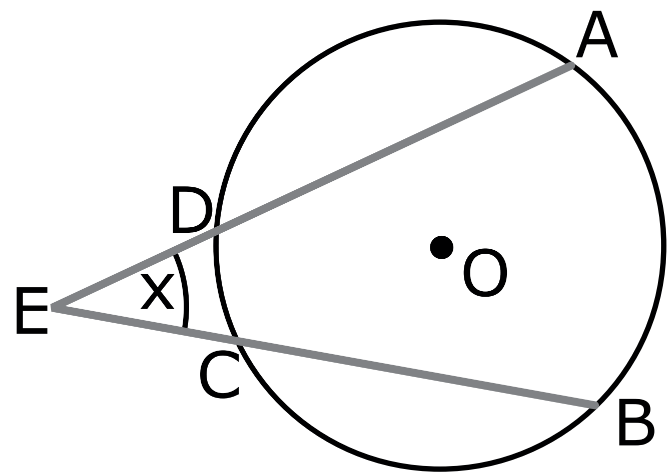


b. m($\overset{\frown}{EA}$)=80° y m($\overset{\frown}{CD}$)=40°.

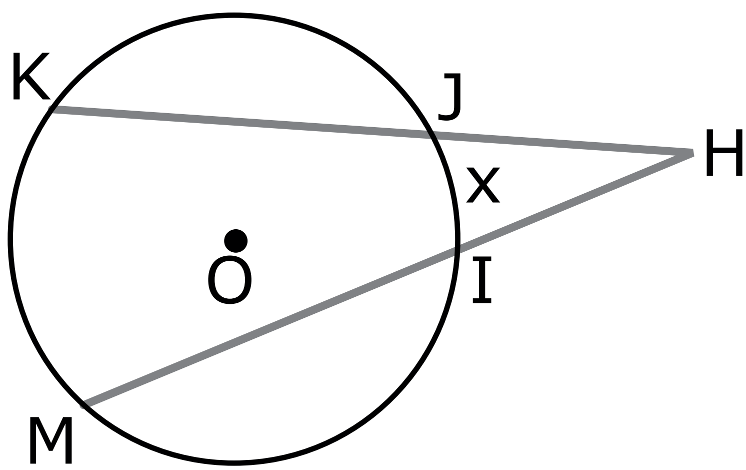


282

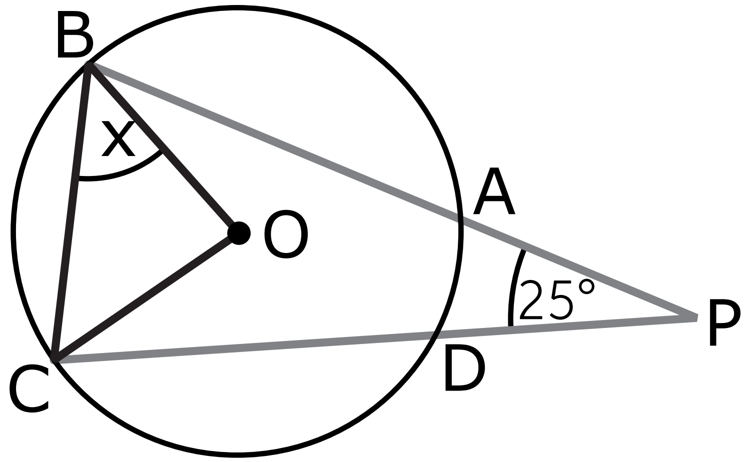
c. m($\overset{\frown}{BA}$)=100°y m($\overset{\frown}{DC}$)=60°



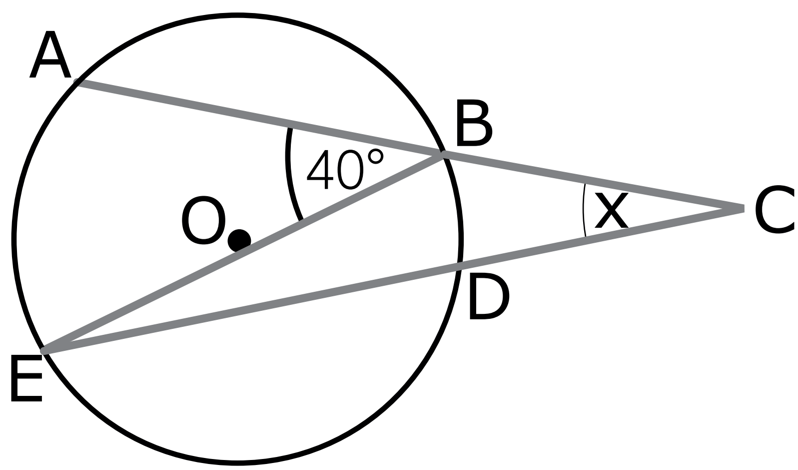
d. La medida de $\measuredangle$KHM es 30° y la medida angular de $\overset{\frown}{KM}$ es 140°.



e. m($\overset{\frown}{DA}$)=30°.



f. m($\overset{\frown}{DB}$)=10°.



4. Analiza las siguientes afirmaciones hechas por estos estudiantes. Luego, indica si son verdaderas o falsas. Argumenta tu respuesta con un ejemplo.

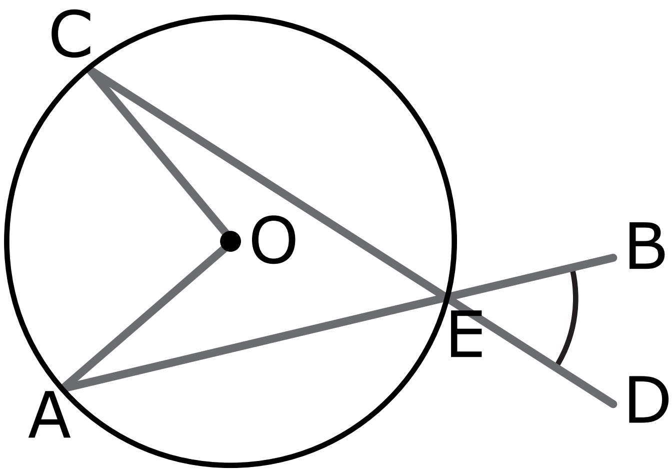
Lucia: "Un ángulo exterior a una circunferencia tiene siempre su vértice en el interior de esta."

Barbara: "El vértice de un ángulo interior de una circunferencia se encuentra al interior de ella."

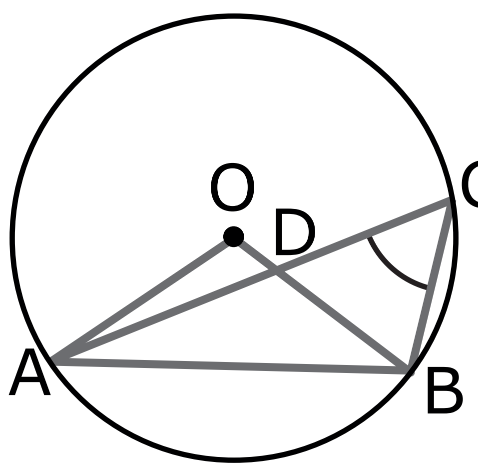
Milton: "Un ángulo interior a una circunferencia está formado por una de sus cuerdas y una de sus secantes"

5. Resuelve los problemas.

a. En la circunferencia de centro *O*, $\sphericalangle$ *DEB* mide 25°. ¿Cuál es la medida de $\sphericalangle$ *COA*?

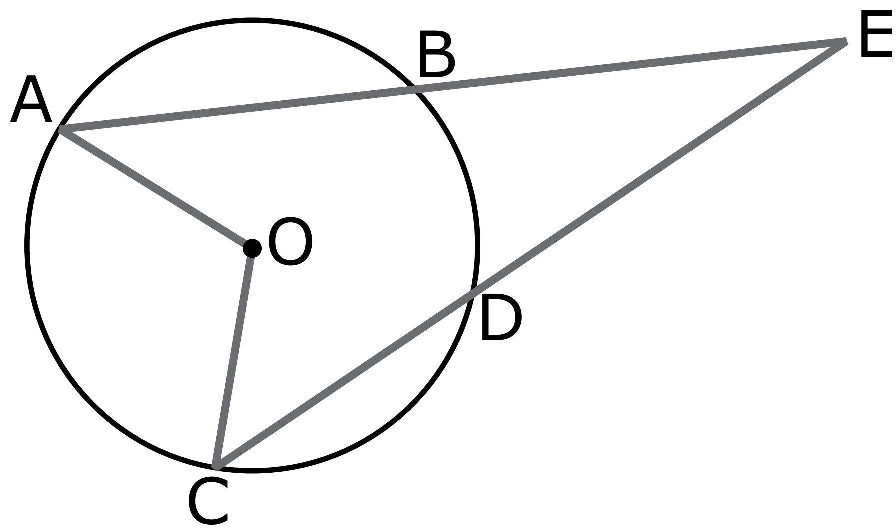


b. Si $\sphericalangle$ *BAO* mide la mitad de lo que mide $\sphericalangle$ *AOB*, ¿cuánto mide $\sphericalangle$ *ACB*?

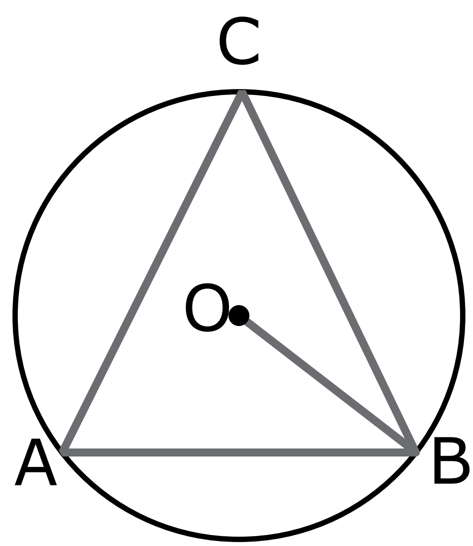


286

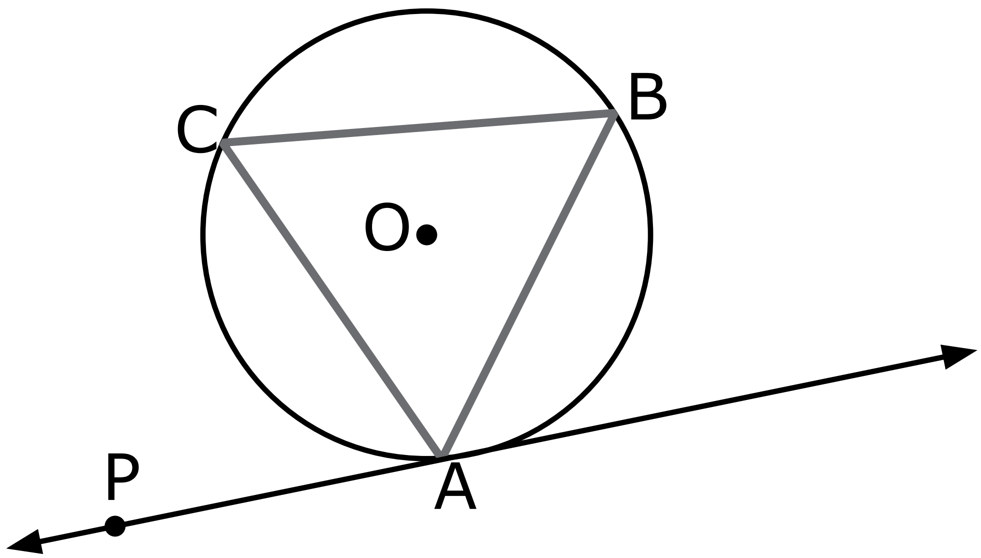
c. $\measuredangle$ *AOC* mide 110° y m($\overset{\frown}{DB}$)=70°. ¿Cuál es la medida de $\measuredangle$ *DEB*?



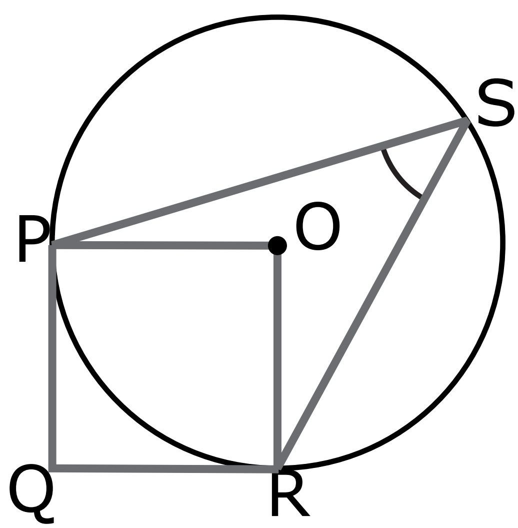
d. Si $\measuredangle$ ACB mide 40°, ¿cuánto mide $\measuredangle$OBA?



e. El triángulo *ABC* está inscrito en la circunferencia y la recta $\overleftrightarrow{AP}$ es tangente en *A*. Si $\sphericalangle$ *BAC* mide 80° y $\sphericalangle$ *BAP* mide 125°, ¿cuánto mide $\sphericalangle$ *CBA*?

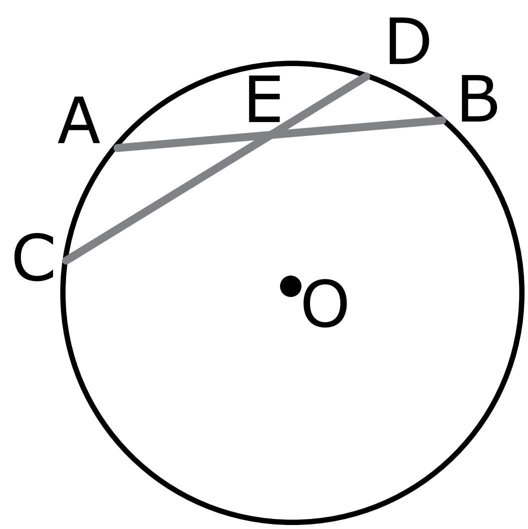


f. Sea *OPQR* un cuadrado. ¿Cuánto mide $\sphericalangle$ *PSR*?



6. Javiera calculó la medida de $\sphericalangle$AEC pero su desarrollo está incorrecto.

¿Cuál es la medida de $\sphericalangle$AEC si m($\overset{\frown}{AC}$)= 30° y m($\overset{\frown}{BD}$)= 20°?



Si x es el valor de $\sphericalangle$AEC entonces:

$$x = \frac{30 - 20}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Por lo tanto, $\sphericalangle$AEC mide 5º.

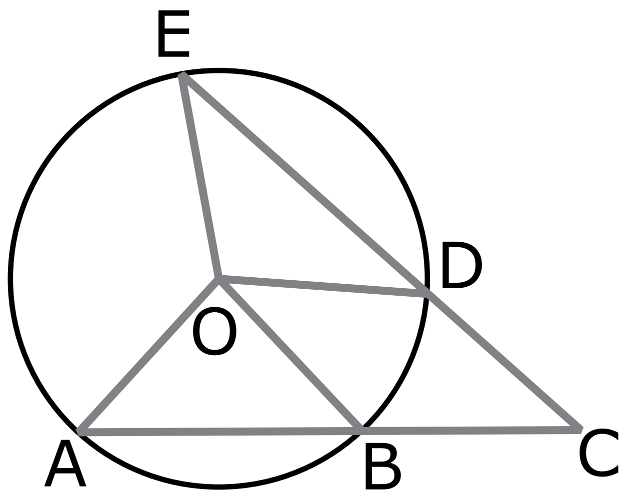
a. ¿Cuál fue el error que cometió Javiera en el desarrollo? Explica.

b. Corrige el desarrollo y calcula la medida la medida de $\measuredangle$ AEC.

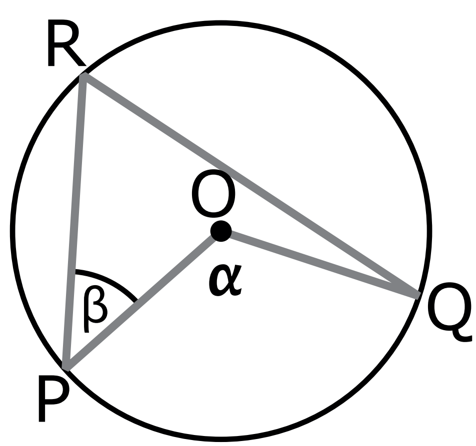
¿Qué harías para evitar este tipo de errores en la resolución de problemas? Crea una estrategia y convérsala.

7. En parejas, resuelvan los siguientes problemas utilizando dos estrategias diferentes. Luego, respondan.

Problema 1: Si ∢ *EOA* mide 120° y ∢ *DCB* mide 40°, ¿cuánto mide ∢ *BOD*?



Problema 2: En la circunferencia de centro *O*, el ángulo del centro α mide 96° y el ángulo inscrito β mide 26°. ¿Cuál es la medida de ∢ *RQO*?



a. ¿En qué consistió cada una de las estrategias que utilizaron?

b. ¿Qué propiedades necesitaron para resolver los problemas?

¿Qué teoremas aplicaron?

c. Comparen las resoluciones de sus problemas con otras parejas: ¿existen diferencias?, ¿cuáles son sus diferencias?

A 95 a la 103

Para concluir

a. Explica con tus palabras cómo calcular la medida de un ángulo interior y uno exterior de una circunferencia.

b. ¿Qué teoremas se utilizaron de temas pasados se utilizaron para demostrar los teoremas de este tema? Investiga otras estrategias para demostrarlos.

c. ¿Por qué crees que es importante que puedas aplicar más de una estrategia al resolver problemas? Argumenta tu respuesta.

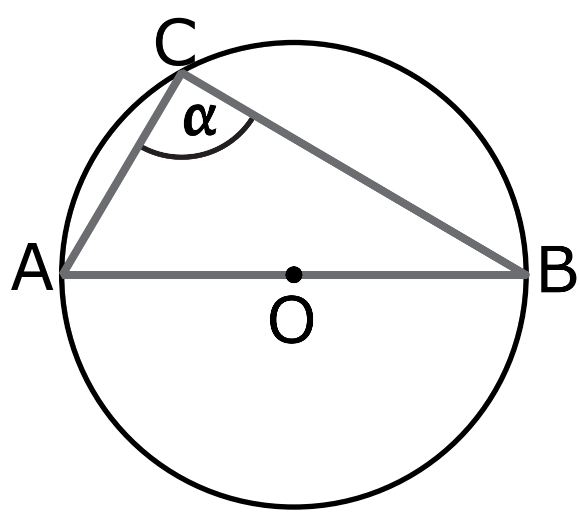
Antes de continuar

Evaluación intermedia

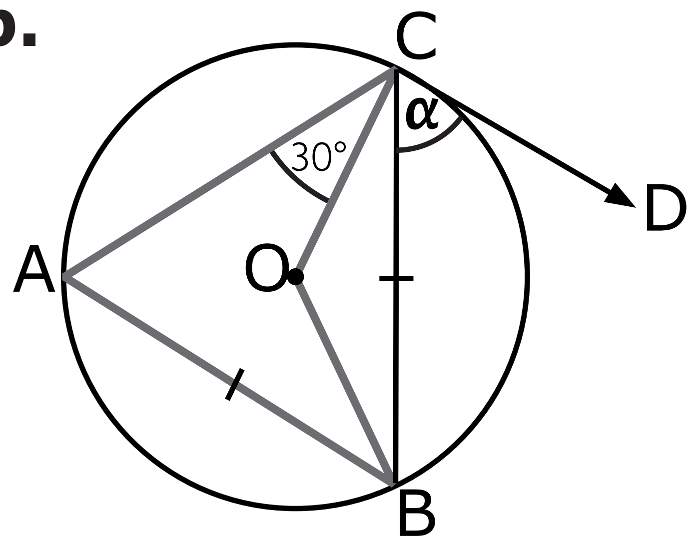
3. Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. Calcula la medida de α en cada circunferencia de centro *O*. Luego, en parejas, comparen el procedimiento que utilizaron.

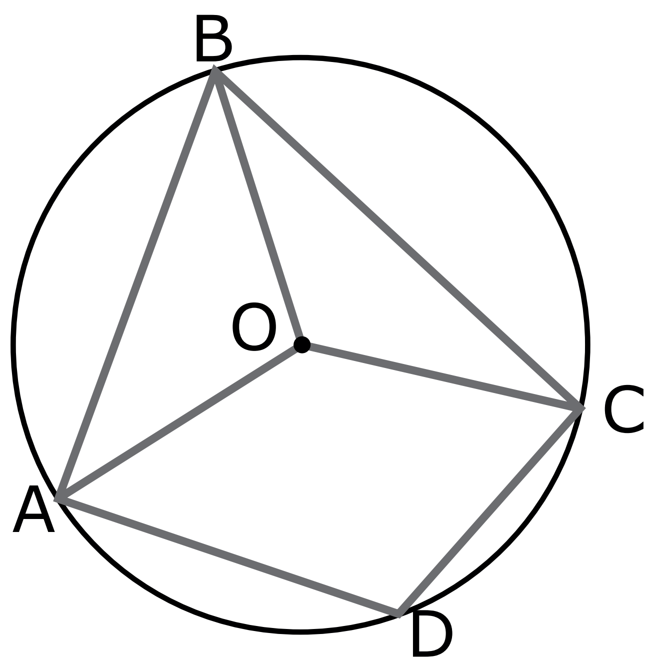
a.



b.



2. Analiza la siguiente circunferencia de centro *O*. Luego,indica si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.



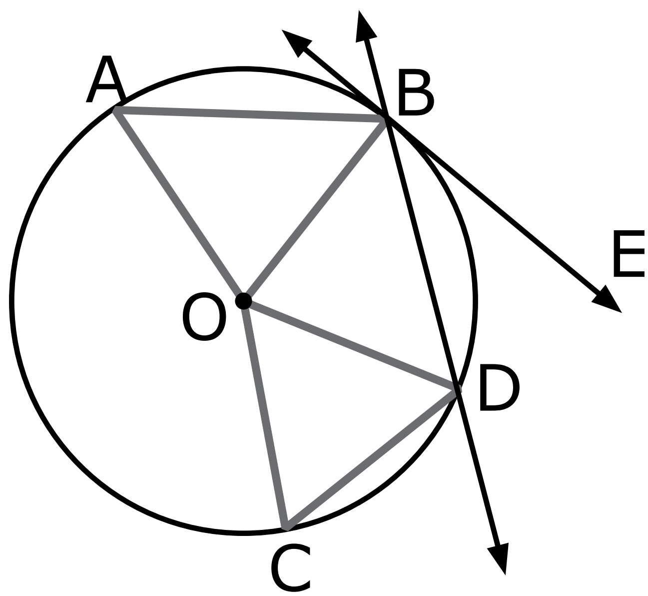
a. Si la medida angular de es 120° y la de   es 110°, entonces la medida angular de es 110°.

b. Si la medida de $\sphericalangle$ ABO es 40° y BO es bisectriz de $\sphericalangle$ ABC,entonces $\sphericalangle$ COB mide 100°.

c. El arco que subtiende el ángulo del centro AOC corresponde a la medida angular de $\widehat{AC}$.

d. El arco que subtiende el ángulo AOC es el mismo que subtiende el ángulo ABC.

3. Resuelve.



Felipe realizó en su cuaderno la construcción que se muestra arriba.

Si los triángulos *ABO* y *OCD* son equiláteros y la medida angular de $\widehat{AC}$ es 150°, ¿cuál es la medida de $\measuredangle$ DBE?

104 a la 108

Reflexiono

- ¿Qué estrategias utilizaste para resolver los problemas?, ¿cuáles otras podrías haber utilizado? Comenta con tu curso.

- De acuerdo con el desempeño obtenido en esta evaluación, ¿en cuáles actividades tuviste más dificultades.

Recorre desde la página 251 a la 292 para refozar aquellos contenidos que lo requieran.

Lección 6 Resolución de problemas con segmentos en la circunferencia

Objetivo: Resolver problemas aplicando las relaciones que se forman al cortarse dos cuerdas en una circunferencia.

Cuerdas en la circunferencia

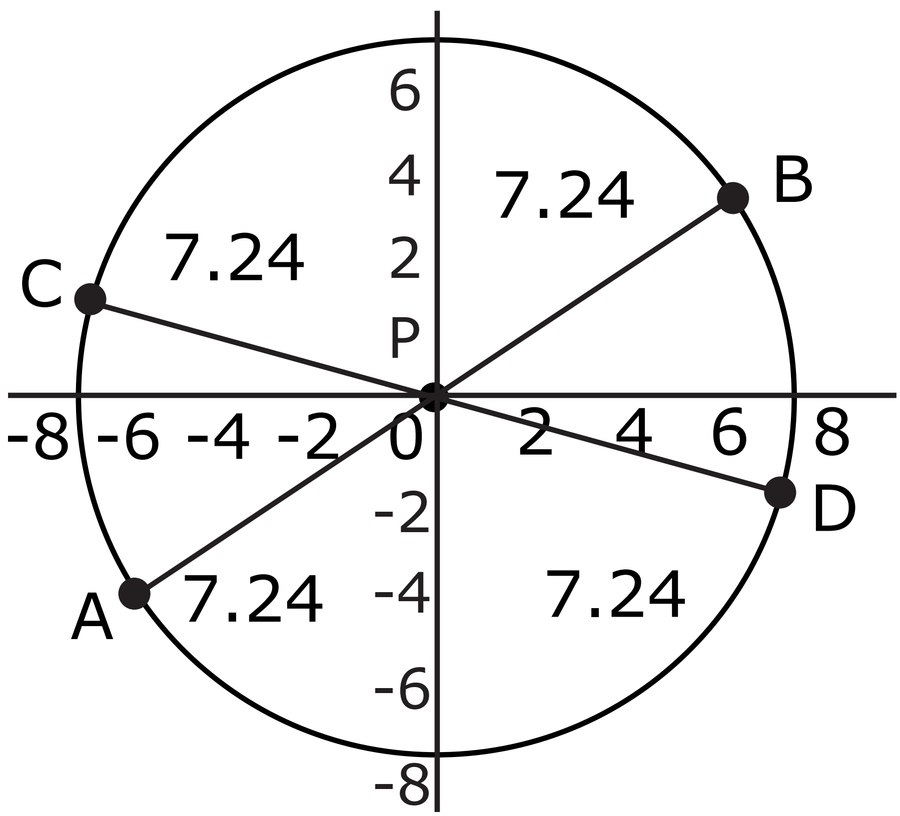
¿Qué significa que dos magnitudes sean directamente proporcionales?

¿En qué situaciones cotidianas se utiliza la proporcionalidad directa?

1. En parejas, realicen la siguiente actividad utilizando GeoGebra.

Paso 1 Ingresen el código T20M3M-P068A en el sitio web www.enlacesmineduc.cl y ubiquen el punto P en el origen del plano cartesiano. Luego, calculen los siguientes productos:

- PA·PC
- PB·PD
- PA·PD
- PC·PB
- PA·PB
- PC·PD



Paso 2 Muevan el punto P y calculen PA · PB y PC · PD para 3 diferentes posiciones. Construyan una tabla con todos los valores, incluyendo los de PA, PB, PC y PD. Guíense por el siguiente modelo:

PA	PB	PC	PD	PA·PB	PD·PC

Paso 3 Tracen los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. ¿Qué relación existe entre los triángulos *APC* y *DPB*? Argumenten su respuesta e intercámbienla con otras parejas.

Se puede establecer semejanza de triángulos bajo los criterios AA, LAL y LLL.

Paso 4 Escriban en su cuaderno la proporción entre los lados homólogos de ambos triángulos.

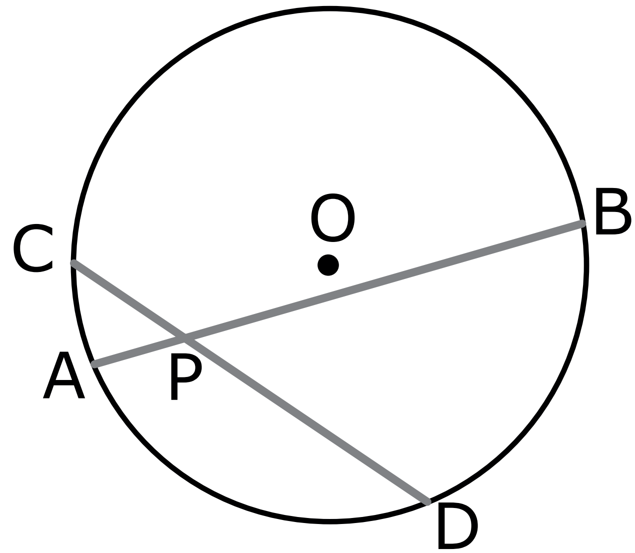
Paso 5 Utilicen el teorema fundamental de las proporciones para escribir una operación que relacione las medidas de los segmentos $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ y $\overline{DP}$. ¿Se cumple esta operación con las encontradas en el paso 2?

Teorema fundamental de las proporciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Así como en los ángulos, también existen relaciones entre las medidas de los segmentos que determinan dos cuerdas que se intersecan entre sí. En este caso, al intersecarse las cuerdas determinan triángulos semejantes, por lo tanto, sus segmentos correspondientes son proporcionales. Esto se conoce como **teorema de las cuerdas.**

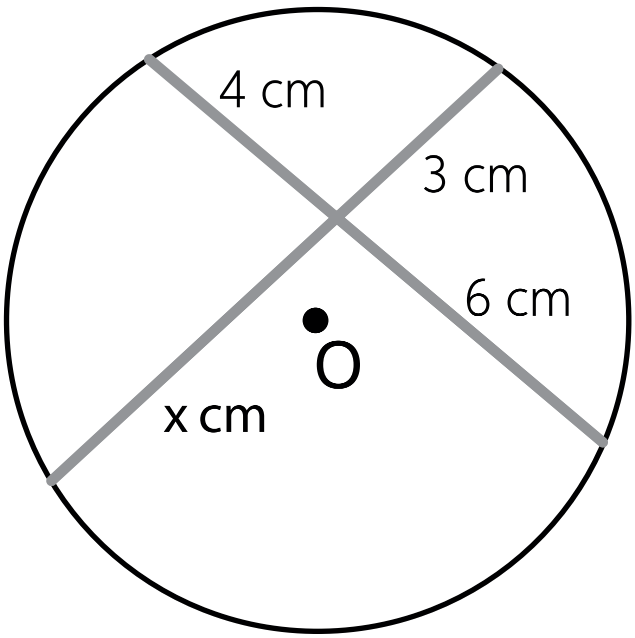
Teorema de las cuerdas: si dos cuerdas se intersecan en un punto interior de una circunferencia, los productos de los segmentos determinados en ellas son iguales.



$$PA \cdot PB = PD \cdot PC$$

Demuestra matemáticamente el teorema anterior. ¿Qué conocimientos de años anteriores utilizaste en tu demostración? Explica como los utilizaste.

2. Calcula el valor x de cada caso. Guíate por el ejemplo.

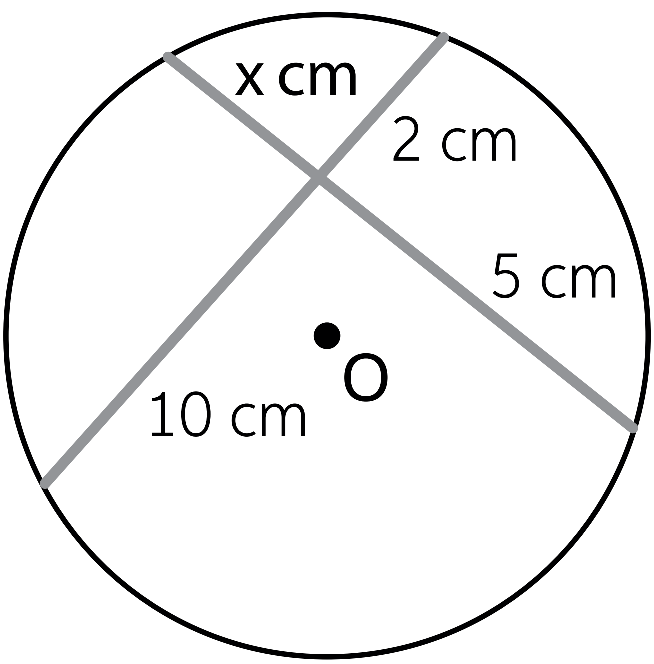


$3x = 4 \cdot 6$

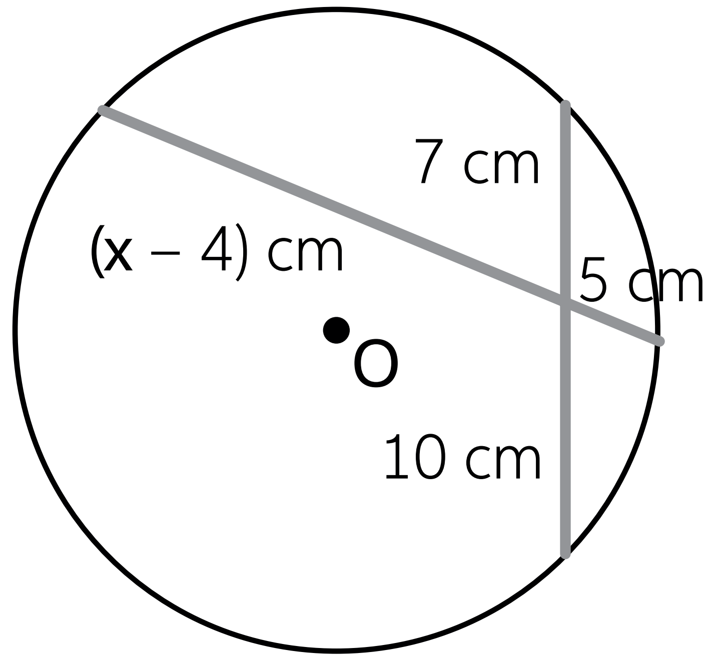
$3x = 24$

$X = 8$

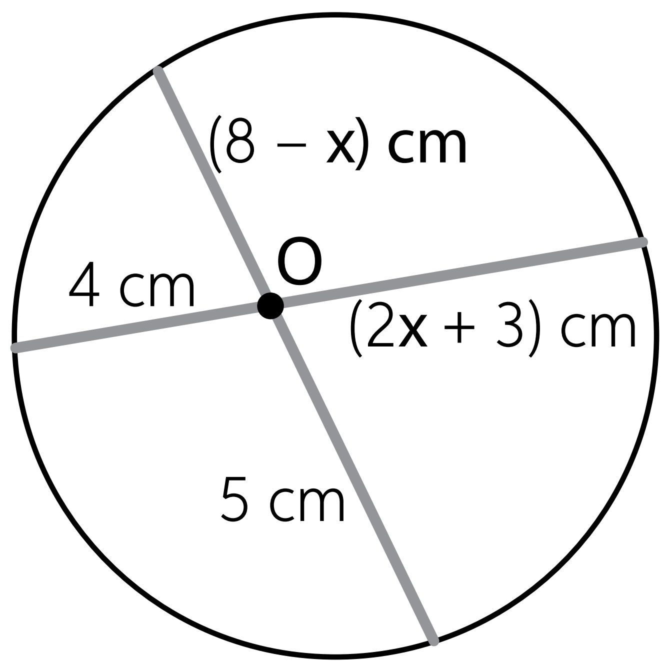
a.



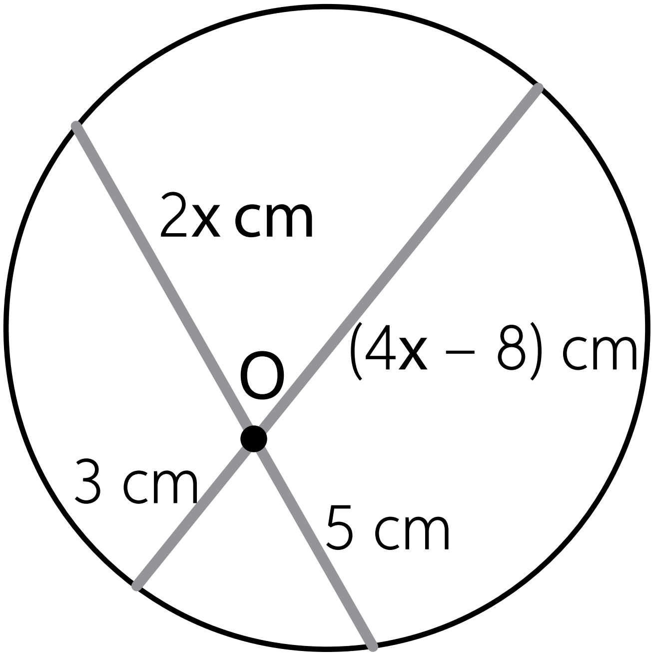
b.



c.



d.



3. Analiza lo que dicen los estudiantes Karen y Danilo y realiza las actividades.

Karen: "Al interior de una circunferencia de centro *O*, se trazan dos cuerdas, $\overline{MT}$ y $\overline{PQ}$, que se cortan en el punto *A*. Además, $PA = 12$ cm, $QA = 4$ cm y $AT = 16$ cm."

Danilo: “Al interior de una circunferencia de centro O, se trazan dos cuerdas, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, que se intersecan en el punto E de tal manera que $AE : EB = 1 : 3$. $AB = 8$ cm y CE=4cm.”

a. Representa con un dibujo lo que dice cada estudiante.

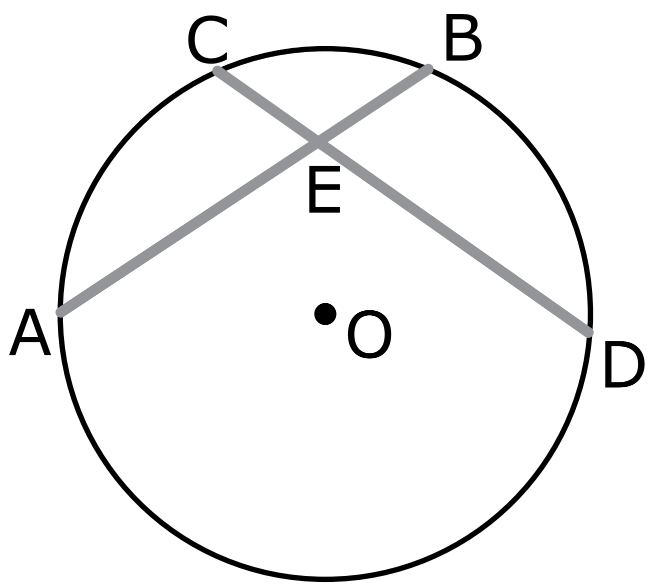
b. A partir de lo dicho por Karen, calcula el doble de la longitud de $\overline{MA}$.

c. A partir de lo dicho por Danilo, calcula la tercera parte de la longitud de $\overline{ED}$.

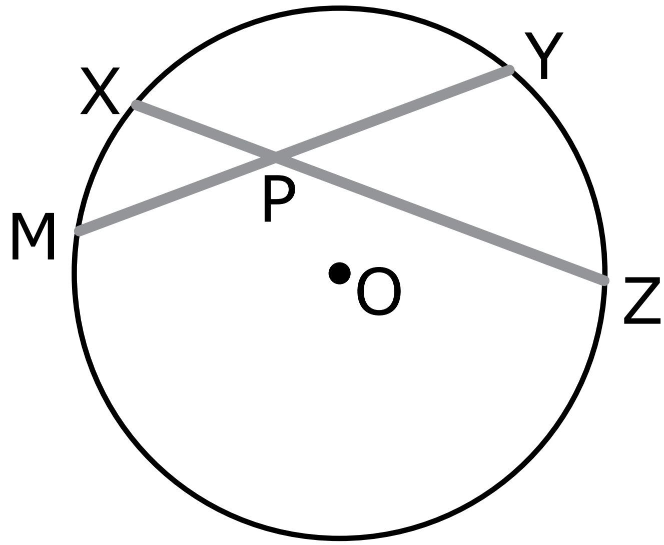
¿Podrías haber realizado la actividad anterior sin la representación gráfica? ¿Qué ventajas tiene la representación en este tipo de situaciones? Discútelo con tus compañeros.

4. Resuelve los problemas. Considera O el centro de cada circunferencia.

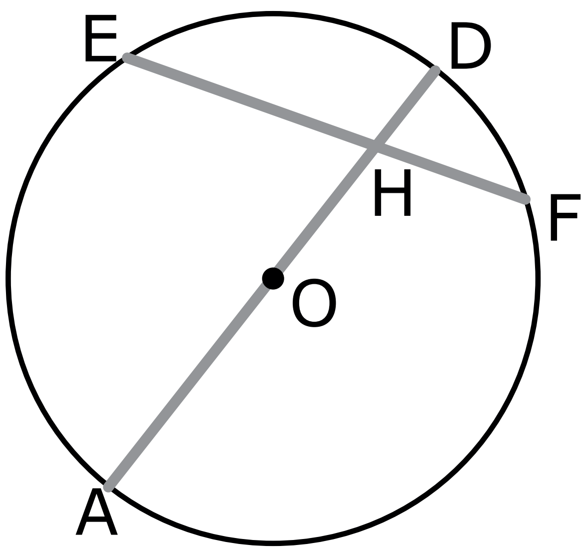
a. Si AE = 8 cm, EB = 10 cm y ED = 16 cm, ¿cuál es la longitud de $\overline{CE}$?



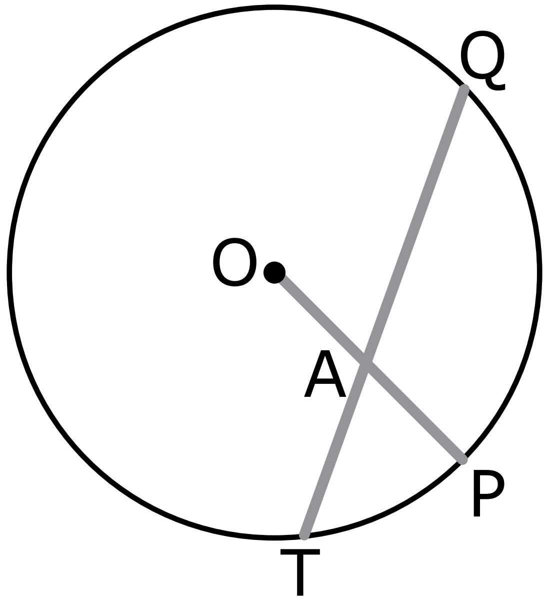
b. Si MY=20 cm, MP : PY=3:2 y XP =4 cm, ¿cuál es la longitud de $\overline{PZ}$?



c. Si AD = 18 cm, HD = 2 cm y EH = $2HF$, ¿cuáles es el doble de la longitud de $\overline{EF}$?



d. Si OA=3cm, AP = 2cm y QA =12 cm, ¿cuál es el 75 % de la longitud de $\overline{TA}$?



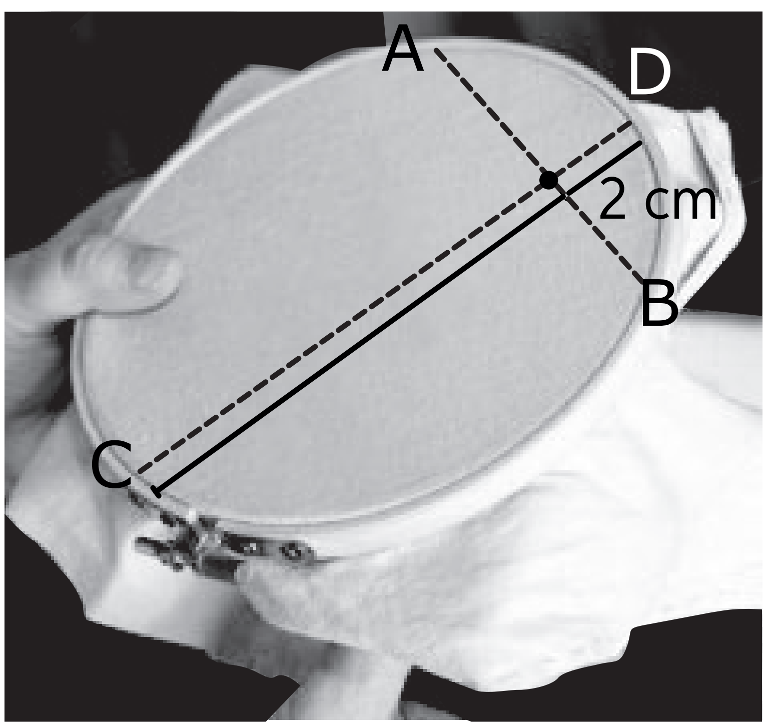
5. Analiza la situación. Luego, responde.

En un taller de artes, Denis borda con un bastidor circular. Sobre su bordado colocó 4 alfileres (representados por *A, B, C* y *D*), trazó con un lápiz grafito dos rectas y, en el punto donde se intersecan *(P)*, bordará una hoja.

La distancia entre *A* y *P* es el doble que la distancia entre *B* y *P*.

a. Escribe la expresión matemática que permite calcular la distancia entre el punto de intersección *P* y el punto *B*.

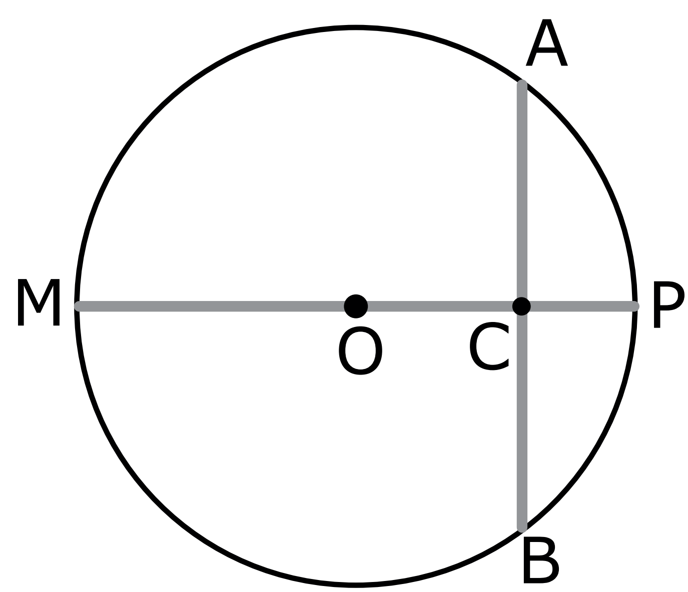
b. ¿Qué distancia hay entre los puntos *A* y *B*?



6. En la circunferencia de centro O que se muestra, $\overline{MP}$ es perpendicular a $\overline{AB}$, AB = 10 m, CP = 2 m y $\overline{MP}$ es diámetro.

a. Inventa un problema relacionado con una situación cotidiana que se resuelva utilizando el teorema de las cuerdas.

b. Resuelve el problema: ¿qué estrategia utilizaste?, ¿qué método utilizarías para comprobar tu respuesta? Explica.



c. Intercambia tu problema con un compañero y pídele que lo resuelva.

109 a la 116

Para concluir

a. Explícale a un compañero en qué consiste el teorema de las cuerdas. Apoya tu explicación con un ejemplo distinto a las actividades presentes en este tema.

b. ¿Qué otras estrategias podrías haber utilizado al resolver los problemas presentes en este tema? Explica y comparte tu estrategia con tu curso.

SECANTES Y TANGENTES EN LA CIRCUNFERENCIA

Objetivo: Resolver problemas aplicando las relaciones entre secantes y tangentes en una circunferencia.

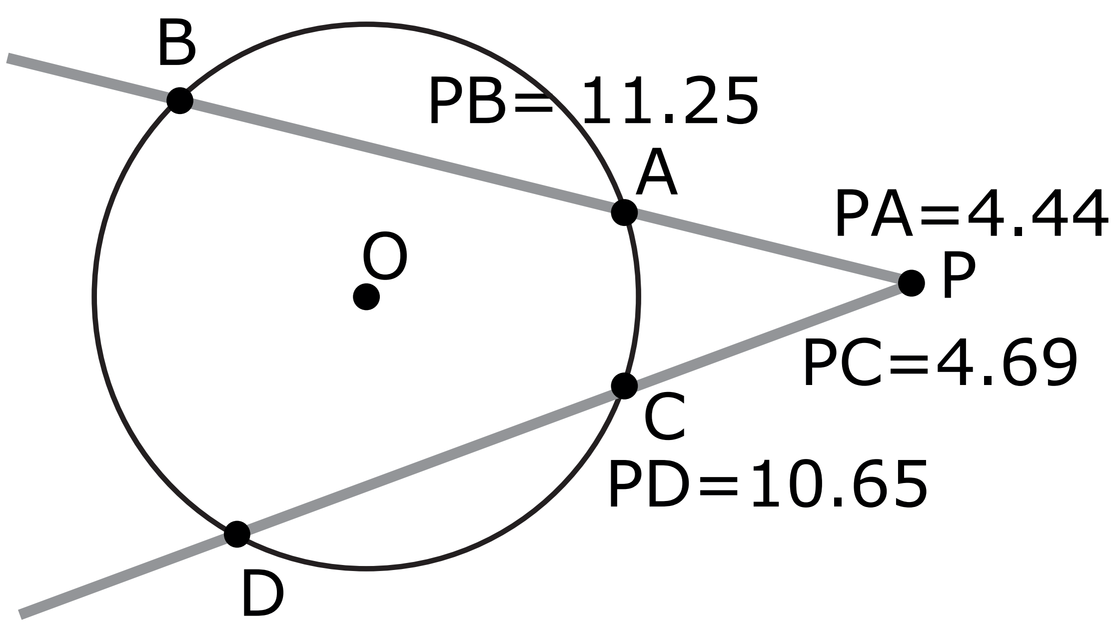
¿Qué tipos de rectas se pueden trazar en una circunferencia?

¿Qué recuerdas de rectas secantes y tangentes?

1. En parejas, realicen la siguiente actividad utilizando GeoGebra.

Paso 1 Ingresen el código T20M3M-P071A en el sitio web www.enlacesmineduc.cl y, de acuerdo con la aplicación, calculen los siguientes productos.

- $PA \cdot PC$ • $PB \cdot PD$ • $PA \cdot PD$
- $PC \cdot PB$ • $PA \cdot PB$ • $PC \cdot PD$



Paso 2 Muevan el punto *P*, asegurándose de que este quede siempre fuera de la circunferencia y calculen *PA • PB y PC • PD* para 3 diferentes posiciones. Construyan una tabla con todos los valores, incluidos los de *PA, PB, PC y PD.*

Paso 3 Tracen los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, de tal modo que se generen los triángulos *PCB* y *PAD*. ¿Qué relación existe entre los triángulos formados? Argumenten su respuesta. Luego, intercámbienla con otras parejas.

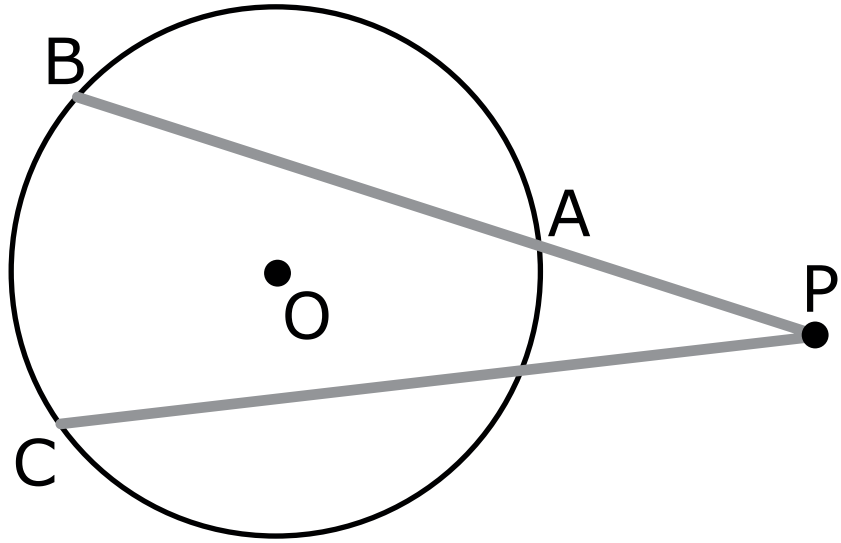
Paso 4 Escriban en su cuaderno la proporción entre los lados homólogos de ambos triángulos. Utilicen los criterios de semejanza de triángulos.

Paso 5 Utilicen el teorema fundamental de la proporciones para escribir una operación que relacione las medidas de los segmentos $\overline{AP}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ y $\overline{PD}$. ¿Se cumple esta operación con las encontradas en el paso 2? Comenten sus resultados con otras parejas.

318

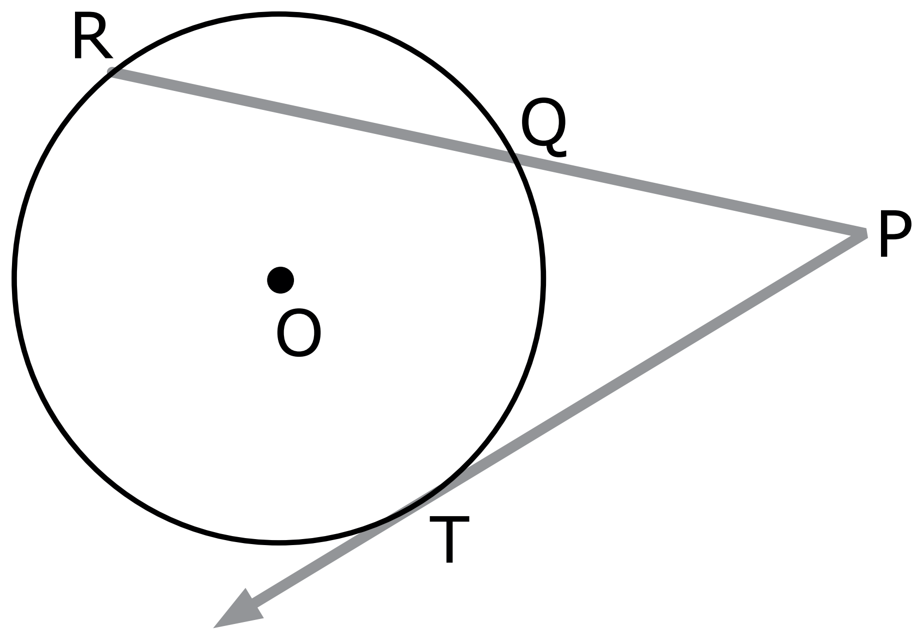
En una circunferencia de centro *O*, se cumplen los siguientes teoremas:

Teorema de las secantes:



PA • PB = PD • PC

Teorema de la secante y la tangente:



$$(PT)^2 = PQ \bullet PR$$

Si desde un punto exterior a una circunferencia se traza una secante y una tangente, ¿mide más la tangente, la secante o depende de cada caso? Argumenta tu respuesta y discútela con tus compañeros.

2. Realiza las siguientes actividades de acuerdo con el teorema de la secante y la tangente.

a. Copia la figura del teorema de la secante y la tangente de la página anterior en tu cuaderno y traza los segmentos $\overline{RT}$ y $\overline{QT}$. ¿Qué ángulos tienen la misma medida?

b. Con respecto a la figura anterior, ¿qué triángulos semejantes se pueden determinar? Argumenta tu respuesta.

Actividad de aplicación ✓

La rueda

¿Qué haremos? Modelar situaciones aplicando secantes y tangentes en una rueda.

Investiguemos

Paso 1 En grupos, investiguen sobre la historia de la rueda, sus usos y los objetos en que se encuentran.

Paso 2 Busquen diversas fotografías que muestren usos de la rueda.

Ejecutemos

Paso 3 Escojan las fotografías en la que se puedan trazar rectas secantes y tangentes e inventen un problema que se resuelva aplicando el teorema de las secantes o el teorema de la secante y la tangente. No olviden dar un contexto a su problema.

Paso 4 Escriban el problema en una hoja y peguen la fotografía. Luego, intercámbienlo con otros grupos y resuelvan el problema que les tocó.

Concluyamos

Paso 5 Finalizada la actividad, respondan.

- ¿De qué se trata el problema que resolvieron?
- ¿Qué teorema aplicaron para resolverlo?
- ¿Qué otra estrategia podrían haber utilizado?

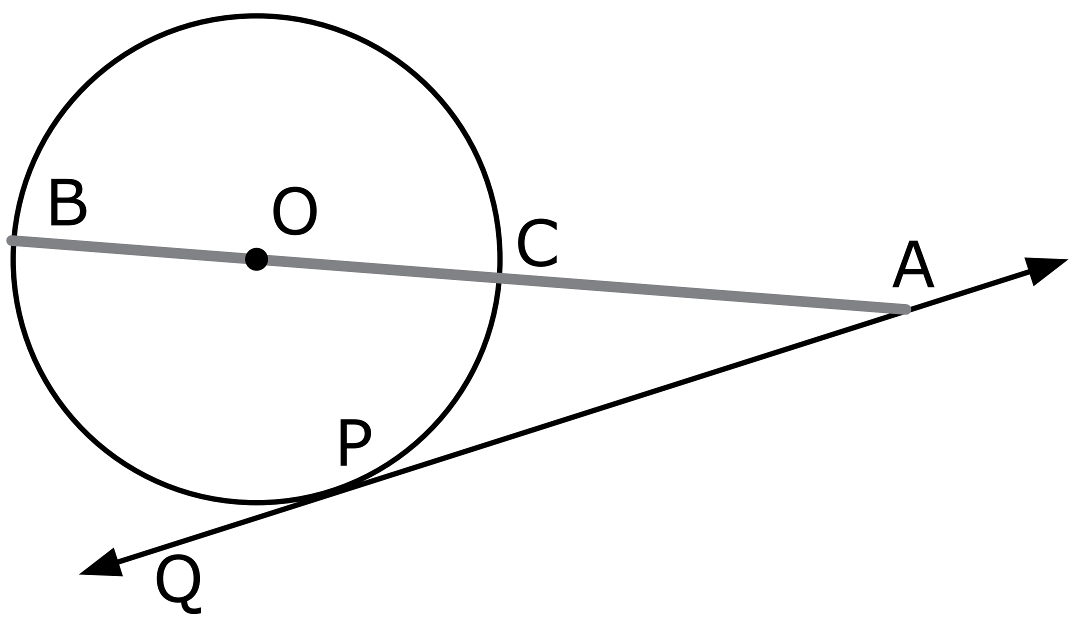
3. Representa cada situación con un dibujo. Luego, calcula lo pedido.

a. Desde un punto A exterior a una circunferencia, se traza la recta tangente $\overleftrightarrow{AB}$ y la recta secante $\overleftrightarrow{AD}$, de tal manera que la intersequen en dos puntos C y D. Si AC = 6 cm y DC = 18 cm, calcula la mitad de la medida del segmento $\overline{AB}$.

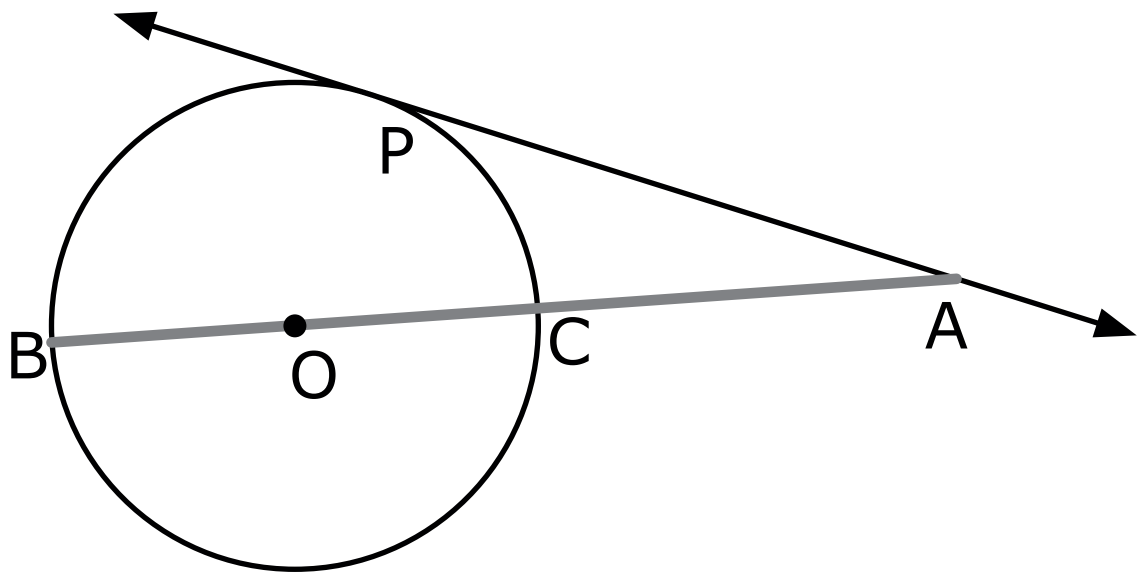
b. En una circunferencia, la cuerda $\overline{MP}$ se prolonga más allá de P hasta intersecar una recta tangente $\overleftrightarrow{AT}$, en el punto A, donde T es el punto de tangencia. Si PA = 2 cm y TA = 4 cm, calcula el doble de la longitud de $\overline{MP}$.

4. Resuelve los problemas. Justifica con tus cálculos.

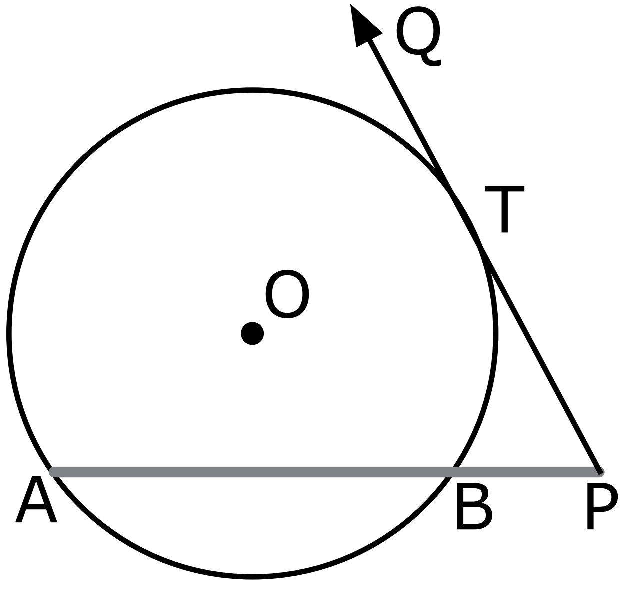
a. $\overleftrightarrow{PQ}$ es tangente a la circunferencia en P, PA = 15 cm y AB = 2,5PA. ¿Cuál es la medida del diámetro de la circunferencia?



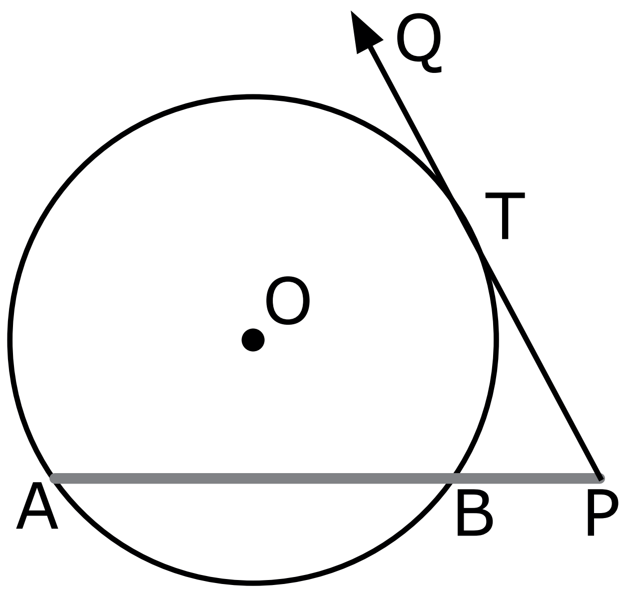
b. $\overleftrightarrow{PA}$ es tangente a la circunferencia en P, PA=16cm=3CA y BO=OC=x cm. ¿Cuál es la medida de BO + OC?



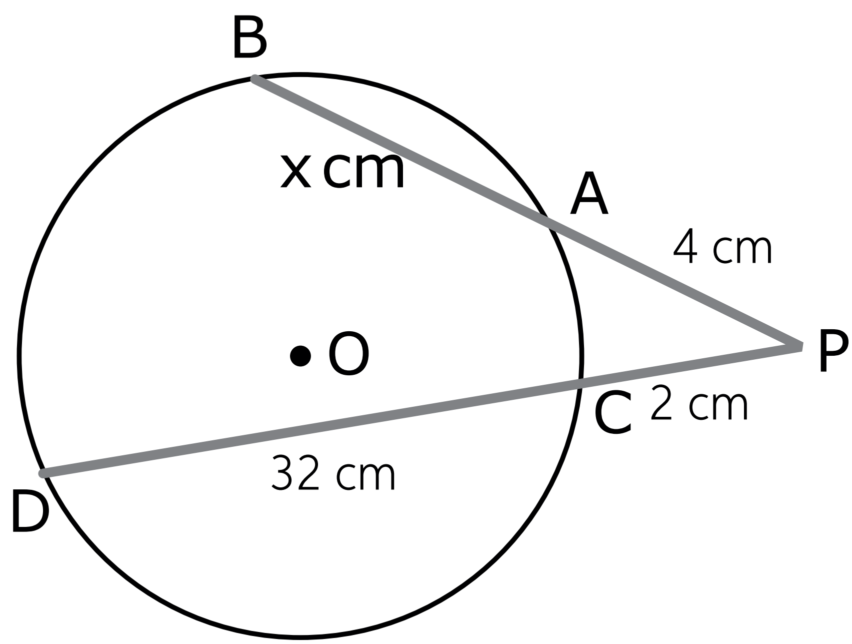
c. $\overleftrightarrow{PQ}$ es tangente a la circunferencia en T, AB = 30 cm y BP = 2 cm. ¿Cuál es la medida de $\overline{PT}$?



d. $\overline{HK}$ es diámetro, FH = 5 cm, HK = 8 cm y FL = 6 cm. ¿Cuál es el cuádruplo de la longitud de $\overline{LM}$?



5. Francisca calculó la medida del segmento que se muestra en la figura.



$$4 \cdot x = 2 \cdot 32$$
$$4x = 64$$
$$x = 16$$

Por lo tanto el segmento $\overline{AB}$ mide 16 cm.

a. ¿Cuál es el error que cometió Francisca? Explica.

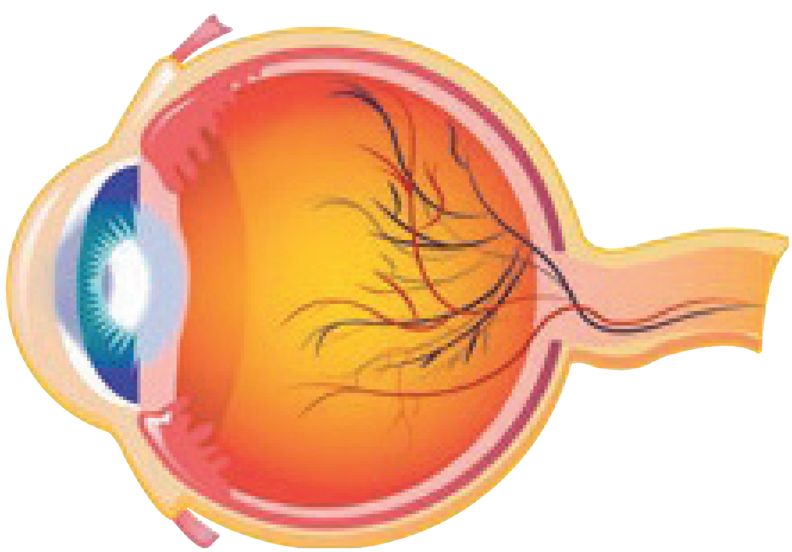
b. Corrige el error y encuentra la medida correcta del segmento AB.

Óptica

6. Analiza la información. Luego, realiza las actividades.

Las imágenes que vemos se deben a cómo entra la luz a nuestros ojos, los cuales tienen forma de esfera. En ellos se producen diversos efectos debido a la curvatura del cristalino.

a. Investiga respecto del funcionamiento del ojo y la forma en que captamos las imágenes.



b. Investiga respecto de algunas enfermedades a la visión y qué lentes se utilizan en cada caso. ¿Qué relación tienen con la formación de ángulos dentro del ojo? Explica.

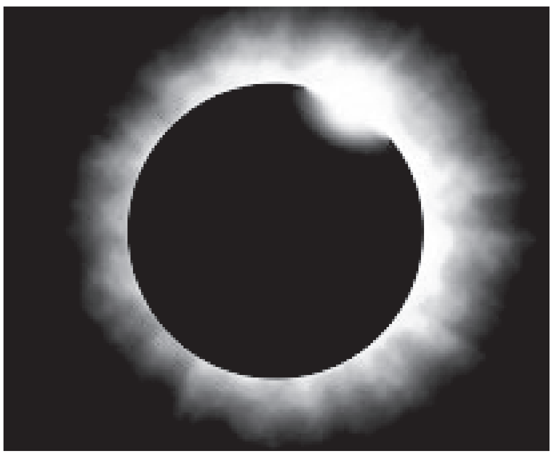
Actividad de aplicación ✓

Eclipses

¿Qué haremos? Construir trípticos para explicar la generación de eclipses vistos desde la Tierra.

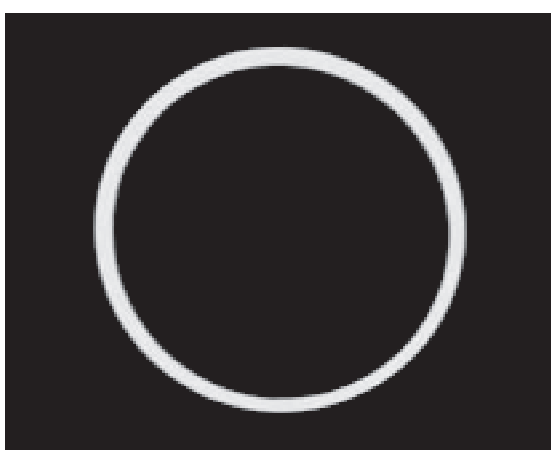
Planifiquemos

Paso 1 Organícense en grupos de 3 a 4 personas. Cada grupo deberá buscar información sobre uno de los eclipses que se muestran en las fotografías.



Eclipse de Sol completo

Eclipse de Luna



Eclipse de Sol anular

Paso 2 Definan los materiales que necesitan para su tríptico y el diseño que este tendrá. Además, designen las tareas de cada integrante del grupo.

Investiguemos

Paso 3 Investiguen en Internet y en sitios confiables de información sobre el tipo de eclipse escogido y respondan las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el orden con que deben estar el Sol, la Tierra y la Luna para que se produzca el eclipse?
- ¿Qué tiene que pasar para que ocurra el eclipse?

- ¿Por qué no ocurren eclipses todos los meses?
- ¿Qué relación tiene el eclipse con las fases de la Luna?

Presentemos

Paso 4 Generen el tríptico con la información recolectada. Recuerden ser novedosos y claros en la entrega de la información.

Analicemos

Paso 5 Utilizando lo aprendido en la lección, respondan:

- ¿Qué tipos de segmentos y de rectas ocuparon?

- ¿Cuáles son las distancias reales a las que se encuentran los objetos?
- ¿Cuál es la proporción usada?

Discutamos

Finalizada la actividad, discutan con los demás grupos:

- ¿En qué los ayudó esta actividad para el estudio de secantes y tangentes en la circunferencia?

- ¿Qué les llamó la atención de la actividad?, ¿por qué?

117 a la 122

Para concluir

a. Explica con tus palabras en qué consiste el teorema de las secantes y de la secante y tangente.

b. De las actividades realizadas en este tema, ¿en cuál tuviste mayor dificultad?, ¿qué hiciste al respecto?

c. ¿En qué otras situaciones se pueden representar rectas tangentes a una circunferencia? Da ejemplos.

Antes de continuar

Evaluación intermedia

Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje.

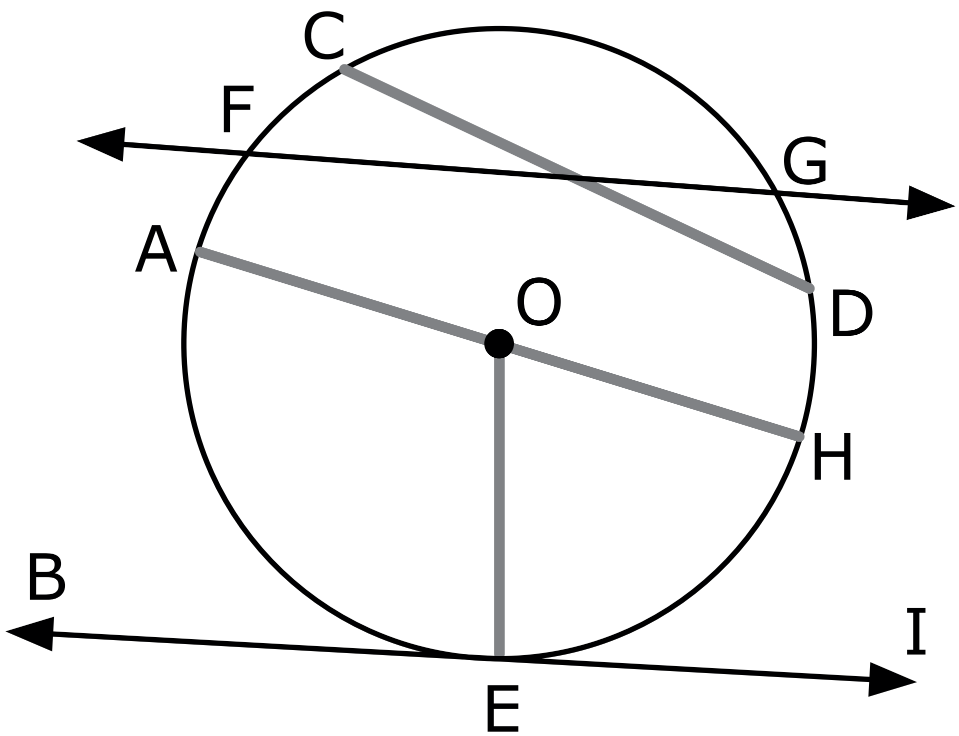
Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. Identifica los elementos indicados de acuerdo con la circunferencia de centro O.

a. $\overline{AH}$ **b.** $\overline{OE}$

c. $\overline{CD}$ **d.** $\overleftrightarrow{FG}$

e. $\overleftrightarrow{BE}$



2. Representa con un dibujo las siguientes situaciones y calcula lo pedido.

a. Dos cuerdas $\overline{NT}$ y $\overline{PQ}$ se cortan en el punto A. Si PA = 23 cm, QA = 8 cm y AT = 15 cm, calcula el doble de la longitud de $\overline{NA}$.

b. Las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se intersecan en el punto E de tal manera que AE: EB =2:3. Si AB=9 cm y CE = 3 cm, calcula la tercera parte de la longitud de $\overline{MB}$.

c. En una circunferencia la cuerda $\overline{MP}$ se prolonga más allá de P hasta intersecarse con una recta tangente TA en el punto A, donde T es el punto de tangencia. Si PA =2 cm, y TA = 4 cm, ¿cuál es el doble de la longitud de $\overline{MP}$?

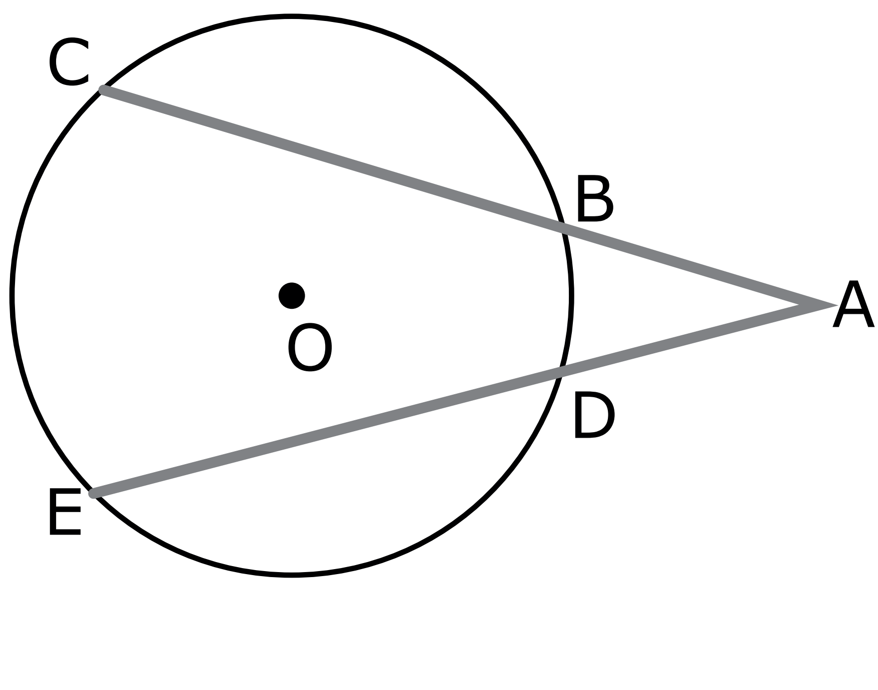
d. El radio $\overline{OM}$ de una circunferencia de centro O se interseca con la cuerda $\overline{PQ}$ en el punto B, de modo que MB:BO=2:

3. Si $PB = 20$ cm y $BQ = 5$ cm, calcula la longitud de $\overline{MB}$.

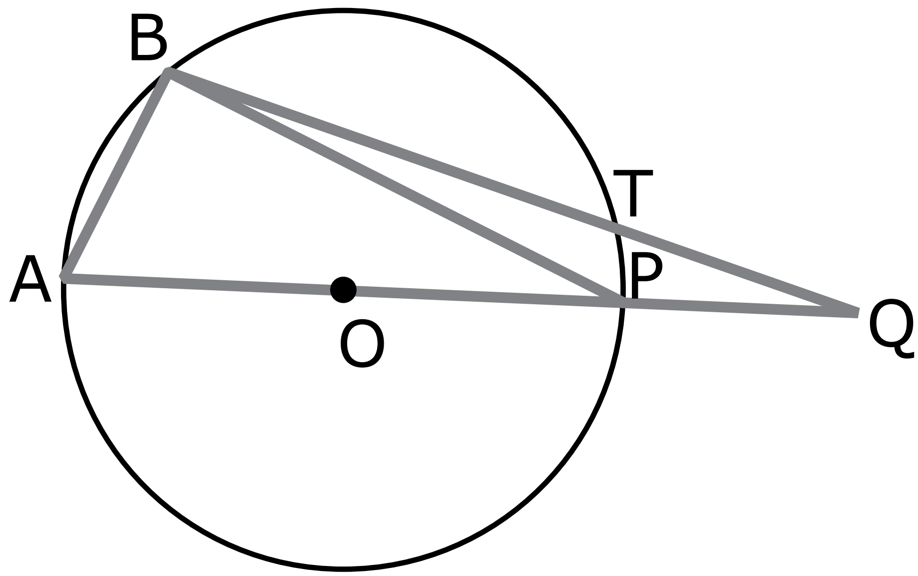
e. Desde un punto A exterior a una circunferencia se trazan dos rectas secantes, de tal manera que una de ellas se interseque con la circunferencia en los puntos B y C; y la otra, en los puntos D y E, donde $AB<AC$ *y* $AD<AE$. Si $AB=4$ cm, $CB=11$ cm y $AE=12$ cm, calcula la medida de $\overline{DE}$.

3. Resuelve. Luego, compara la estrategia que utilizaste con un compañero.

a. Joaquín realizó la siguiente figura, donde *O* es el centro de la circunferencia, con $\overline{AB}$ y $\overline{AE}$ secantes. Se sabe que AB=4 cm, BC=9 cm y AD=6 cm. ¿Cuál es el triple de la longitud de $\overline{DE}$?



b. Marcela realizó la siguiente figura, donde O es el centro de la circunferencia, con $\overline{AP}$ diámetro, $AB = 3$ cm, $BP = 5$ cm, $PQ = 3$ cm y $TQ = 2$ cm. ¿Cuál es la longitud de $\overline{BT}$?



Reflexiono

- ¿Qué estrategias utilizaste para resolver los problemas anteriores?, ¿en qué se asemejan a las utilizadas en la Lección anterior? Comenta junto a tu curso.

- ¿Qué conceptos de la lección entendiste bien? ¿Cómo lo podrías evidenciar?

123 a la 127

SÍNTESIS

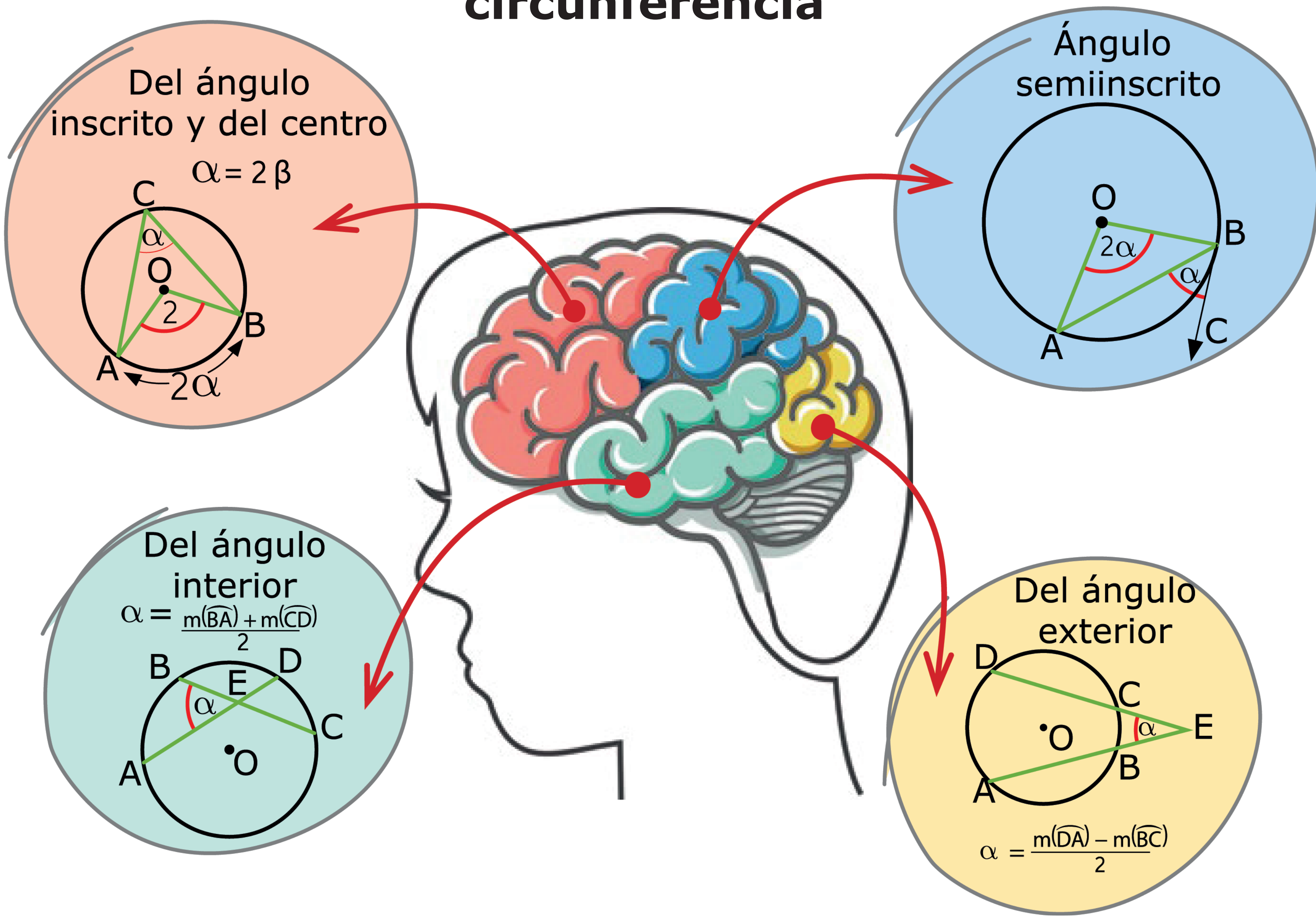
Lee atentamente la información y realiza lo pedido.

¿Qué es una lluvia de ideas?

Una lluvia de ideas corresponde a una fase creativa del pensamiento, en la que se intenta imaginar el máximo de posibilidades con respecto a un concepto. Simplemente, se debe dejar fluir la imaginación y para capturar las ideas más relevantes y significativas relacionadas de lo que se quiere sintetizar.

A continuación, se presenta un ejemplo de lluvia de ideas con algunos de los conceptos estudiados a lo largo de la Unidad.

Teoremas de ángulos de la circunferencia



Ahora, hazlo tú

1. Construye una lluvia de ideas con los teoremas vistos en la Lección 6.

2. Escribe con tus propias palabras la explicación que te permita aplicar cada uno de los teoremas antes mencionados. Comparte tus ideas de la pregunta 2 con tu curso.

3. ¿Cuáles son las ideas en común?, ¿qué las diferencia?

4. ¿En qué te ayuda este tipo de organizador gráfico para el estudio de esta Unidad? Explica.

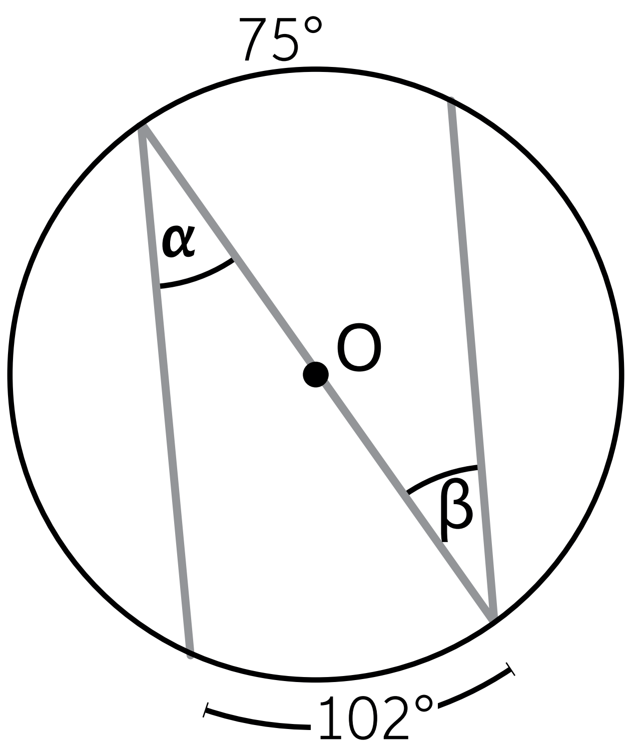
Repaso

Realiza las siguientes actividades.

Lección 5: Resolución de problemas con ángulos en la circunferencia

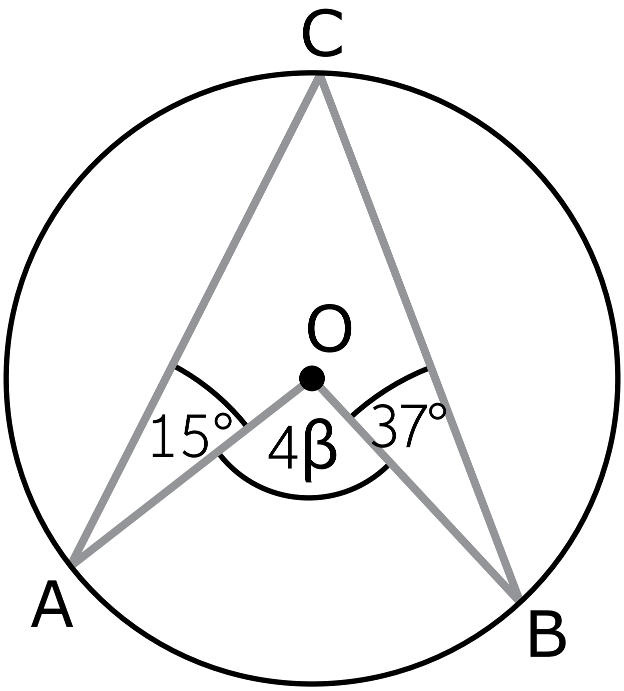
1. Determina la medida de los ángulos α y β según sea el caso.

a.

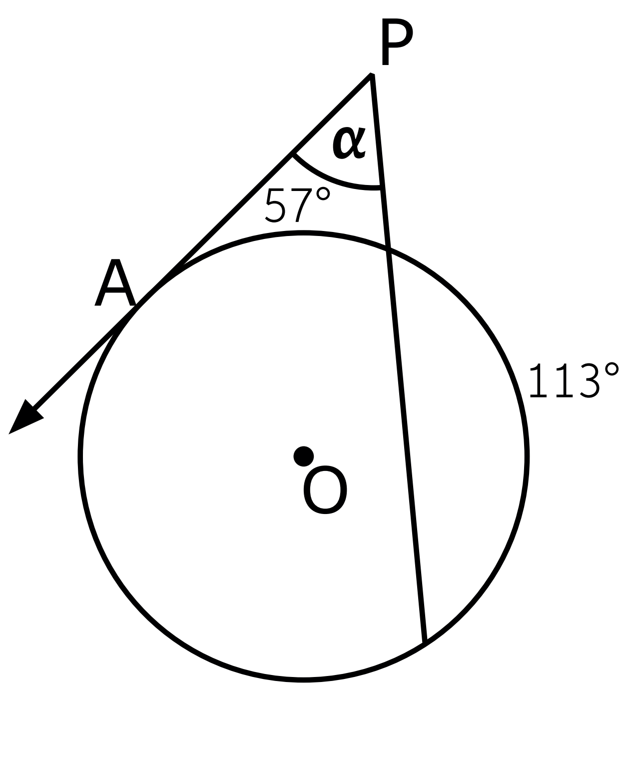


348

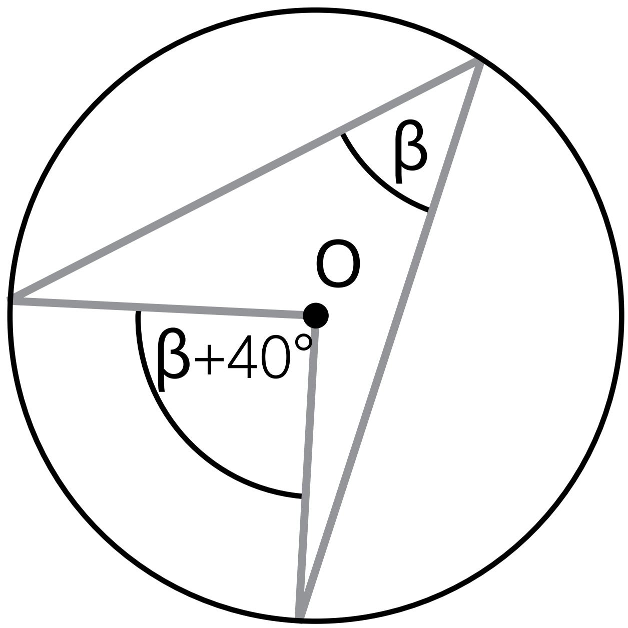
b.



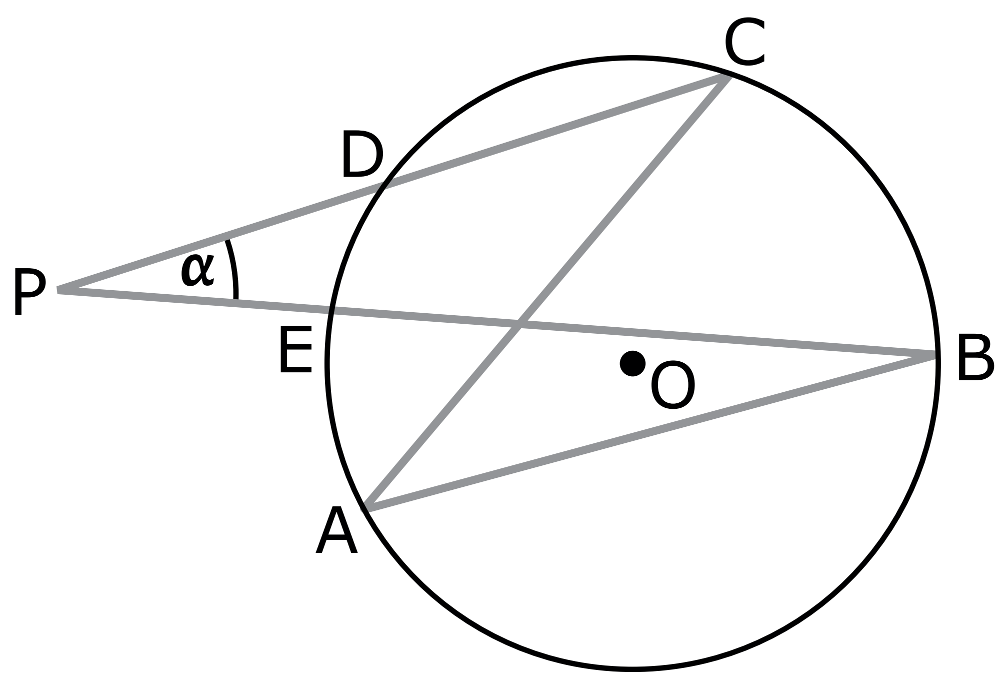
c.



d.

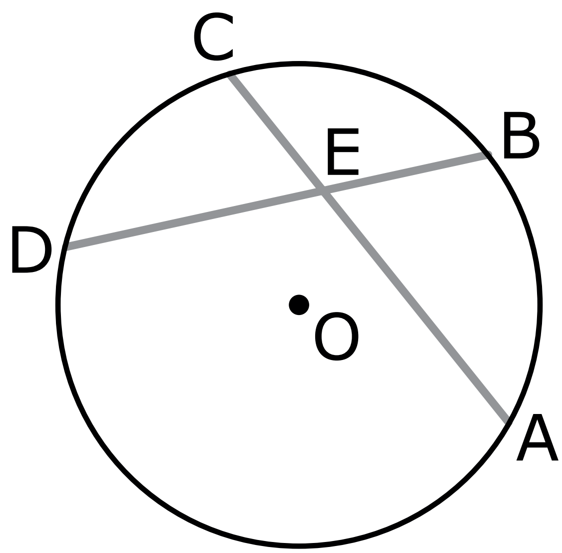


e.



Donde m($\measuredangle$ BAC) = 36°; m($\overset{\frown}{AB}$) = 25°

f.

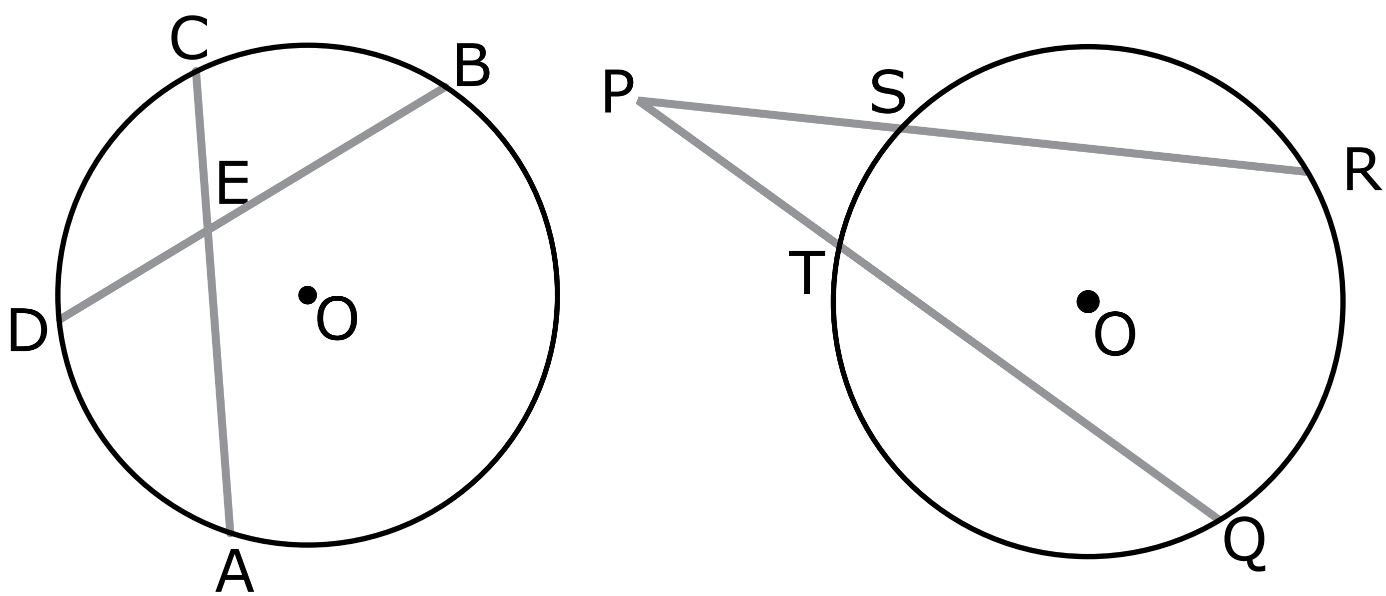


Donde $\alpha = m(\measuredangle AEB)$;

$m(\widehat{DA}) = 185°$; $m(\widehat{BC}) = 73°$

Lección 6: Resolución de problemas con segmentos en la circunferencia

2. Resuelve considerando las siguientes circunferencias y las medidas dadas en cada caso.



a. Si BE=(2x+1)cm, AC=(3x+5)cm, DE =3cm y CE=9 cm, ¿cuánto mide $\overline{AC}$?

b. Si PS =10 cm, RS =5 cm y

PQ = 25 cm, ¿cuánto mide $\overline{QT}$?

c. Si PQ = (8x + 8) cm, PR = 6x cm

PT = 5 cm y PS = 8 cm, ¿cuánto mide

$\overline{PQ}$?

¿QUÉ APRENDÍ?

Realiza las siguientes actividades para evaluar lo aprendido a lo largo de esta Unidad. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas de acuerdo con la circunferencia de centro O.

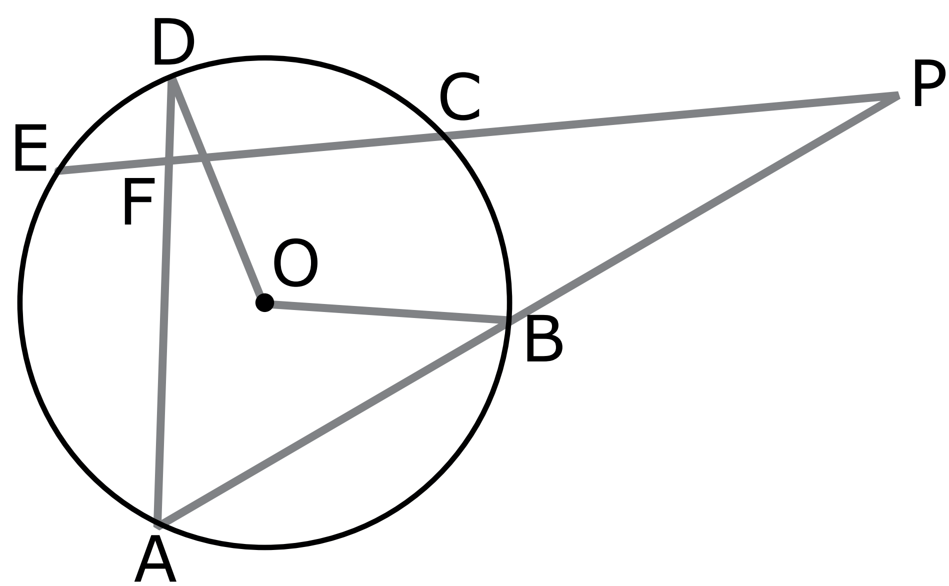
a. $m(\sphericalangle BAD)$ $(\sphericalangle BOD)$

b. $\overline{AP} \bullet \overline{BP} = \overline{EP} \bullet \overline{CP}$

c. $\overline{AD} \bullet \overline{DF} = \overline{CE} \bullet \overline{EF}$

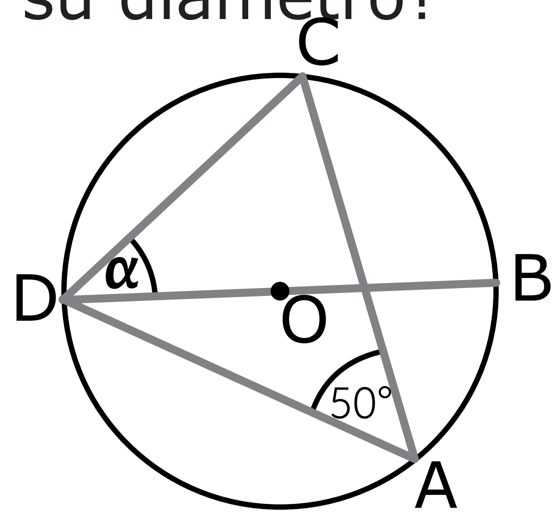
d. $m(\sphericalangle \mathrm{DFE}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{CE})+m\,(\overset{\frown}{AC})}{2}$

e. $m(\overset{\frown}{AB})=m(\overset{\frown}{CE})$

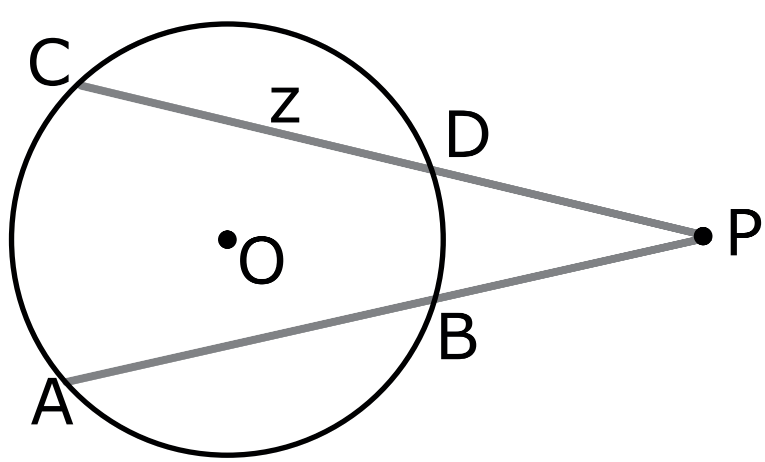


2. Calcula lo pedido en las siguientes figuras:

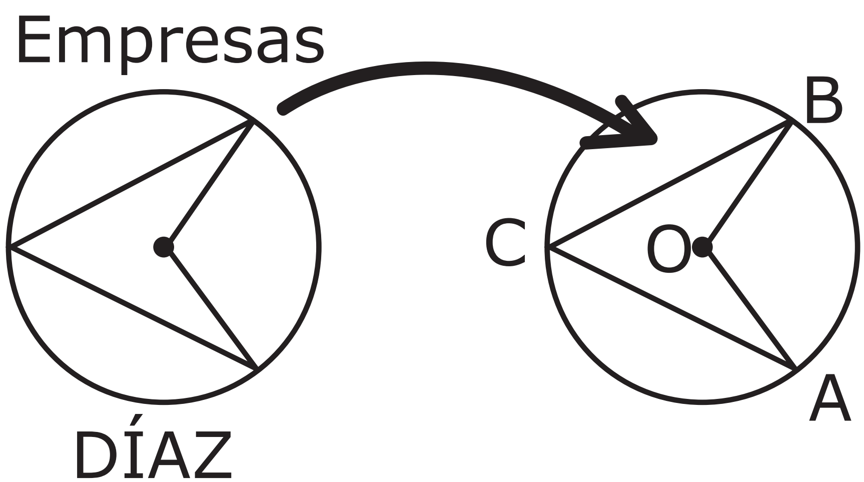
a. ¿Cuál es la medida de α si se sabe que $\overline{BD}$ es su diámetro?



b. Si *PD* = 2 cm, *BP* = 6 cm y *AB* = 8 cm, ¿cuánto mide *z*?



3. Carolina diseña un logo circular para una empresa. Para esto, construyó el siguiente modelo:



Carolina: "El radio $\overline{OB}$ de la circunferencia mide 5 cm y m($\measuredangle$ ACB) = 45°."

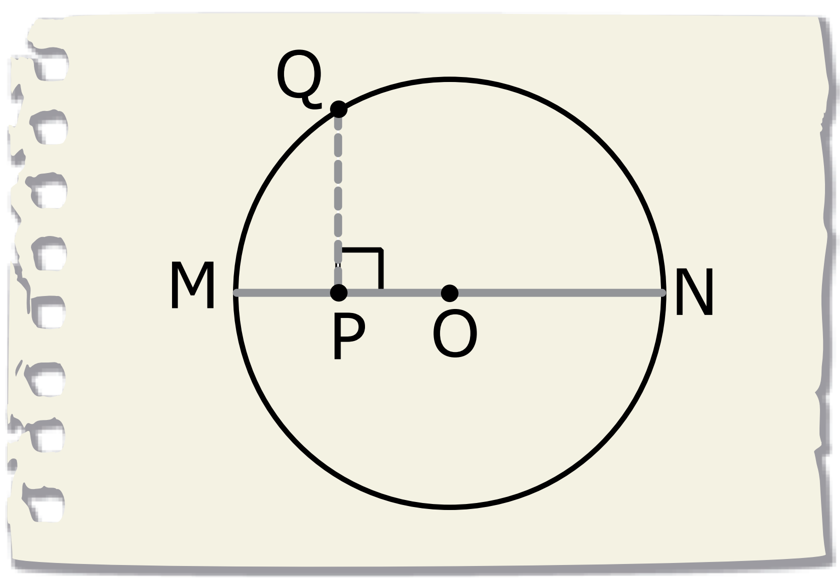
a. ¿Cuál es el área de la superficie de color verde?

b. Describe el procedimiento que te permite calcular el resultado anterior.

4. Analiza la siguiente situación. Luego, responde.

Jorge dibujó en su cuaderno una circunferencia de centro *O* y de radio $\overline{ON}$, que mide 6 cm. En ella, se cumple que *MP* = *OP.*

a. ¿Cuáles son las medida de $\overline{MP}$, $\overline{PQ}$ y $\overline{QN}$?

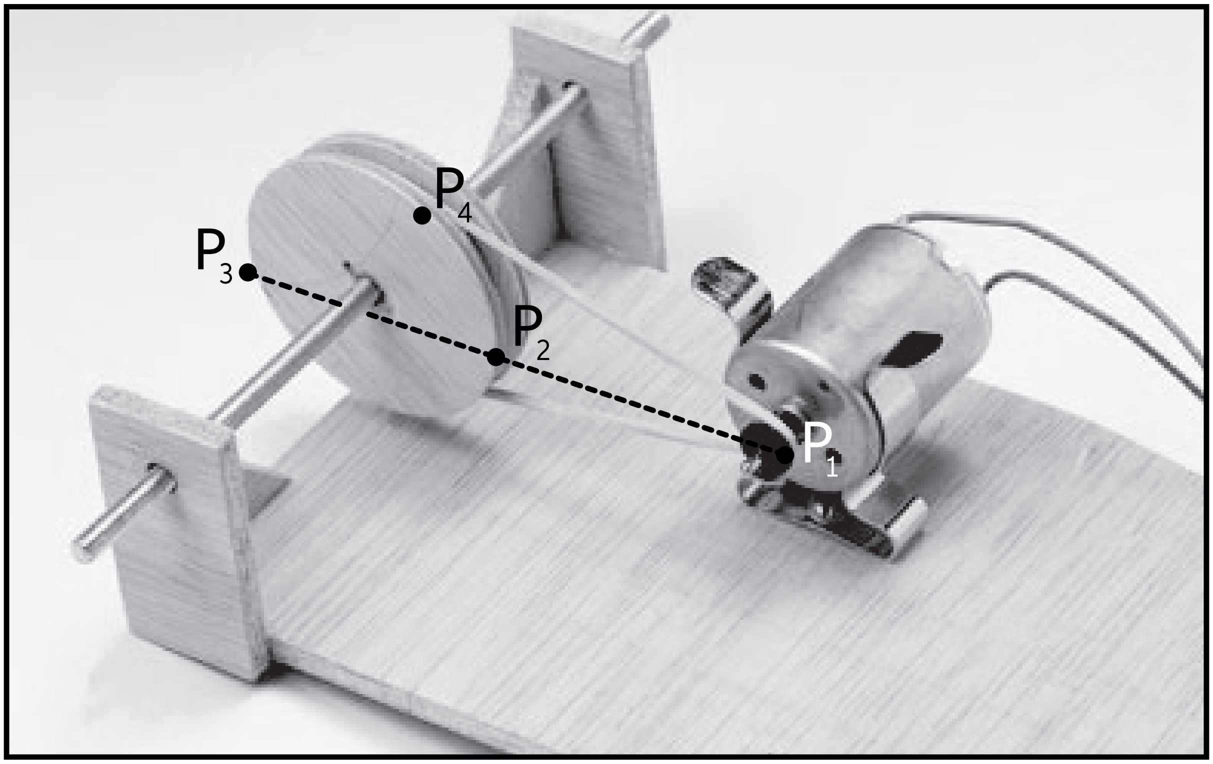


b. ¿Qué procedimiento utilizaste para calcular lo pedido? Explica.

Mecánica

5. Analiza la siguiente situación. Luego, responde.

Las poleas son dispositivos que permiten trasmitir fuerzas. Estas son utilizadas en diversos mecanismos de máquinas y artefactos, como los motores. En la siguiente imagen se muestra un motor eléctrico a escala realizado por un grupo de estudiantes de tercero medio, compuesto por dos ruedas circulares iguales y en cuyo centro pasa un fierro.



La cuerda amarilla pasa tangente a la rueda en el punto P_4 . Además, la línea segmentada que une P_1 y P_2 pasa por el centro de la rueda y la distancia entre P_1 y P_3 es 9,8 cm y la distancia entre P_1 y P_2 es 5 cm.

a. Calcula el perímetro de una rueda. Considera $\pi \approx 3,14$.

b. ¿Cuál es el área de la superficie de una rueda? Considera $\pi \approx 3{,}14$.

c. ¿Cuál es la distancia entre P_1 y P_4 ? ¿Cómo lo calculaste? Explica.

Reflexiono

- ¿Qué nuevas estrategias aprendiste para resolver problemas geométricos durante la Unidad?, ¿cómo las evidenciaste durante el desarrollo de la evaluación anterior?

- ¿Qué contenidos de la Unidad requirieron de más atención y esfuerzo de tu parte?, ¿por qué crees que sucedió?
-

  P ¿Cómo te ayudó la resolución de problemas en la realización del proyecto? Revisa tus avances y las metodologías que utilizaste. Corrígelas de ser necesario.

UNIDAD 4

UN ÚLTIMO PELDAÑO ALGEBRAICO: LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Lee la siguiente información . Luego, responde las preguntas y comenta tus respuestas con tu curso.

Hay referencias a los números complejos, como las raíces cuadradas de los números negativos, desde el siglo I a.C., cuando los matemáticos griegos se encontraron con un resultado que consideraron imposible para construir una pirámide. No fue sino hasta el siglo XVI que el filósofo y matemático italiano Gerolamo Cardano y sus contemporáneos comenzaron a experimentar con ecuaciones cuya solución incluía raíces cuadradas de números negativos. De este modo, se intentó dar solución a ecuaciones del tipo $X^2 + 1 = 0$.

Surgió, así, la necesidad de concebir un nuevo sistema que incorporara este tipo de números, hoy llamados números complejos, que tienen gran utilidad sobre todo en la física y en la ingeniería, por ejemplo, en los circuitos eléctricos, los aparatos electrónicos y la aerodinámica, entre otros.

1. Con una calculadora científica, calcula el valor de $\sqrt{-1}$. ¿Qué aparece en la pantalla? ¿Qué te imaginas al mirar la información que te entrega?

2. ¿Qué relación podrías establecer entre la información anterior y el título de la Unidad? Explica tu respuesta.

3. Un ejemplo de las aplicaciones de los números complejos se relaciona con aerodinámica. Discutan como curso la relevancia que tiene el estudio de este tipo de números en la vida cotidiana.

En esta Unidad estudiarás y aprenderás acerca de:

- El conjunto de los números complejos (C).
- La resolución de problemas usando la operatoria de números complejos.

Activo lo que sé

Evaluación Diagnóstica

Realiza las siguientes actividades para activar tus conocimientos previos sobre la Unidad.

1. Aplica las propiedades de las potencias y las raíces para calcular el valor de las siguientes expresiones:

a. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-9} \cdot 4^{-5}$

b. $\sqrt{\frac{3^{14}}{2^{18}}} \cdot \sqrt{\frac{4^{5}}{27^{15}}}$

c. $\frac{5^3+5^3+5^3+5^3+5^3}{25^2}$

d. $\left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot 3^8 \cdot 3^4$

e. $\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot 5^{-2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \cdot 5^5$

f. $\left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot 2^5 \cdot 4^3 \cdot 8^2$

2. De acuerdo con el siguiente plano cartesiano:

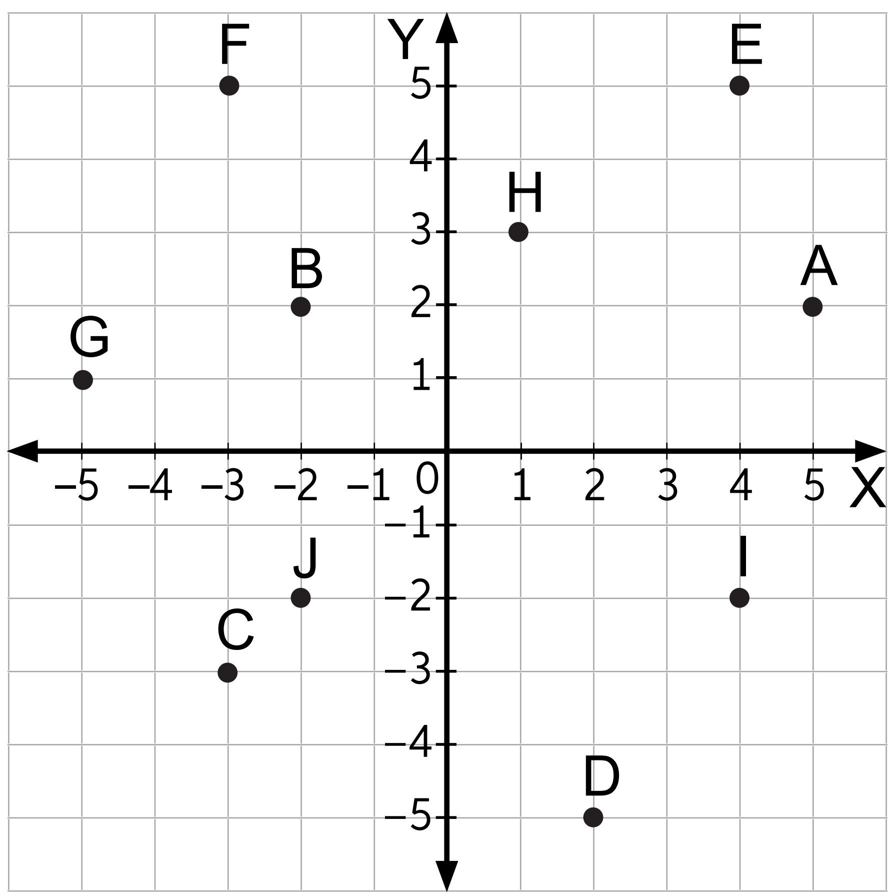
a. ¿Cuáles son las coordenadas de cada punto?

b. Si al unir el punto H con el origen del plano cartesiano se forma un vector, ¿cuál es su módulo?

c. ¿Qué puntos se encuentran en el segundo cuadrante?, ¿y en el tercero?

d. ¿Cuál es la distancia entre los puntos F e I? ¿Qué estrategia utilizaste para calcularla? Explícala.

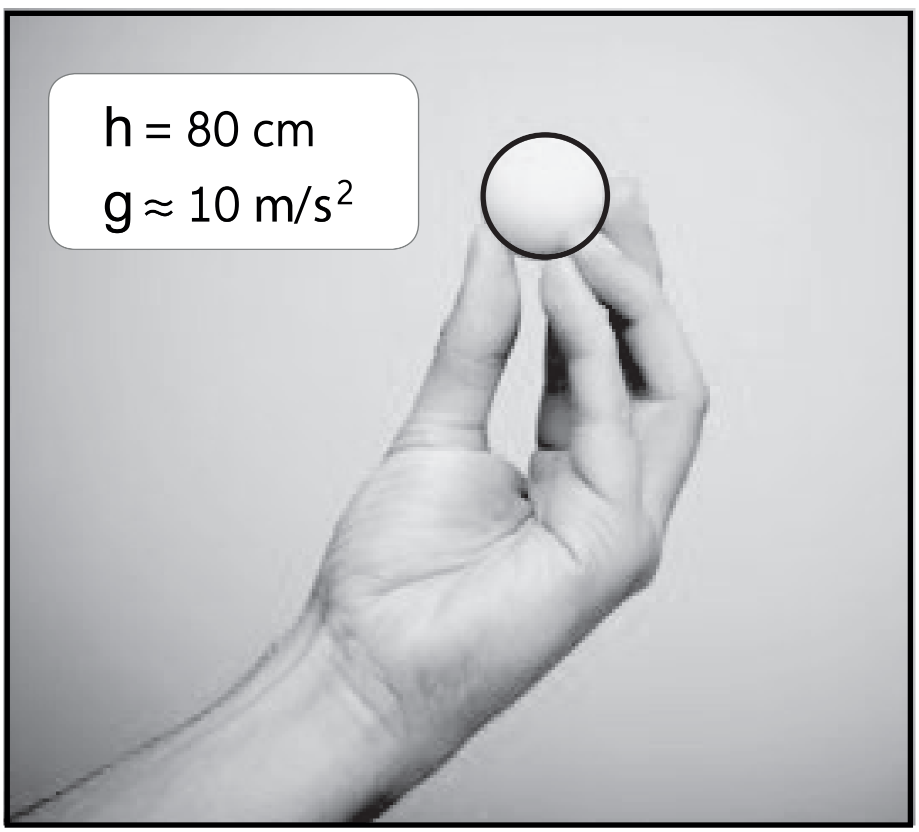
e. Escoge 3 puntos tales que, al unirlos, forme un triángulo. ¿Cómo calcularías su perímetro? Describe tu procedimiento y aplícalo para calcularlo.



3. Diego deja caer una pelota de ping pong. Sabe que, al caer un objeto desde una altura *h*, la rapidez *v* con que llega al suelo, despreciando el roce con el aire está dada por la siguiente expresión:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Donde *g* corresponde a la aceleración debida a la gravedad.



a. ¿Cuál es la rapidez de la pelota cuando llega al suelo por primera vez?

b. El valor de la rapidez, ¿a qué conjunto numérico corresponde?

Reflexiono

- ¿Reconoces los contenidos trabajados?, ¿cuáles de esos contenidos crees que debes repasar antes de continuar? Explica.

- ¿Qué propiedades de raíces utilizaste durante la evaluación? Enuméralas y explícalas.

Lección

7

El conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$)

Conjunto de los números complejos

Objetivo: Explicar la necesidad de expandir el conjunto de los números reales.

¿Qué conjuntos numéricos conoces? Nómbralos y da ejemplos de números que pertenezcan a ellos.

¿Qué métodos utilizas para comprobar las soluciones al resolver una ecuación?

1. Jaime resuelve las siguientes ecuaciones y anota el conjunto al cual pertenece su solución.

a. Verifica que la solución de cada ecuación pertenece al conjunto correspondiente. En caso de que este último no contenga la solución, indica todos los conjuntos a los que pertenece.

b. De acuerdo con la ecuación $X^2 - 7 = 0$, ¿por qué es incorrecto afirmar que sus soluciones pertenecen al conjunto de los números racionales?

Ecuación	Conjunto
$2x + 3 = 8$	$\mathbb{Z}$
$7x + 8 = 4x - 6$	$\mathbb{Q}$
$x^2 + 4x - 4 = 0$	$\mathbb{R}$
$7x - 4 = 2x + 4$	$\mathbb{N}$

372

Se dice que una ecuación no tiene solución en un conjunto numérico cuando su solución no pertenece a este. Por ejemplo, la ecuación $x + 1 = 0$ no tiene solución en el conjunto de los números naturales, ya que su solución, $x = -1$, no pertenece a $\mathbb{N}$, pero sí tiene solución en los conjuntos ya que -1 pertenece a estos conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. De esta manera, se hace necesario expandir un conjunto numérico con el fin de evaluar la solución de determinadas ecuaciones.

2. Resuelve las ecuaciones hasta identificar el factor $\sqrt{-1}$. Guíate por los ejemplos

$X^2 + x + 1 = 0$ $\quad$ $X^2 - 3x + 3 = 0$

$2X^2 + 5 = 0$

Ejemplo 1: $X^2 + 60 = -4$

$X^2 = -64$ $\quad$ /

$X = \pm\sqrt{-64}$

$X = \pm\sqrt{-64} \cdot \sqrt{-1}$

$X = \pm 8\sqrt{-1}$

Ejemplo 2: $X^2 - 2x + 5 = 0$

$$X = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$\rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{-1}$$

¿Qué relación hay entre el factor $\sqrt{-1}$ y que las ecuaciones no tengan solución en el conjunto de los números reales? Argumenta tu respuesta.

Existen ecuaciones que no tienen solución en el conjunto de los números reales. Es decir, no existe en este conjunto un número cuyo cuadrado sea un número negativo. Surge así un tipo de número, llamado número imaginario, cuya unidad imaginaria se denota por la letra i y se define como: $i = \sqrt{-1}$

Si se multiplica la unidad imaginaria por un número real b distinto de cero, resulta un número imaginario, que se simboliza por bi. Además, si se multiplica la unidad imaginaria por sí misma, se obtiene la potencia i^2, cuyo valor es -1.

Las potencias de los números imaginarios, cumplen con las siguientes propiedades:

$i^0 = 1$

$i^m \cdot i^n = i^{n+m}$

$(i^n)^m = i^{n \cdot m} \quad ^+$

con m, n $\in \mathbb{Z}_0$.

3. En parejas, analicen las siguientes potencias. Luego, respondan.

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i \cdot i^2 = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$

$i^9 = i^4 \cdot i^5 = 1 \cdot i = i$

$i^{10} = i^4 \cdot i^6 = 1 \cdot (-1) = -1$

$i^{11} = i^4 \cdot i^7 = 1 \cdot (-i) = -i$

$i^{12} = i^4 \cdot i^8 = 1 \cdot 1 = -1$

a. ¿Qué regularidad observan en sus potencias? Expliquen

b. ¿Qué valor tendría la potencia i^{16} ?, ¿y la potencia i^{25} ?

Potencia canónica de i	Potencia equivalente
$i^1 = i$	i^{4n+1}
$i^2 = -1$	i^{4n+2}
$i^3 = i \cdot i^2 = -i$	i^{4n+3}
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$	i^{4n+4}

Las potencias básicas o canónicas de la unidad imaginaria *i* corresponden a las primeras cuatro potencias de *i*. A partir de la quinta, las potencias se repiten en periodos de 4.

La unión de todos los números imaginarios con los números reales forma el conjunto de los **números complejos**. Algebraicamente, un **número complejo z** es toda expresión que se pueda escribir de la forma z = a + *bi*, donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria.

El conjunto de los $\mathbb{C}$ números complejos está formado por:

$$\mathbb{C} = \{ z = a, bi/a,b \in \mathbb{R} \ ; \ i^2 = -1\}$$

Se llama **parte real de z**, denotada como **Re(z)**, al número a, y parte imaginaria de z, denotada por ***Im(z)***, al número b. Por ejemplo:

$z = 2 + 3i$; $Re(z) = 2$ e $Im(z) = 3$

A la forma $z = a + bi$ se la llama **forma** o **representación binomial** de z. Dos números complejos son iguales si y solo si sus partes real e imaginaria son iguales.

Vuelve a la actividad 2. ¿Cuáles son las soluciones de las ecuaciones escritas de forma binomial?

4. Escribe un número complejo que cumpla la condición que menciona cada estudiante.

Estudiante 1: "Parte real racional y mayor que cero, y parte imaginaria entera menor que cero."

Estudiante 2: “La suma de la parte real e imaginaria es –1 y su resta es cero.”

Estudiante 3: “El cuadrado de la parte real es 4 y el cubo de la parte imaginaria es –27.”

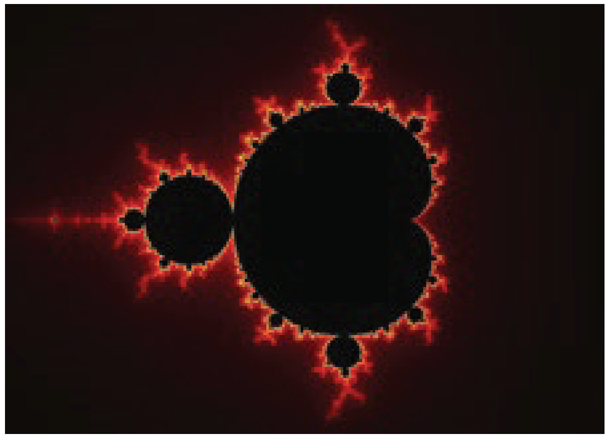
Actividad de aplicación ✓

Las aplicaciones de los números complejos

¿Qué haremos? Elaborar un afiche con las aplicaciones de los números complejos.

Planifiquemos

Paso 1 En grupos de 4 personas, escojan una de las aplicaciones de los números complejos que se muestran en la siguiente página.



1. Fractales.

2. Circuitos de corriente alterna.

3. Aerodinámica. Aviones

Paso 2 Investiguen en Internet acerca de la aplicación escogida. Recuerden utilizar sitios webs que entreguen información confiable. Para realizar la investigación, guíense por las siguientes preguntas:

- ¿En qué consiste la aplicación que escogieron? ¿En qué situaciones se observan?

- ¿Cómo se relaciona la aplicación que escogieron con los números complejos? Expliquen.
- ¿Cuál es el impacto en la realidad de la aplicación?

Ejecutemos

Paso 3 Establezcan la manera en que elaborarán su afiche y los recursos que necesitarán (soporte digital, materiales concretos, etc.). Para el diseño de su afiche, consideren las siguientes secciones:

- Título que llame la atención.
- Explicación simple y clara de la aplicación.

- Fotografías de apoyo.
- Conexión de la aplicación con la matemática.

Paso 4 Organicen las tareas del grupo, de manera que cada integrante sea responsable de una sección del afiche.

Presentemos

Paso 5 Den a conocer su trabajo a su curso. Pueden compartirlo por sus redes sociales o realizando una exposición frente a sus compañeros. Luego, realicen una discusión a partir de las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la importancia de la matemática frente a diversos fenómenos presentes en la realidad?
- ¿Qué es lo más que les llamó la atención de la aplicación investigada?

128 a la 139

Para concluir

a. Explica a un compañero qué aprendiste acerca del conjunto de los números complejos.

b. Escoge una de las actividades presentes entre las páginas 370 y 381. ¿Qué estrategia utilizarías para comprobar que tus respuestas están correctas? Explica.

c. ¿Qué actividad te pareció más interesante? ¿Por qué?

Representación de números complejos

Objetivo: Representar un número complejo por medio del plano de Argand, de forma binomial y como par ordenado.

¿Qué maneras de representar un número conoces? Da ejemplos.

¿Qué aspectos consideras al graficar en un plano cartesiano?

1. Observa los siguientes números complejos:

$z_1 = 4 + 5i$

$z_2 = 6 + 2i$

$z_3 = 1 + 7i$

$z_4 = 4 - 3i$

$z_5 = -3 + 3i$

$z_6 = -2 - 7i$

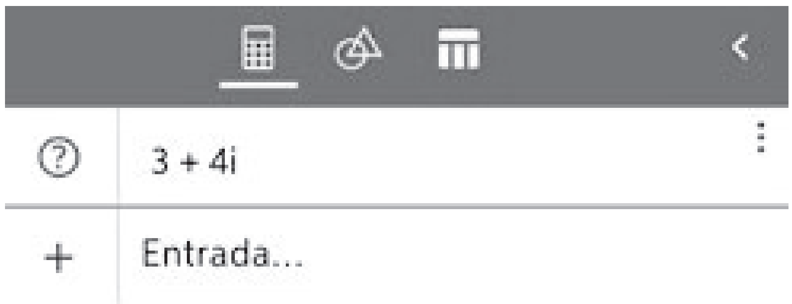
$z_7 = -1 - i$

$z_8 = 2{,}5 - 4i$

$z_9 = -8 - 4{,}5i$

a. Identifica la parte real y la parte imaginaria de cada número.

b. Represéntalos utilizando GeoGebra. Para esto, escríbelos en su forma binomial, como se muestra en el ejemplo.



Para el número $z = 3 = 4i$

c. ¿Con qué eje del plano se relaciona la parte real de cada número complejo?, ¿y la parte imaginaria?

d. ¿Qué similitud existe entre la representación gráfica de un vector y la de un número complejo?

Un número complejo z se puede representar de las siguientes formas:

- En **forma binomial**, es decir:

$z=a + bi$;

- Como **par ordenado**, es decir:

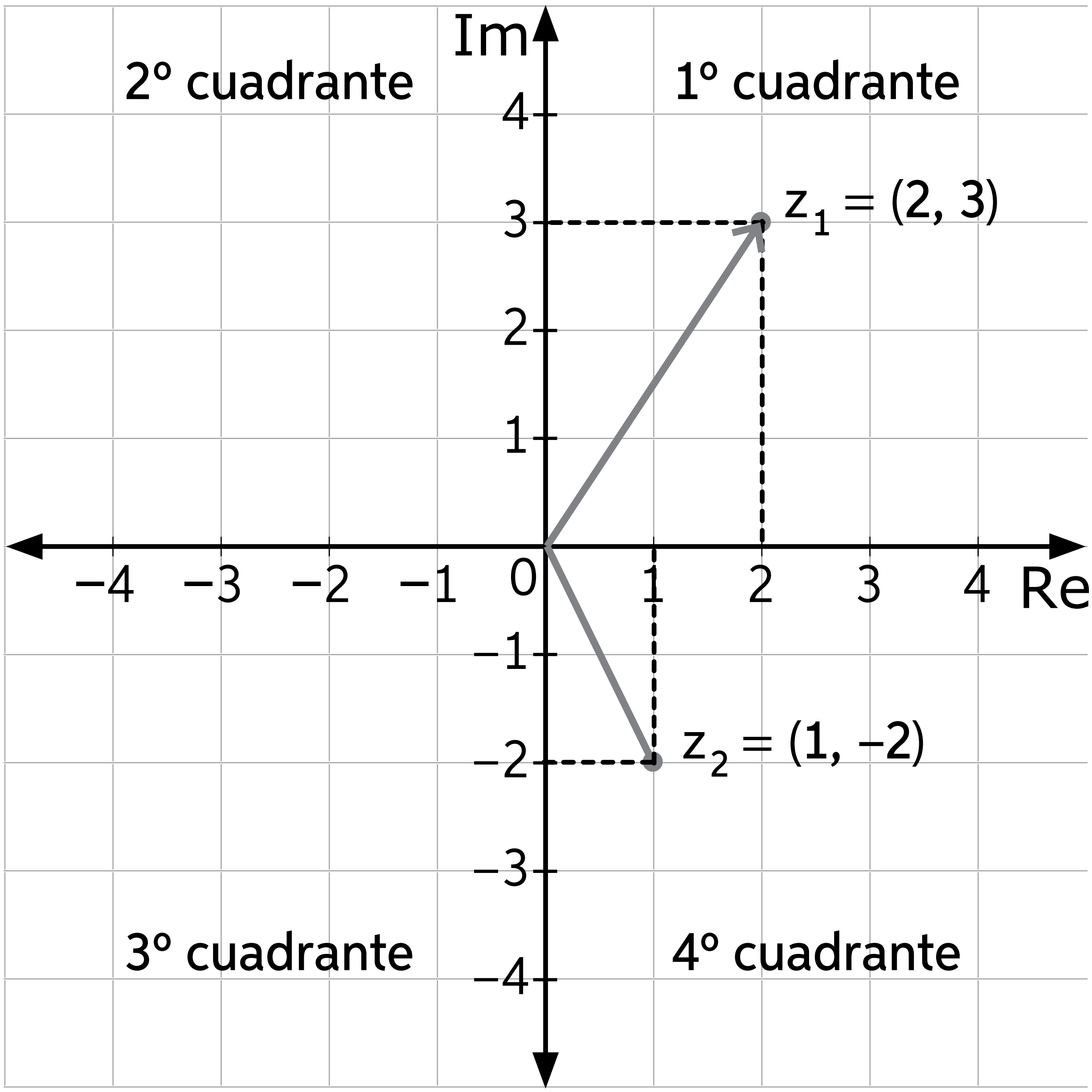
$z = (a, b)$; con $a, b \in \mathbb{R}$.

- En un **plano de Argand**.

El plano de Argand es similar al cartesiano, pero su eje horizontal representa las partes reales y su eje vertical las partes imaginarias de los números complejos. También se definen cuatro cuadrantes, nombrados en sentido antihorario. Ejemplos:

La representación gráfica de los números

$z_1 = 2+3i$ y $z_2 = 1-2i$



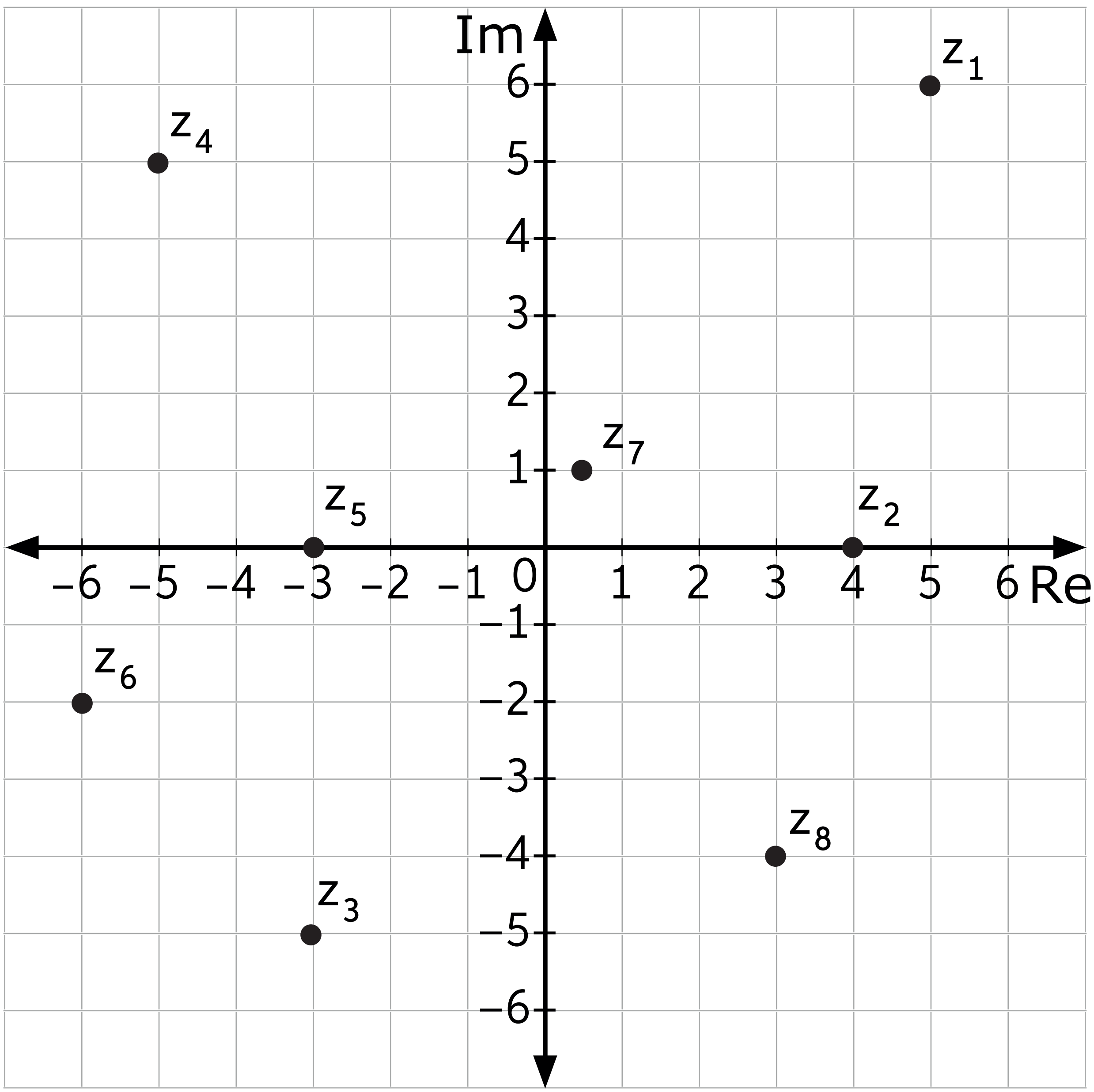
Del gráfico anterior se obtiene:

$z_1 = 2+3i$ y $z_2 = (2,3)$

$z_2 = 1-2i = (1, -2)$

La representación de un número complejo como par ordenado es (0, 1). ¿Cuál es el número?

2. En el siguiente plano de Argand se representan los pares ordenados correspondientes a números complejos.



a. Identifica la parte real y la parte imaginaria de cada número complejo.

b. Escribe cada número complejo en su forma binomial y como par ordenado.

3. Escribe cada número complejo como par ordenado. Luego, represéntalos gráficamente utilizando GeoGebra.

a. $z_1 = -5 + 3i$

b. $z_2 = 1 - 6i$

c. $z_3 = 1{,}5 - 3i$

d. $z_4 = -5 - 5i$

e. $z_5 = 6$

f. $z_6 = -7i + 1$

g. $z_7 = -5i$

h. $z_8 = -6 - i$

i. $z_9 = -8i$

4. Analiza cada afirmación. Luego, indica si es verdadera o falsa, considerando que $z \in \mathbb{C}$. Justifica tu respuesta en cada caso.

a. El número complejo z =2 – 3i se representa en el segundo cuadrante.

b. Si $z = (a, b)$ se ubica en el cuarto cuadrante, entonces $a \cdot b > 0$.

c. Si $\mathrm{Re}(z) > 0 > Im(z)$, entonces $z = (a, b)$ se ubica en el cuarto cuadrante.

d. Si $Re(z) = 0$, en el plano de Argand, z se ubica en el cuarto cuadrante.

e. La representación como par ordenado de $z = 1 - i$ es $(-1, 1)$.

f. Si $\mathrm{z} = (a, b)$ y $Re(z) = 2Im(z) = 4$, entonces $z = (4, 8)$.

g. Si $\mathrm{z} = (a, b)$ se ubica sobre el eje imaginario, entonces $Im(z) = 0$.

140 a la 147

Para concluir

a. Explica a un compañero las formas de representar un número complejo. Nombra un ejemplo diferente a los tratados en este tema.

b. ¿Qué diferencias y similitudes existen entre el plano cartesiano y el plano de Argand? Explícalo a un compañero.

c. Escribe dos números complejos como par ordenado de tal manera que sus partes imaginarias estén en la razón 5 es a 2.

Módulo y conjugado de un número complejo

Objetivo: Calcular el módulo y el conjugado de un número complejo.

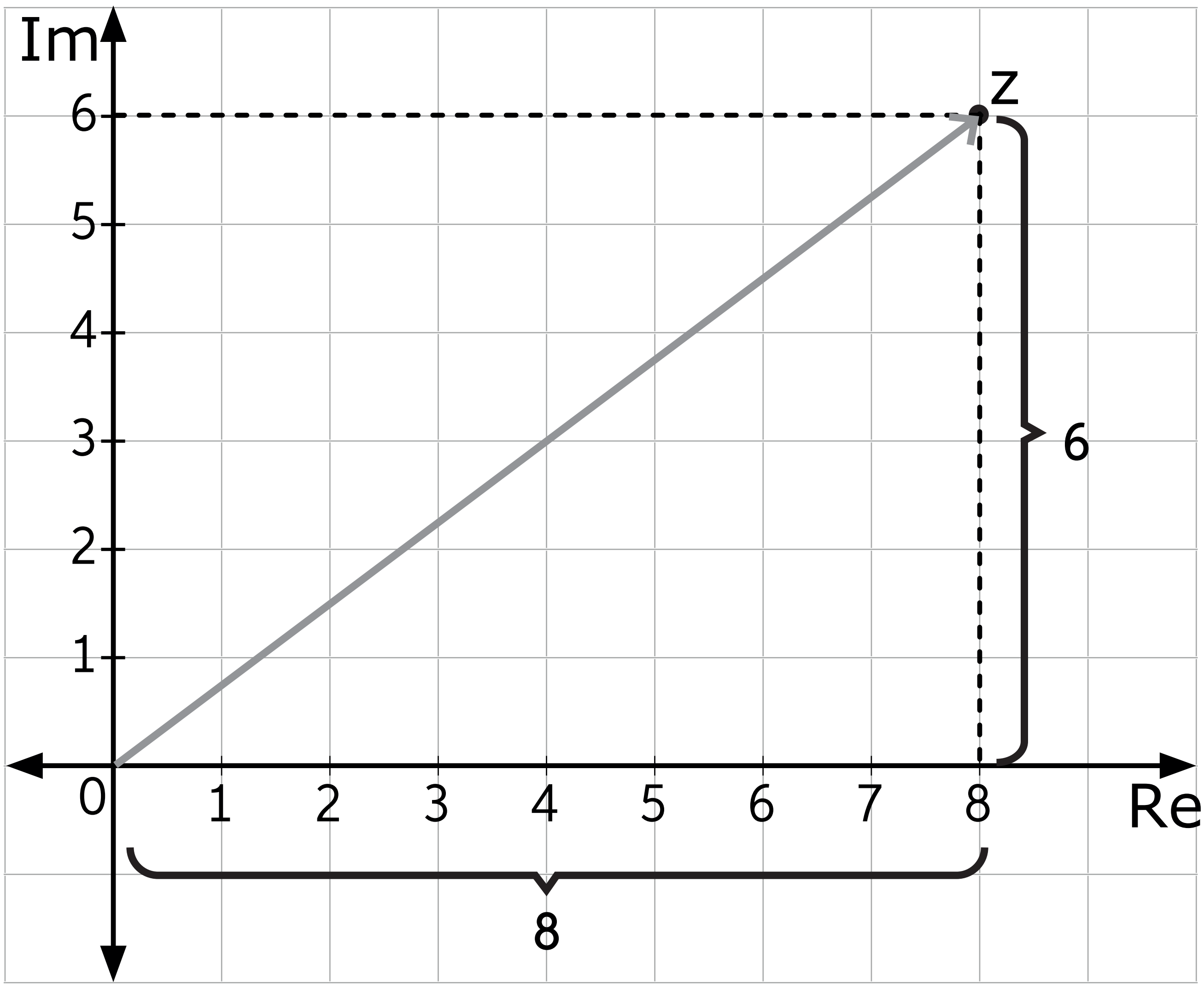
¿Qué entiendes por valor absoluto de una cantidad? Da ejemplos.

¿Qué procedimiento utilizas para calcular el módulo de un vector? Explícalo.

1. Marcela calculó correctamente el módulo del número complejo $z = 8 + 6i$. Observa su procedimiento y responde.

400

Paso 1



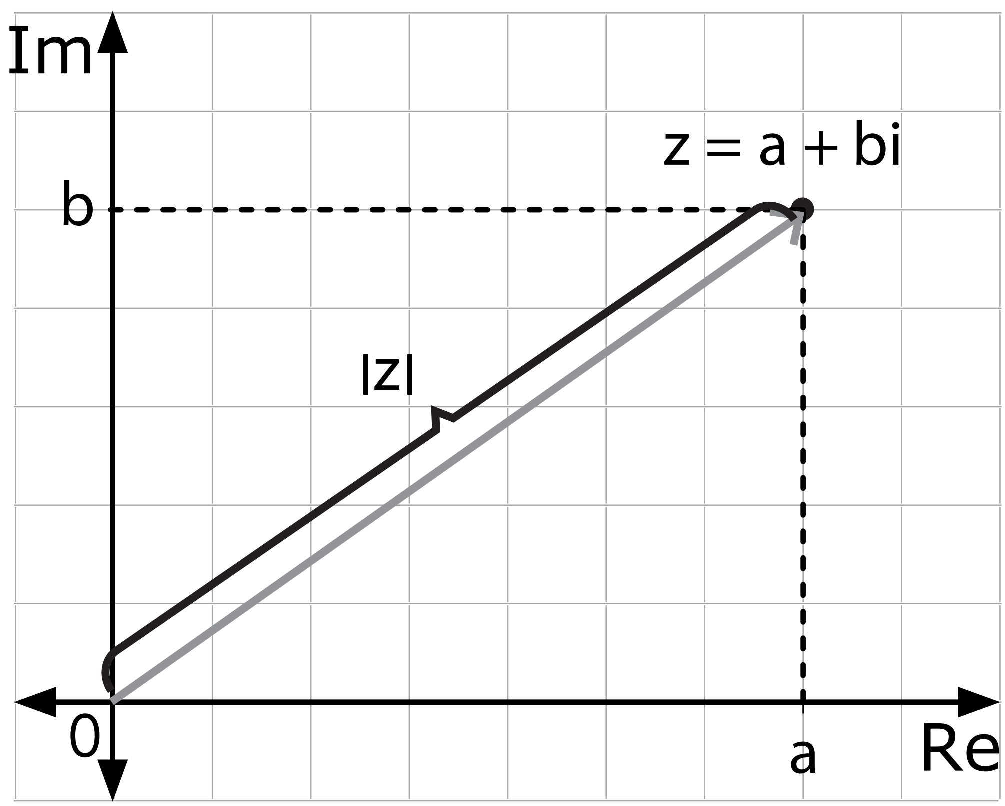
Paso 2

$|z|^2 = 8^2+6^2 \longrightarrow |z|\sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{64+36} =$
$\sqrt{100} \longrightarrow |z| = 10$

¿Qué pasos utilizó Marcela para calcular el módulo de z? Descríbelos.

▶ De lo aprendido en años anteriores, ¿qué utilizaste para responder la pregunta anterior?

El módulo de un número complejo $z = a + bi$ corresponde a la longitud de su vector asociado y se denota como $|z|$.



$$| z | = \sqrt{a^2+b^2} \leftrightarrow | z | \sqrt{Re^2(z)+Im(z)}$$

Ejemplo:

Sea $z = 1 - 2\sqrt{2}\,i$, su módulo es:

$$| z | = \sqrt{1^2 + (-2\sqrt{2}\,)^2}$$

$$| z | = \sqrt{1 + 4 \cdot 2}$$

$$| z | = \sqrt{1+8}$$

$$| z | = \sqrt{9}$$

$$|z| = 3$$

Además, se cumplen las siguientes propiedades:

- $|z| \geq 0$
- $|z| = 0 \leftrightarrow z = 0+0i$
- $|Re\ (z)| \leq |z|$
- $|Im\ (z)| \leq |z|$

Observa que $|Re(z)|$ e $|Im(z)|$ representan el valor absoluto de números reales, en cambio $|z|$ representa el módulo de un número complejo.

2. Resuelve el siguiente problema.

Dados los siguientes números complejos:
$z_1 = 3 + 7i$ y $z_2 = 3 - 7i$

a. ¿Cuál es la forma de par ordenado de cada número complejo? Escríbelos en tu cuaderno. Luego, grafícalos en el plano de Argand.

b. ¿Qué semejanzas y qué diferencias observas entre ambos números complejos? Explica.

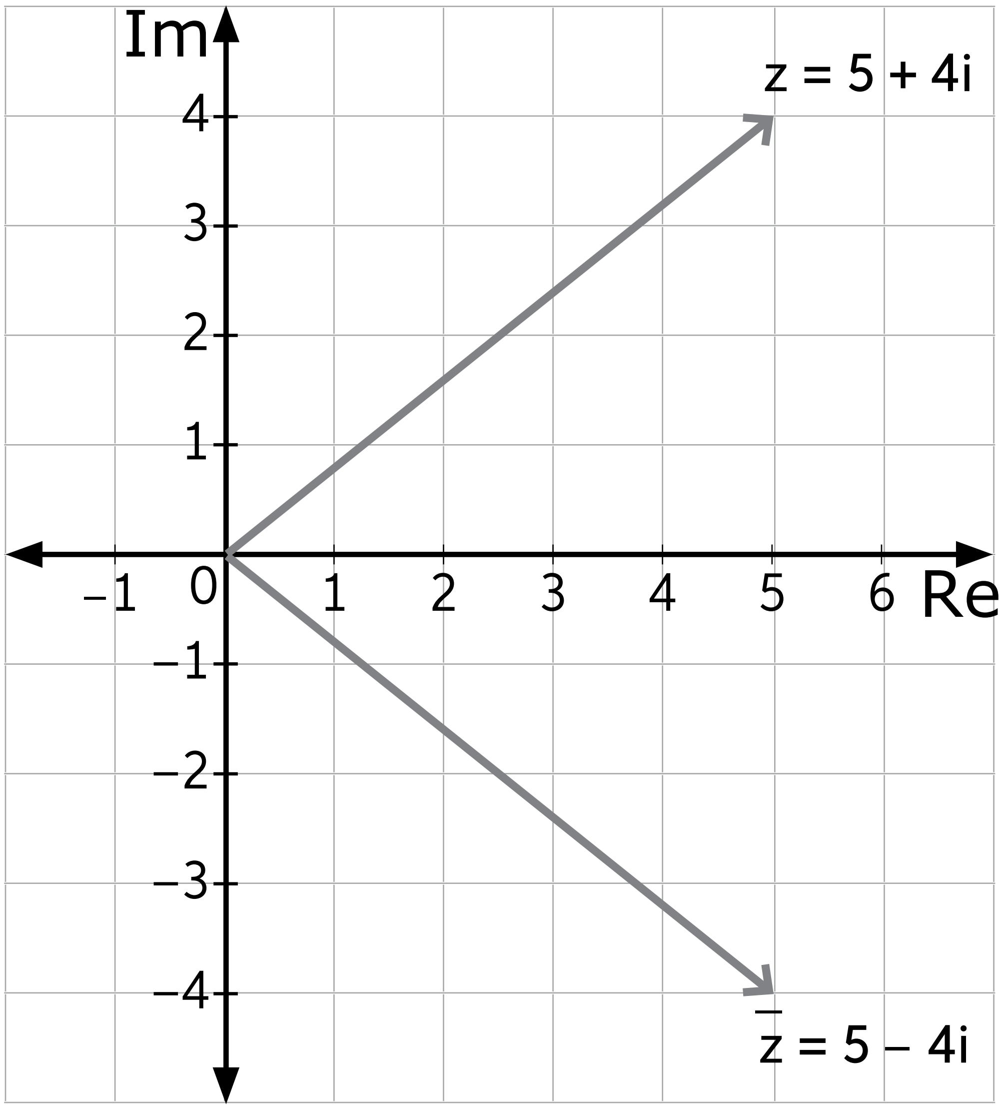
Se dice que dos números complejos son conjugados si y solo si difieren en el signo que acompaña a su parte imaginaria. El conjugado de un número complejo z se denota como z. Es decir:

$z = a + bi \leftrightarrow \overline{z} = a - bi$

$z = a - bi \leftrightarrow \overline{z} = a + bi$

Ejemplo:

Sea $z = 5 + 4i$, su conjugado es $\overline{z} = 5 - 4i$. Al representarlos en el plano de Argand, se obtiene lo siguiente:



Observa que ambos números difieren en el signo de sus partes imaginarias, pero gráficamente sus representaciones son simétricas con respecto al eje real.

Además, el conjugado de un número complejo z cumple con las siguientes propiedades:

- $| z | = | \bar{z} |$
- $z = \bar{\bar{z}}$

¿Es equivalente el conjugado de un número complejo al inverso aditivo de un número complejo? Comenta tu respuesta con tus compañeros.

¿Cuál es el conjugado de un número complejo $z=a + bi$? Escríbelo como par ordenado.

408

3. Calcula el módulo de cada número complejo.

a. $5+2i$

b. $-7+7i$

c. $2-\frac{1}{3}i$

d. $-6\ \frac{1}{2}\ i$

e. $(0, -3)$

f. $\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{10}\right)$

g. $2\sqrt{3}+2\sqrt{6}\ i$

h. $-\sqrt{5}-3\sqrt{7}\ i$

i. $\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{1}{5}}\ i$

4. Representa en GeoGebra los vectores asociados a los conjugados de los siguientes números complejos:

a. $z_1 = 5 + 5i$

b. $z_2 = -7 + i$

c. $z_3 = -3 - 2i$

d. $z_4 = 4 + \dfrac{1}{2}i$

e. $z_5 = (-3,6)$

f. $z_6 = (-6,-5)$

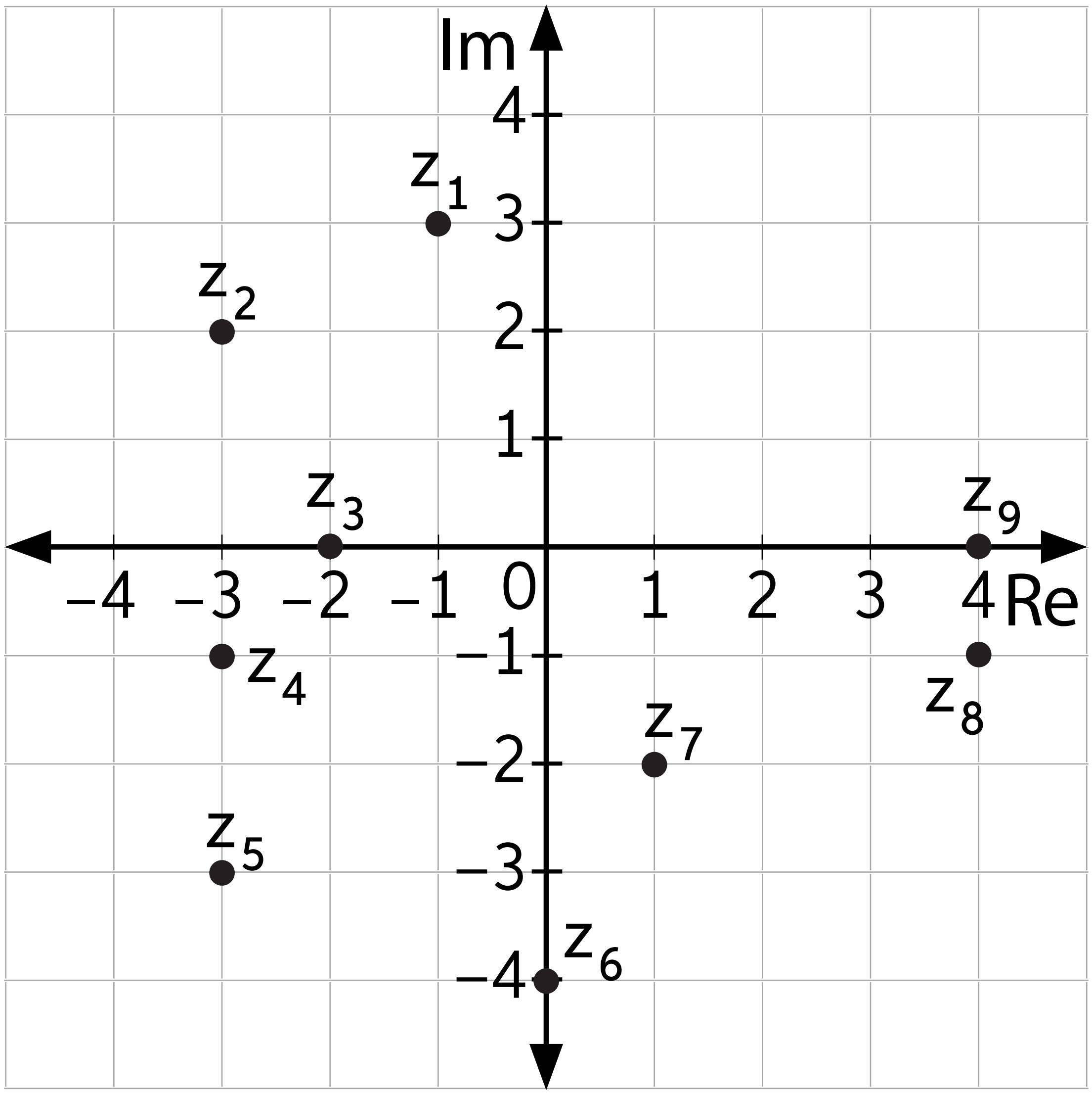
g. $z_7 = \left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$

h. $z_8 = -2 - \dfrac{1}{2}i$

5. Observa el siguiente plano de Argand y realiza las actividades.

a. Escribe cada número complejo representado de forma binomial y de par ordenado.

b. Calcula su módulo, su conjugado y el módulo de su conjugado.



6. Analiza cada afirmación e indica V si es verdadera o F si es falsa considerando $z = a + bi$. Justifica tu respuesta con un ejemplo o contraejemplo.

a. El módulo de un número complejo es siempre mayor que el módulo del conjugado del mismo número complejo.

b. Si la parte real de un número complejo es cero, el módulo equivale a su parte imaginaria.

c. Si $a = 0$, entonces el número complejo es igual a su conjugado.

d. La parte imaginaria de un número complejo z es igual a la parte imaginaria de su conjugado.

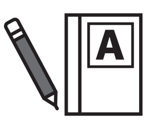
e. Si $z \neq (0, 0)$, entonces $z \neq \overline{z}$

f. Si $a = 1$ y $b = -1$, entonces $|\overline{z}| = 2$.

7. En parejas, analicen la siguiente situación. Luego, respondan. Camilo y Eliana piensan un número complejo cada uno.

Eliana: "La parte real de mi número complejo es 6".

Camilo: "La parte imaginaria de mi número complejo es -8".



148 a la 157

¿Cuáles debieran ser la parte imaginaria del número que piensa Eliana y la parte real del número que piensa Camilo para que ambos números tengan módulo igual a 10?

▶ ¿Qué estrategia utilizaron para resolver el problema anterior? Expliquen.

Para concluir

a. Explica a un compañero el procedimiento que utilizas para calcular el módulo y el conjugado de un número complejo.

b. ¿Qué nuevas estrategias de resolución de problemas aprendiste durante este tema? Compáralas y compártelas con tus compañeros.

Antes de continuar

Evaluación intermedia

Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje.

Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. Las siguientes ecuaciones tienen sus soluciones en el conjunto de los números complejos.

$x^2 - 2x + 5 = -4x$

$x^2 - 144 = 3x^2 + 144$

$6x^2 + 7x + 60 = -40 + 2x$

Resuélvelas e identifica la parte imaginaria en cada solución.

2. Expresa de una manera más simple utilizando potencias canónicas. Luego, calcula el valor de la potencia.

a. i^{96}

b. i^{185}

c. $(i^{20})^{11}$

d. $(i^{12})^{3}$

e. $(i^{25})^{7}$

f. $(i^{20})^{12}$

3. Representa en GeoGebra los conjugados de los siguientes números complejos:

a. $z_1 = -5i$

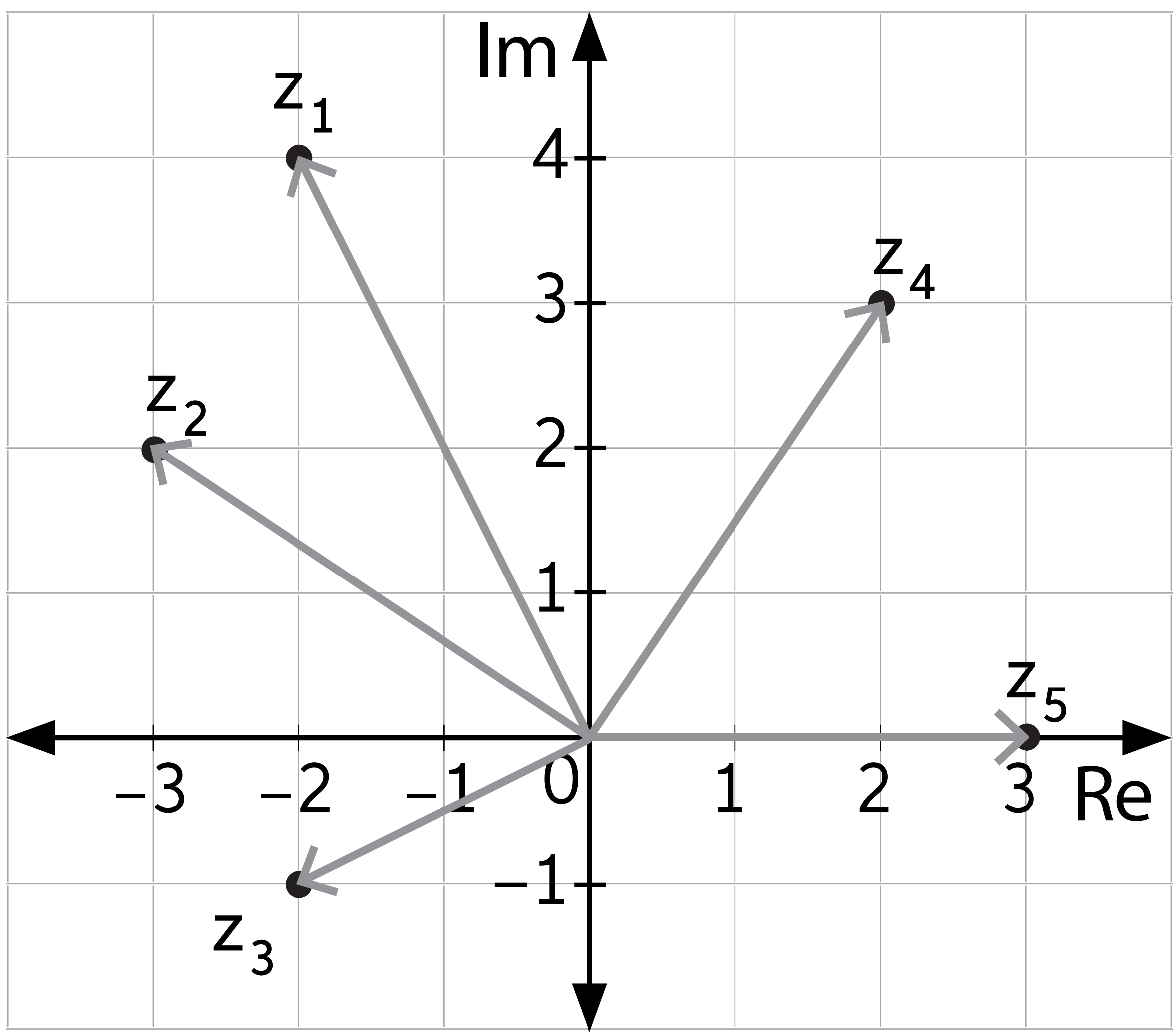
b. $z_2 = -3 - i$

c. $z_3 = -1 + 7i$

d. $z_4 = (4, 12)$

e. $z_5 = \left(2, \dfrac{3}{4}\right)$ **f.** $z_6 = \left(-5 - \dfrac{9}{2}\right)$

4. Danilo representó 5 números complejos en el plano de Argand:



a. ¿Cuál es la forma binomial de cada número complejo?

b. ¿Cuál de los números tiene mayor parte real?, ¿cuál tiene menor parte real?

c. En el plano de Argand hay dos números que tienen el mismo módulo. ¿Cómo podrías demostrar esto? Explica tu estrategia y aplícala.

5. Se tienen dos números complejos: $z_1 = 3(\sqrt{144} - n) - 2i$ y $z_2 = -4\sqrt{64} - 2i$. ¿Cuál es el valor de n si se sabe que $z_1 = z_2$?

A 158 a la 163

Reflexiono

- De los contenidos estudiantes en esta lección, ¿en cuál me siento más débil? ¿En qué contenido me siento mejor preparado?

- Planifica cómo mejorar en los contenidos más débiles

Lección

8

Resolución de problemas usando la operatoria de números complejos

Objetivo: Resolver problemas utilizando la adición y sustracción de números complejos de forma binomial y como par ordenado.

Adición y sustracción de números complejos

¿Recuerdas cómo se representa gráficamente un vector?

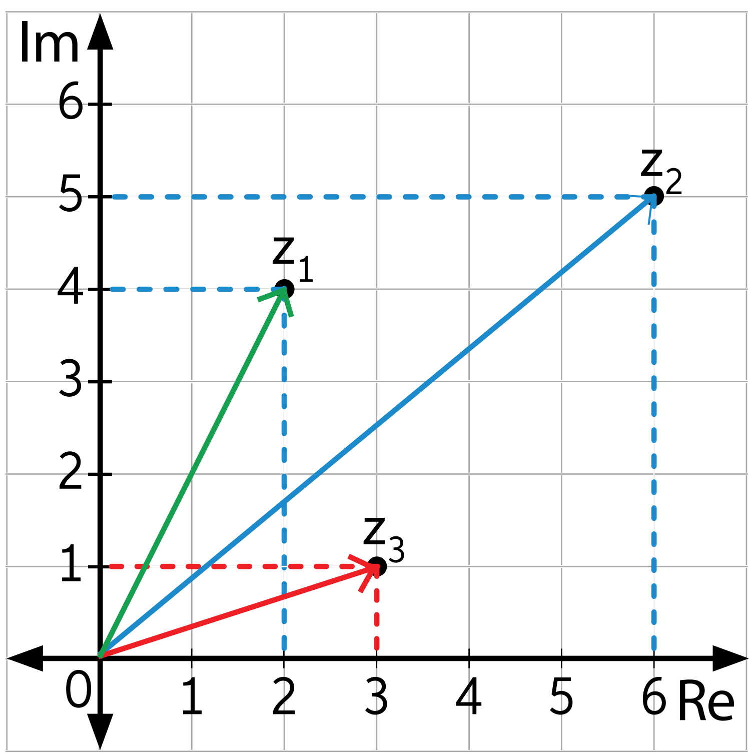
¿Qué procedimiento utilizas para sumar y restar vectores? Explica por medio de ejemplos.

1. Analiza y resuelve el siguiente problema.

Andrea ha resuelto correctamente la adición y sustracción con los siguientes números complejos:

$z_1 = 2 + 4i$ $z_2 = 6 + 5i$

$z_3 = 3 + i$



422

Calculando $z_1 + z_2$:

Datos:

z_1: $Re(z_1) = 2$ $Im\ (z_1) = 4$

z_2: $Re(z_2) = 6$ $Im\ (z_2) = 5$

	Parte real	Parte imaginaria
z_1	2	4
z_2	6	5
$z_1 + z_2$	8	9

Por lo tanto: $z_1 + z_2 = 8 + 9i$

El inverso aditivo de $z= a+bi$ es el número complejo $-z=-a - bi$.

Calculando $z_3 - z_1$:

$$z_3 - z_1 = z_3 + (-z_1)$$

Datos:

z_1: $Re(z_3) = 3$; $Im\,(z_3) = 1$

$-z_1$: $Re(-z_1) = -2$; $Im\,(-z_1) = -4$

	Parte real	Parte imaginaria
z_3	3	1
$-z_1$	-2	-4
$z_3 + (-z_1)$	1	-3

Por lo tanto: $z_3 - z_1 = 1-3i$

a. ¿Qué pasos siguió Andrea para obtener el resultado de $z_1 + z_2$? Descríbelos.

b. Observa el procedimiento que utilizó Andrea para calcular el resultado de $z_3 - z_1$. ¿En qué se diferencia del procedimiento que utilizó para calcular $z_1 + z_2$? Explica.

c. Expresa el resultado de z_1+z_2 y z_3-z_1 como par ordenado.

d. ¿Qué similitud encuentras entre el resultado obtenido en 1.c y la adición y sustracción de dos vectores? Justifica tu respuesta.

Dados dos números complejos z_1 y z_2 tales que z_1 =*a*+*bi* =*(a, b)* y z_2 =*c*+*di* = *(c, d)*, el resultado de la adición de z_1 y z_2 es un número complejo que se calcula de la siguiente manera:

Forma binomial: z_1 y z_2 = *(a + bi)* + *(c + di)* = *(a + c)* + *(b + d)i*

Par ordenado: z_1 y z_2 =*(a, b)*+*(c, d)* = *(a + c, b + d)*

Además, $z_1 - z_2 = z_1 + (- z_2)$.

Si z y w son números complejos, se cumplen las siguientes propiedades:

$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ $\quad$ $z+\overline{z} = 2Re(z)$

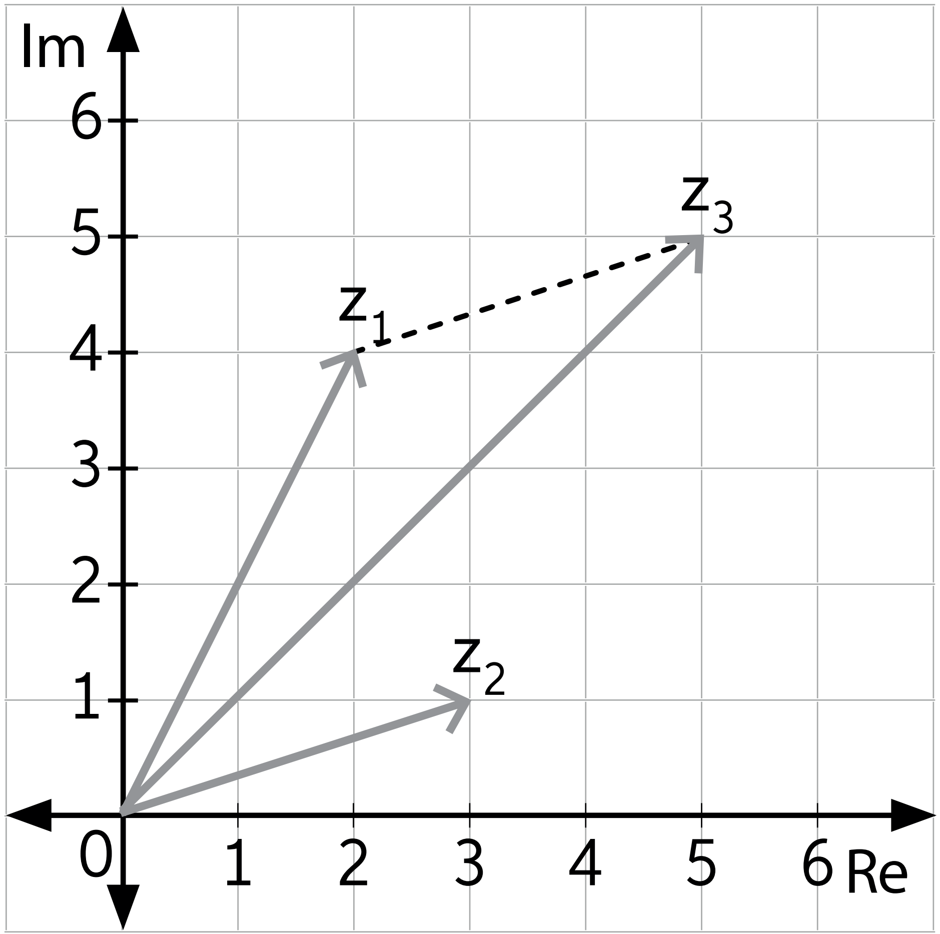
Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ son números complejos, ¿cuál es la expresión binomial de $z_1 - z_2$?

2. Analiza la situación. Luego, responde.

En el siguiente plano de Argand, z_3 representa el resultado de $z_1 + z_2$, que es $5 + 5i$. Esto equivale a trasladar el vector que representa z_2 desde el origen del plano hasta z_1 .

a. ¿Qué pasaría con la representación gráfica al restar dos números complejos? Calcula z_4 sabiendo que $z_4 = z_3 - z_1$

Representa este número complejo en el plano de Argand e interpreta lo obtenido.

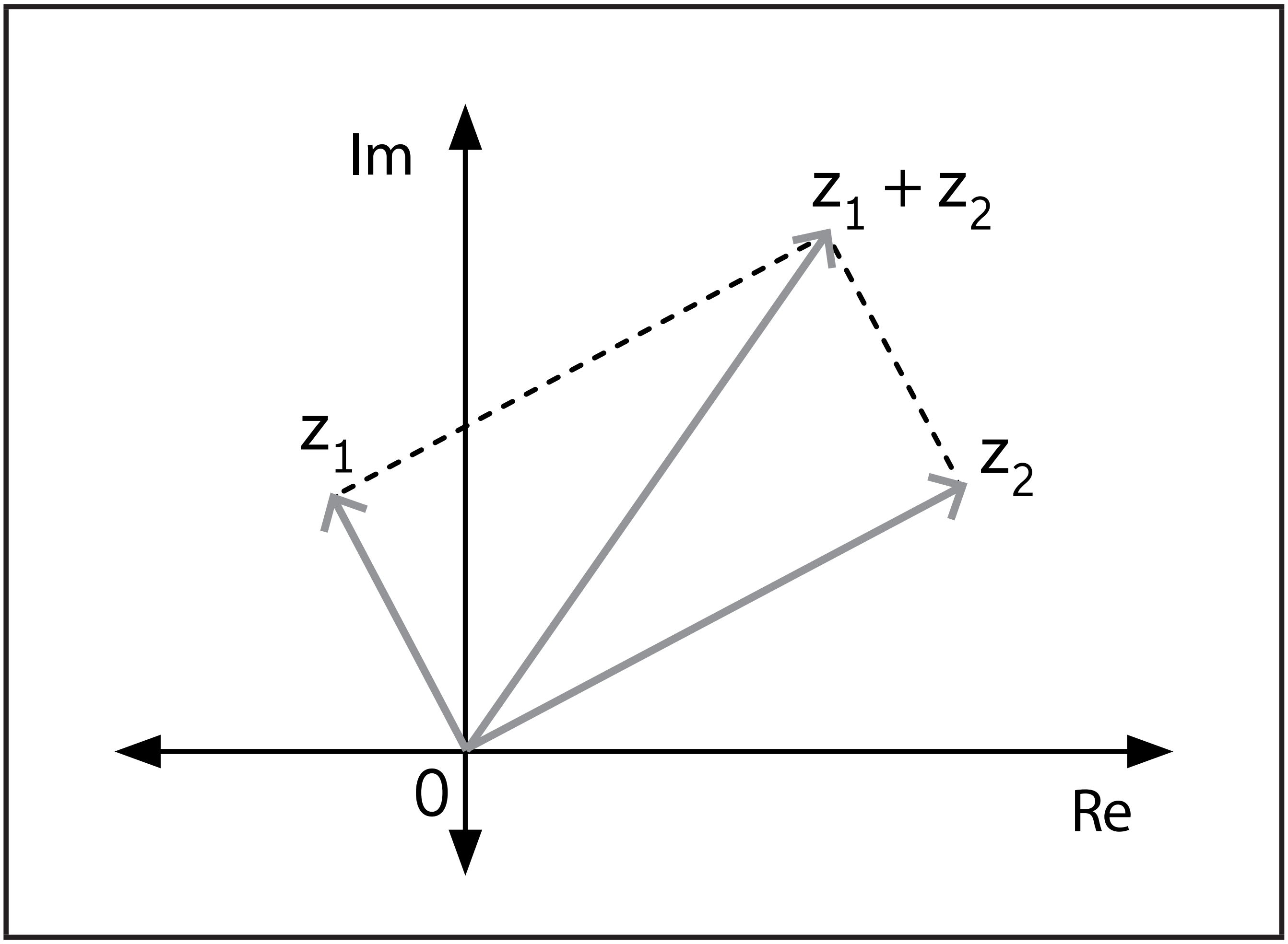


b. ¿Qué pasa con el sentido del vector que representa ? En parejas, comenten sus respuestas.

428

La adición de dos números complejos también es posible resolverla en forma geométrica utilizando la regla del paralelogramo. Observa la representación en el plano de Argand.

Dados los números complejos z_1 y z_2, el vector asociado a $z_1 + z_1$corresponde a la diagonal desde el origen del paralelogramo que forma z_1 y z_2



3. Analiza la siguiente demostración. Luego, realiza las actividades.

Sea $z = a + bi$ y $w = c + di$, se cumple que $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.

430

Paso 1: $\overline{z+w} = \overline{((a+bi)+(c+di))}$.

Paso 2: $= \overline{(a+c)+(b+d)i}$

Paso 3: $=(a + c) - (b+ d)i$

Paso 4: $=(a - bi) + (c- di)$

Paso 5: $= \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{z} + \overline{w}$.

a. Explica la demostración y compruébala otorgando valores a a, b, c y d.

b. Demuestra que z + = 2Re(z) y compara lo realizado con un compañero.

4. En parejas, realicen la actividad variando los parámetros mediante GeoGebra.

Luego, observen y analicen sus resultados con el curso.

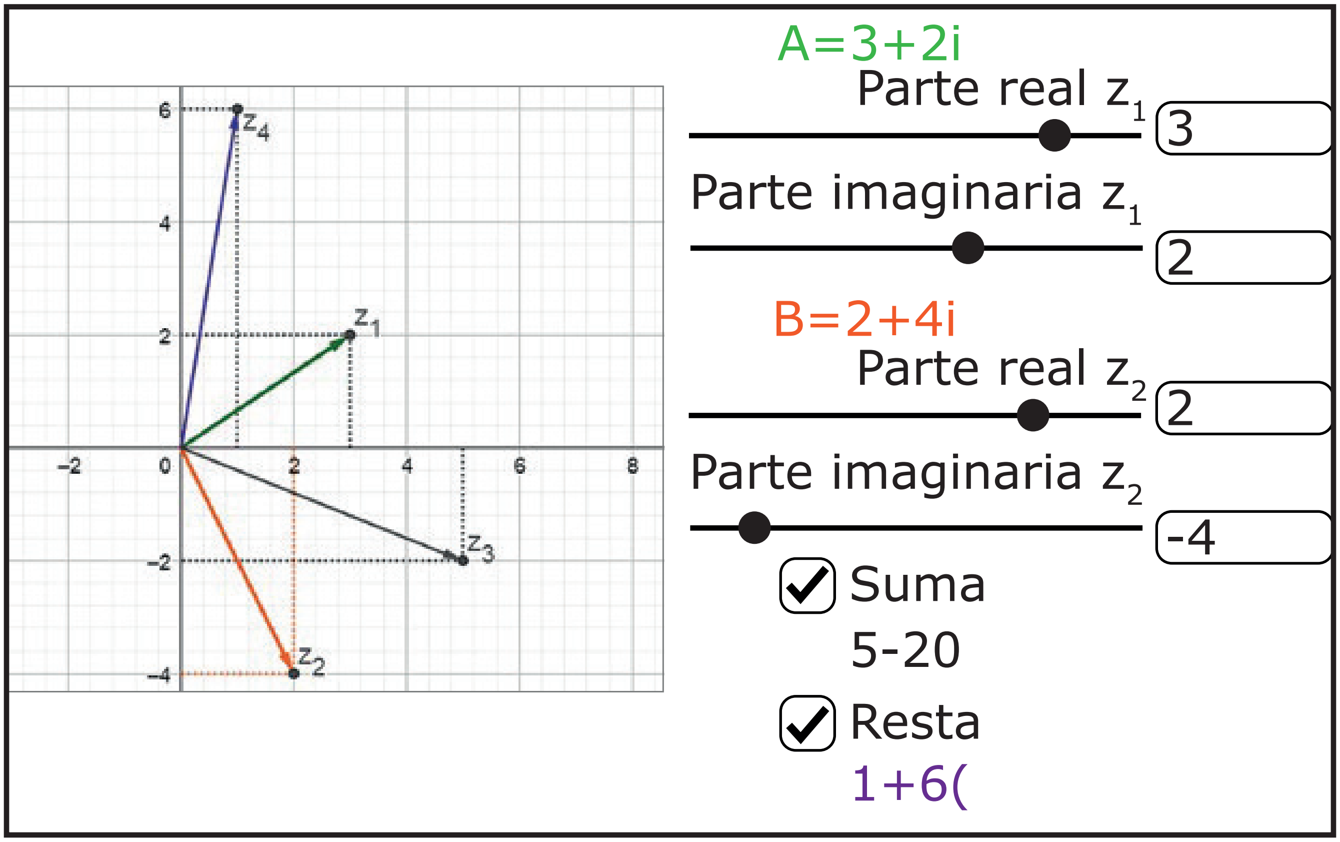
Representen gráficamente $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$, donde $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = 2 - 4i$.

Paso 1 Ingresen el código T20M3MP094A en el sitio web: www.enlacesmineduc.cl y representen z_1 y z_1.

Paso 2 Hagan clic sobre la casilla Suma, donde aparecerá z_3, que representa el resultado de $z_1 + z_2$.

432

Paso 3 Hagan clic sobre la casilla Resta para observar el vector z_4, que representa la sustracción de z_1 - z_2.



a. ¿El vector que representa z_3 corresponde efectivamente a la adición de z_1 y z_2? Compruébenlo realizando la suma algebraica.

b. ¿El vector que representa z_4 corresponde efectivamente a la sustracción de z_1 y z_2? Compruébenlo realizando la suma algebraica.

c. Modifiquen los valores de las partes reales e imaginarias de ambos números complejos mediante los deslizadores. ¿Qué pasa con z_3 y z_4 ?

d. Mantengan $z_1 = 3 + 2i$. Cambien a cero la parte real de z_2 y varíen los valores de la parte imaginaria de z_2. ¿Qué ocurre con z_3?, ¿y con z_4?

e. Si ahora el valor de la parte imaginaria de z_2 es cero y se varían los valores de la parte real de z_2, ¿qué ocurre con z_3?, ¿y con z_4? Expliquen.

f. Fijen los valores para $z_1 = 0$ y varíen los parámetros de z_2. ¿Cuáles son los valores de z_2, z_3 y z_4? ¿Qué relación encuentran entre ellos? Expliquen.

g. Repitan el paso anterior para $z_2 = 0$. Comparen los resultados de ambos casos.

164 a la 173

Para concluir

a. De las actividades realizadas durante este tema, ¿cuál te llamó más la atención?, ¿por qué? Explica.

b. ¿Qué estrategia puedes utilizar para comprobar las respuestas de las actividades realizadas en este tema? Comenta tu respuesta con un compañero.

c. ¿En cuál actividad de este tema tuviste mayor dificultad?, ¿por qué?

Multiplicación de números complejos

Objetivo: Resolver problemas mediante la multiplicación de números complejos.

¿Qué procedimiento utilizas para calcular el producto entre dos binomios? Descríbelo con tus palabras y coméntalo con un compañero.

¿Cuál es el valor de i^2?

¿Qué propiedades de la multiplicación en los números reales conoces? Explícalas con ejemplos.

1. Mirtha y Jorge desarrollan el producto de dos números complejos. Observa sus procedimientos.

Jorge: "Yo multipliqué ambos números complejos en su forma binomial."

Paso 1: $(4 + 3i) \cdot (-3 + i)$

Paso 2: $4 \cdot (-3) + 4 \cdot i + 3i \cdot (-3) + 3i^2$

Paso 3: $-12 + 4i - 9i + 3i^2$

Paso 4: $(-12 - 3) + (4i - 9i)$

Paso 5: $-15 - 5i$

Mirtha: "Yo multipliqué ambos números complejos como par ordenado."

Paso 1: $(4, 3) \cdot (-3, 1)$

Paso 2: $(4 \cdot (-3) - 3 \cdot 1, 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-3))$

Paso 3: $(-12 - 3, 4 - 9)$

Paso 4: $(-15, -5)$

a. Explica a un compañero cada uno de los pasos que realizaron Mirtha y Jorge al multiplicar ambos números complejos.

b. ¿Qué propiedades aplicaron Mirtha y Jorge en sus procedimientos?

c. Analiza el paso 3 que realizó Jorge. ¿Qué pasa con el cuadrado de la unidad imaginaria? ¿A qué conjunto numérico pertenece este resultado?

Si hubieras sido tú quien debe calcular el producto de los dos números complejos, ¿qué método habrías escogido: el de Mirtha o el de Jorge? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.

Dados z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, tal que $z_1 = a+bi = (a, b)$ y $z_2 = c+di = (c, d)$, la multiplicación de z_1 y z_2 está dada por la siguiente expresión:

Forma binomial:

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Forma de par ordenado:

$$z_1 \cdot z_2 = (a, b) \cdot (c, d) = (ac-bd, ad+bc)$$

Además, se cumplen las siguiente propiedades, con z_1 ,z_2 ,$z_1 \in \mathbb{C}$:

Clausura: $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$

Asociatividad: $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$

Neutro multiplicativo: Si a, b $\in \mathbb{R}$, entonces: $(a+bi)(x+yi)=a+bi$,

con $x+yi=1+0i = (1, 0)$.

Inverso multiplicativo: Si $z \neq 0 + 0i$, entonces $z \cdot z^{-1} = z \cdot \dfrac{1}{z}$

donde

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \left(\frac{-b}{a^{2+}b^2}\right)i = \frac{a-bi}{a^2 + b^2}$$

con $a,b \in \mathbb{R}$ y $a,b \neq 0$.

Conmutatividad: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

Distributividad: $z_1 \cdot (z_{2+} z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

2. Calcula. Considera que $z_1 = (3, 4)$, $z_2 = (-1, 3)$ y $z_3 = (2, -5)$.

a. $z_1 \cdot (-z_2)$

b. $z_3 \cdot z_1$

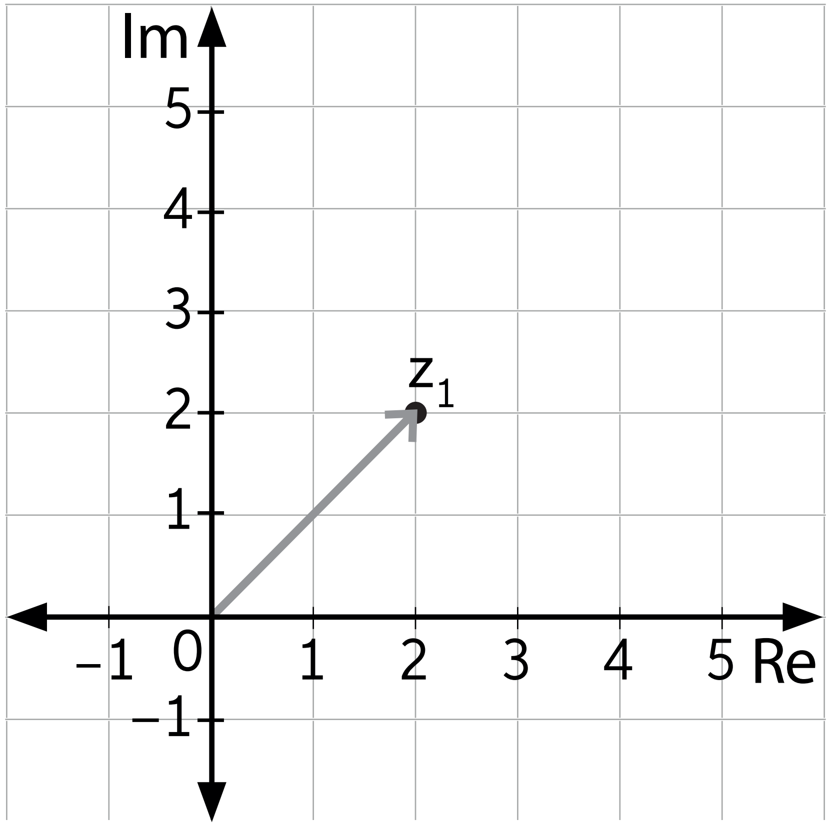
c. $-z_1 \cdot z_3$

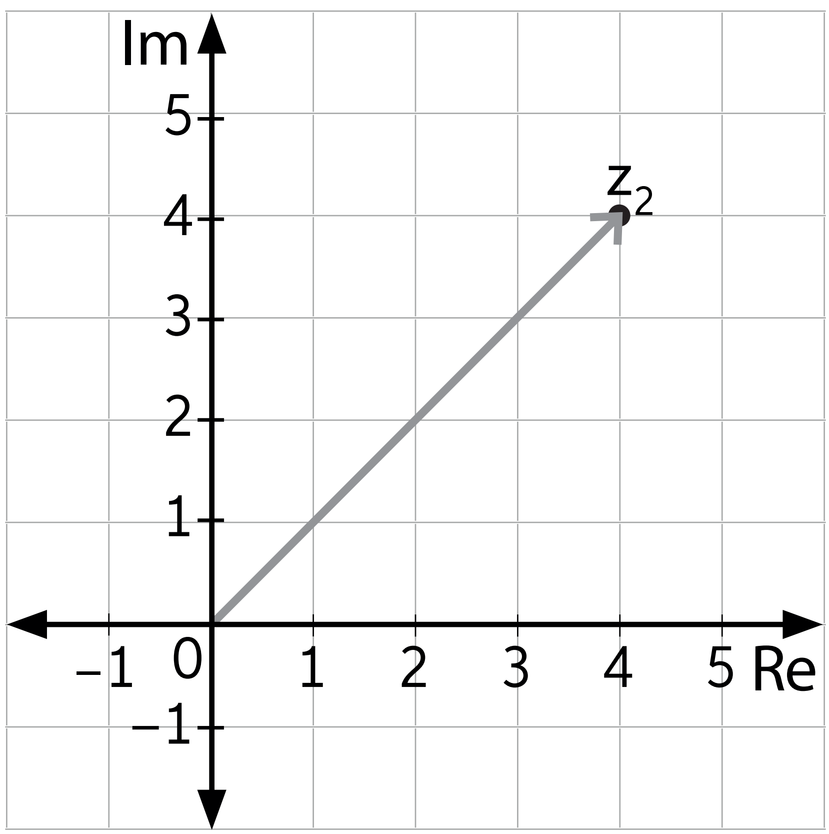
d. $-z_1 \cdot -z_2$

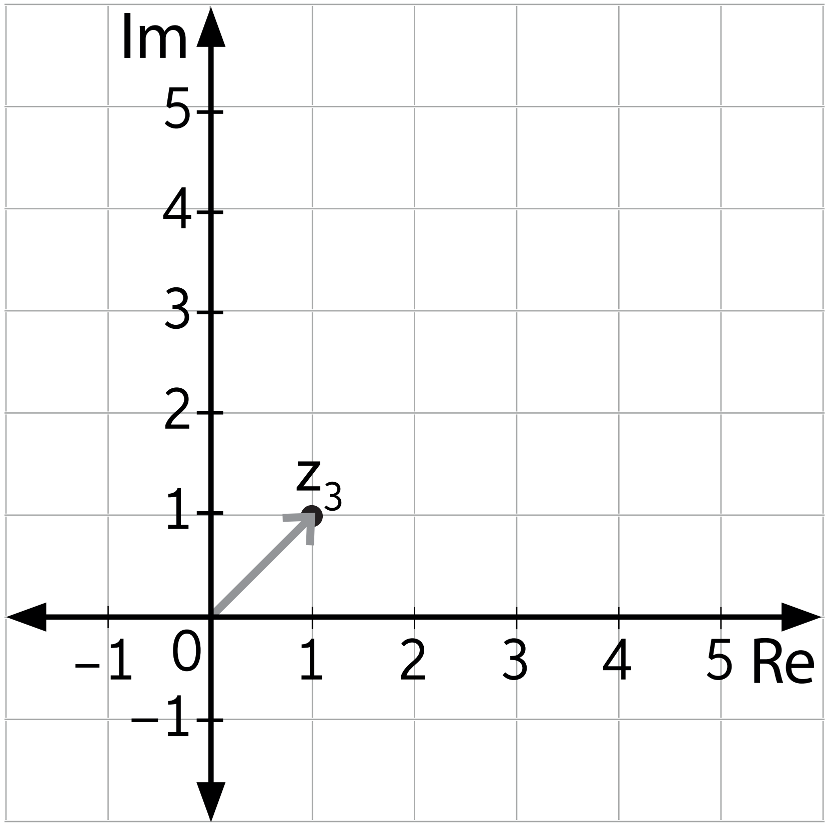
3. En parejas, analicen y resuelvan el problema. José representó en el plano de Argand los números complejos

$z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 4 + 4i$ y $z_3 = 1 + 1i$.

442







a. ¿Cuál es el módulo de los vectores asociados a z_1, z_2 y z_3 ? Calcúlenlos.

b. ¿Qué relación hay entre el módulo del vector asociado a z_1 y a z_2 ?, ¿y entre z_1 y z_3? Expliquen.

La **ponderación** de un número complejo $z = a + bi$ por uno real k es el producto de $k \cdot z \in \mathbb{C}$ y se calcula:

$$kz = k(a + bi) = k \cdot a + k \cdot bi$$

Además, se dice que el vector asociado a *kz* es una dilatación del vector asociado a *z* si $k > 1$, pues $|z|$ aumenta. Del mismo modo, se dice que el vector asociado a kz es una contracción del vector asociado a z si $0 < k < 1$, pues $|z|$ disminuye.

4. Calcula. Considera que $z_1 = -2{,}3+4i$, $z_2 = -4{,}2+0{,}3i$ y $z_3 = \left(\frac{1}{2}, 5\right)$

a. $3 \cdot (-z_1)$ **b.** $-2 \cdot (-z_1)$

c. $7 \cdot (-z_3)$

5. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

Como la unidad imaginaria *i* se representa por el par ordenado (0, 1), entonces:

$i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) =$

$(0-1,\ 0+0) = (-1,0) = -1$

Además, para un número complejo (a, b), se tiene:

$(a,\ b) = (a,\ 0) + (0,\ b) =$

$(a,\ 0) + (b,\ 0)(0,\ 1) = a + bi$

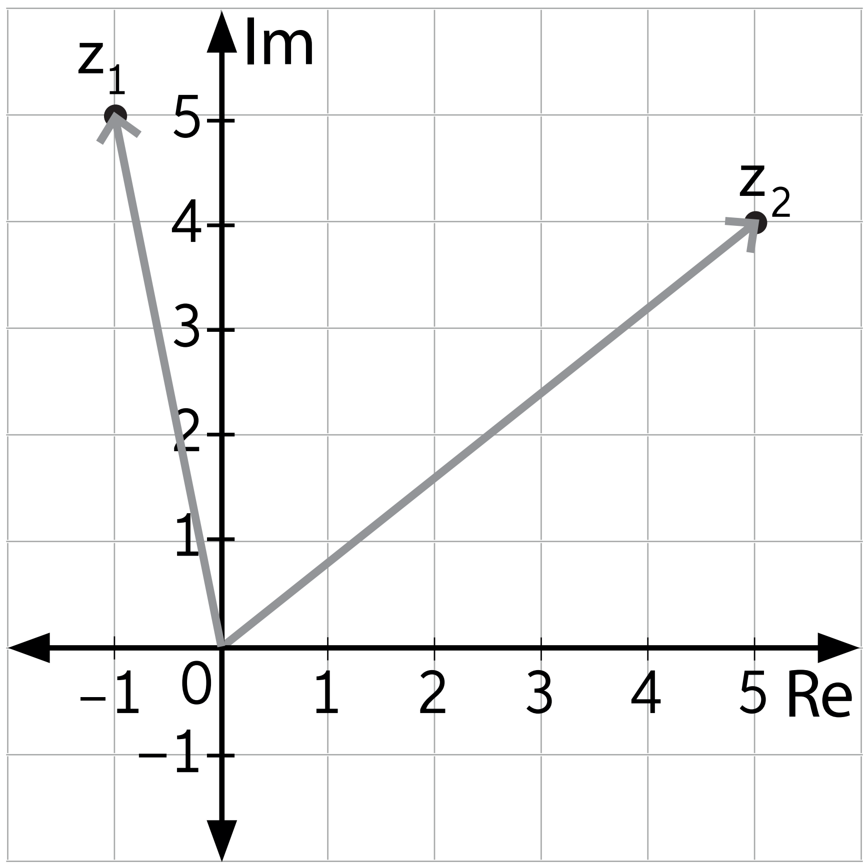
a. Demuestra que $i^3 = -i$ y que $i^4 = 1$ utilizando la información anterior.

b. Comprueba que el producto entre los números reales (p, 0) y (q, 0) es pq.

¿Qué puedes concluir respecto de la multiplicación de números reales y de la de los números complejos?

c. En parejas, comparen sus respuestas. ¿Qué estrategia utilizaron en esta actividad?

6. Analiza el siguiente gráfico. Luego, responde.



a. ¿Cuál es z_1?, ¿y z_2 ? Escríbelos de forma binomial y como par ordenado.

b. Calcula el módulo de z_1 y de z_2.

c. ¿Cuál es el resultado de $z_1 \cdot z_2$?

¿y el de $| z_1 \cdot z_2 |$? Escriban el producto entre z_1 y z_2 de forma binomial.

7. Analiza la siguiente propiedad y realiza las actividades.

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}$$

a. Describe con tus palabras en qué consiste esta propiedad.

b. Prueba que esta propiedad se cumple. Para esto, considera 2 números complejos diferentes.

8. Analiza la propiedad que dice Felipe

Felipe: "El conjugado del producto entre dos números complejos es igual al producto entre los conjugados de estos"

a. Sintetiza el enunciado por medio de una expresión algebraica.

b. En parejas, comparen sus resultados. ¿El enunciado es correcto?

¿Qué estrategia utilizarían para comprobar que la expresión algebraica que escribieron es correcta? Justifiquen.

A 174 a la 183

Para concluir

a. Describe el procedimiento que utilizas al multiplicar dos números complejos. ¿Qué debes considerar? Explica.

b. Si tuvieras que multiplicar 3 números complejos, ¿qué estrategia utilizarías?, ¿por qué?

c. ¿Qué regularidad observas al multiplicar un complejo cualquiera
a + bi por i? Explica con tus palabras.

División de números complejos

Objetivo: Resolver problemas mediante la divisiones de números complejos.

¿Cómo se calcula el conjugado de un número complejo?

¿Qué propiedades de las que se cumplen en la multiplicación de números reales no se cumplen en la división?

1. Analiza la información que entrega Marcelo. Luego, responde.

Marcelo: "La división de dos números complejos corresponde a la multiplicación entre el numerador por el inverso multiplicativo del denominador. Observa el ejemplo."

$$(2-5i):(3+4i)=\frac{2-5i}{3+4i}=(2-5i)\,(3+4i)^{-1}$$

Por definición:

$$(3+4i)^{-1}=\frac{1}{3+4i}=\frac{2-4i}{3^2+4^2}=\frac{3-4i}{9+16}=\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i$$

Luego: $\frac{2-4i}{3^2+4^2}=(2-5i)(3+4i)^{-1}=(2-5i)\left(\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)$

452

$$= \left(\frac{6}{25} - \frac{20}{25}\right) + \left(\frac{8}{25}i \;-\frac{15}{25}i\right)$$

$$= \left(\frac{6}{25} - \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{8}{25} - \frac{15}{25}\right)i$$

$$= \frac{14}{25} - \frac{3}{25}i$$

a. ¿Qué relación hay entre el inverso multiplicativo de un número y su conjugado? Explica.

b. ¿Observas otra manera de resolver la división? Comenten en parejas sus respuestas.

454

Dados z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$, tales que z_1 = a + bi = (a, b) y z_2 = c + di = (c, d), con z_2 (0, 0), la **división** entre z_1 y z_1 se puede resolver con la siguiente expresión:

$$\frac{z_1}{z_2} = (a + bi)\left(\frac{c - di}{c^2+d^2}\right) = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} =$$

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}\,i$$

Así también la expresión $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$ permite resolver la división entre dos números complejos.

Calcula el resultado de (1+ i) :(1− i). ¿Qué expresión utilizaste? ¿Por qué? Comenten en parejas sus respuestas.

2. Calcula.

a. (1+5i):(1+i)

b. (5+4i):(6−i)

c. (4−2i):(5−3i)

d. (9−i):(2−2i)

e. $\frac{2 + 3i}{3 + i} =$

f. 7 : (i − 3)

g. $(\sqrt{5} - \sqrt{9}\, i) : i$

h. (2 − 5i) : (-i)

▶ ¿Qué método utilizaste para calcular el resultado de las divisiones? ¿Por qué?

3. Reduce las siguientes expresiones hasta la parte real de cada número.

a. $\dfrac{1 + 2i}{3 - i} + \dfrac{7}{10}\,i$

b. $\dfrac{5i}{(1-i)\,(2-i)\,(3-i)}$

4. Analiza y resuelve el siguiente problema.

Darío investigó sobre la operatoria de la división de números complejos. Una de las propiedades que le llamó la atención fue la siguiente:

"El conjugado del cociente de dos números complejos es equivalente al cociente de los conjugados de esos números complejos".

a. ¿Qué expresión algebraica sintetiza el enunciado? Escríbela en tu cuaderno. Luego, desarróllala para demostrarla y explica los pasos que utilizaste.

b. Compara tu resultado con el de un compañero. ¿Llegaron a la misma expresión?

c. Comprueba el desarrollo de tu compañero otorgando valores numéricos ¿Llegas al mismo resultado?

d. Justifica por qué esta propiedad no se cumple para el divisor $z = 0 + 0i$. Comenten sus respuestas en parejas.

Física

5. Analiza la siguiente información. Luego, realiza las actividades.

Los taquiones consistirían en partículas subatómicas que hipotéticamente podrían moverse a velocidades mayores que la de la luz, denotada por la letra c, valor que en el vacío corresponde aproximadamente a 300.000 kilómetros por segundo. Estas partículas, aún no descubiertas, nacen como consecuencia del desarrollo de la teoría de la relatividad especial propuesta por Albert Einstein.

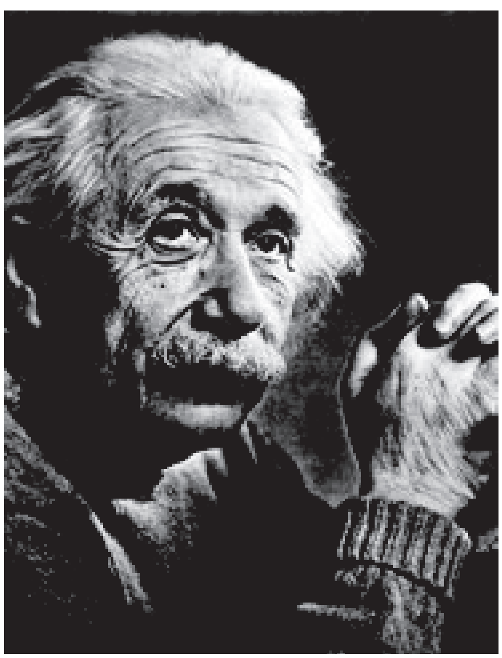
La fórmula para el cálculo de la energía cinética relativista

es $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1- \dfrac{v^2}{c^2}}}$ (con *m* la masa y *v* la velocidad), donde se observa que la expresión $\sqrt{1- \dfrac{v^2}{c^2}}$,bajo ciertas condiciones, puede llegar a convertirse en un número imaginario.

Sin embargo, para que pueda ser medida una magnitud física, debe tratarse de un número real.

Una propiedad que tendría una partícula de esas características es que, al tener una velocidad mayor que la luz, se obtendría como resultado una masa imaginaria, la cual no sería directamente medible. Así, la energía que tendría el taquión disminuiría cuando su velocidad aumenta y es cada vez más estable cuanta mayor sea su velocidad, sin tener esta un límite.

Debido a estas propiedades físicas, los científicos han tratado de encontrarlos experimentalmente, aún sin resultados.



Albert Einstein

a. ¿Cuál es el valor de la energía para valores de v = 0, 200 000 km/s y 1,5c?

b. Investiga qué es el efecto Cherenkov. Explícalo brevemente.

Actividad de aplicación ✓

Divisiones con números complejos utilizando cómic

Problema: La falta de interes en documentos curriculares y la diversidad en el aprendizaje de los estudiantes con respecto a números complejos.

¿Qué haremos? Elaborar un cómic en el que se muestre la división de números complejos.

Planifiquemos

Paso 1 Organícense en grupos. Anoten las expresiones que permiten calcular la división entre números complejos y las propiedades que se cumplen.

Paso 2 Escojan qué temática tendrá su cómic. La idea es que puedan mostrar situaciones en un contexto novedoso y atractivo, en que se utilice el cálculo de divisiones de números complejos.

Algunas temáticas pueden ser:

- Historia de terror
- Misterio
- Ciencia ficción
- Cuento
- Chiste
- Fantasía

Luego, respondan: ¿qué materiales necesitan para elaborar su cómic?

Ejecutemos

Paso 3 Definan el rol de cada integrante del equipo en la elaboración del cómic.

- Creación del guión.
- Dibujante.
- Pintado y diseño.

Presentemos

Paso 4 Presenten su cómic al curso. Realicen una introducción en la que expliquen de qué se trata la historia que refleja.

Paso 5 Luego de cada presentación, respondan:

- ¿En qué situaciones concretas se vio el cálculo con números complejos?
- ¿Qué estrategia de cálculo se utilizó en el cómic? ¿Podrían haber utilizado otra?
- ¿En qué los ayudó esta actividad para el estudio de operaciones con números complejos?

A 184 a la 192

Para concluir

a. Da dos ejemplos en los que se utilice la división de números complejos y calcúlala. Luego, explícaselos a un compañero.

b. De las actividades realizadas en este tema, ¿cuál fue la que más te llamó la atención?, ¿por qué?

c. ¿Qué dificultades presentaste durante el desarrollo de las actividades de este tema?, ¿qué hiciste al respecto?

Antes de continuar

Evaluación intermedia

Realiza las siguientes actividades para saber cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. En el plano de Argand están representados los números complejos z_1, z_2 y z_3 . Calcula lo pedido.

a. La suma entre z_1 y z_3.

b. La diferencia entre z_3 y z_2.

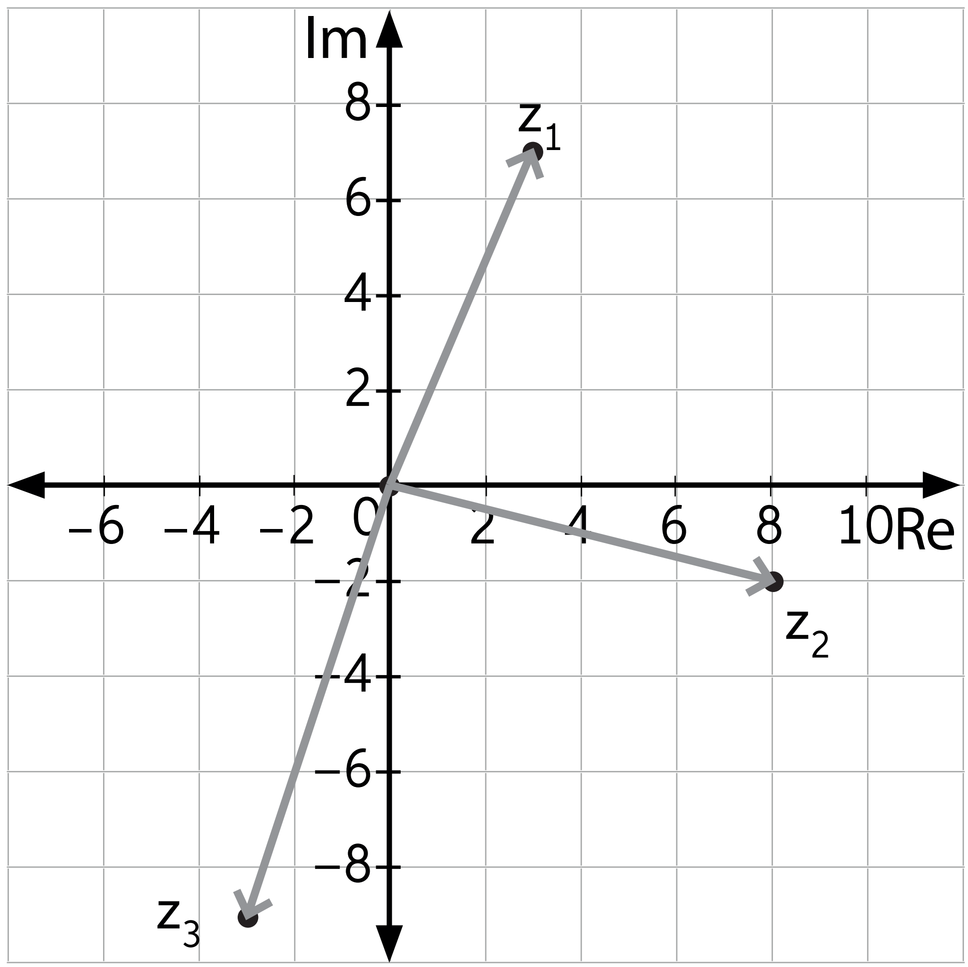
c. El cociente entre la suma del triple de z_1 y el doble de z_3 y el conjugado de z_2.

d. El producto entre el inverso aditivo del doble de z_3 y la cuarta parte de z_1.

e. El producto de z_1 y el conjugado de z_2.

f. La diferencia entre el inverso multiplicativo de z_3 y el conjugado de z_1.

g. El conjugado de la diferencia entre el conjugado de z_1 y el conjugado de z_2.



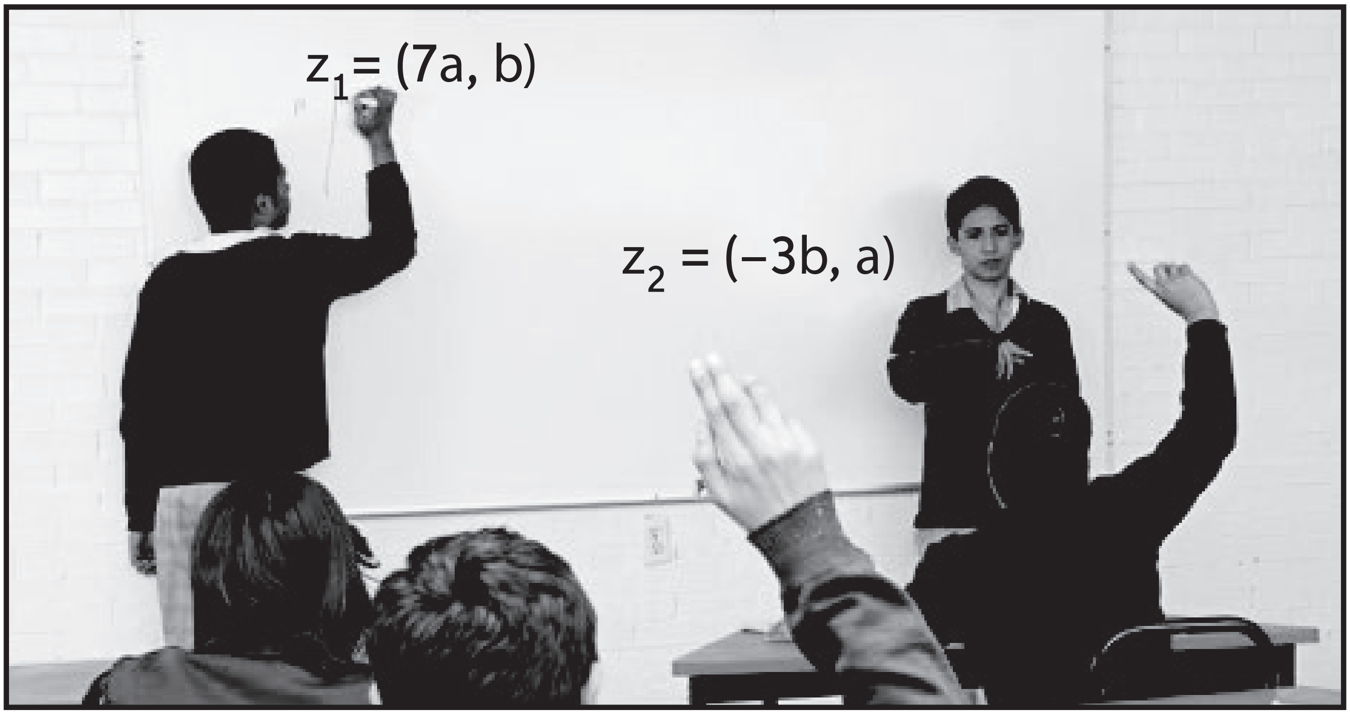
2. Escribe 4 números complejos diferentes. Luego, representa en GeoGebra:

a. El conjugado de cada número complejo.

b. El vector que representa dos operaciones diferentes utilizando los 4 números complejos.

3. Resuelve el siguiente problema.

Cristian y Sebastián escriben dos números complejos en términos de *a* y *b*.



a. ¿Qué valores deben tener a y b para que $z_1 + z_2 = (2, 5)$?

b. ¿Qué estrategia utilizaste para resolver el problema? Explica.

193 a la 197

Reflexiono

- ¿Qué conceptos de la Lección entendiste bien? ¿Cómo lo podrías evidenciar?
- ¿Qué conceptos debes reforzar? Realiza un listado y vuelve a las páginas correspondientes para analizar los contenido que debes reforzar.

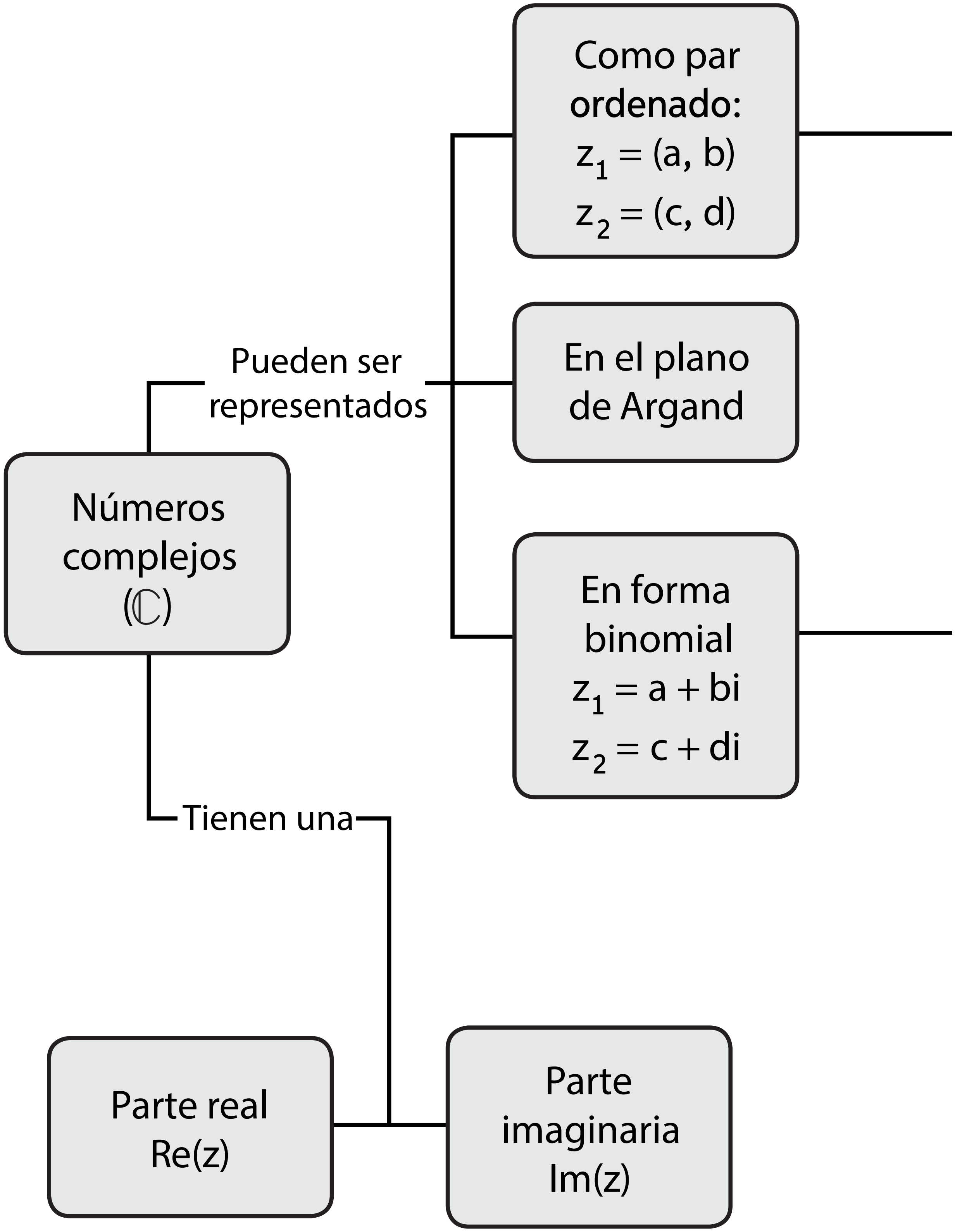
SÍNTESIS

Lee atentamente la información y realiza lo pedido.

¿QUÉ ES UN MAPA CONCEPTUAL?

Un mapa conceptual es un organizador visual cuya función básica es la clasificación jerárquica de cierta información. Parte del dato más general, desciende de forma progresiva en niveles con contenido más específico y con un mismo valor jerárquico, y finaliza con un ejemplo para cada criterio.

A continuación, se presenta un mapa conceptual con algunos de los conceptos estudiados a lo largo de la Unidad.


Números complejos (ℂ)
Pueden ser representados
Como par ordenado:
$z_1 = (a, b)$
$z_2 = (c, d)$
En el plano de Argand
En forma binomial
$z_1 = a + bi$
$z_2 = c + di$
Tienen una
Parte real Re(z)
Parte imaginaria Im(z)

Y operan

Adición:
$$z_1 + z_2 = (a + c,\ b + d)$$

Multiplicación:
$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd,\ ad + bc)$$

División:
$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)$$

Y operan

Adición:
$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

Multiplicación:
$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

División:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}i$$

Ahora, hazlo tú

1. Escoge una lección de la Unidad y sintetiza lo estudiado mediante un mapa conceptual.

2. Comparte con tu curso el mapa conceptual que elaboraste y responde:

- ¿Qué aspecto consideró cada uno para su creación?
- ¿Qué diferencias y semejanzas hay entre los mapas conceptuales?

Repaso

Realiza las siguientes actividades.

Lección 7: El conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$)

1. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a. $-x - 16 = 0$.

b. $x^2 + 121 = 0$

c. $x^2 = 81$

2. Identifica la parte real e imaginaria de los siguientes números complejos:

a. $z_1 = 5 - 4i$

b. $x^2 = -8 + 0{,}4i$

c. $z_3 = -17i$

d. $z_4 = -31$

3. Calcula el valor de las siguientes potencias:

a. i^9

b. $i^{25} \cdot i^{55} \cdot i^{32}$

c. $((-i^3))^7$

d. $(((i)^4)^3)^2$

4. Representa en GeoGebra el vector determinado por los números complejos dados. Luego, escríbelos como par ordenado.

a. $z_1 = 3 - 5i$

b. $z_2 = -4 + 2i$

c. $z_3 = 6 - 5i$

d. $z_4 = -2 - 3i$

5. Determina el conjugado y el módulo de cada uno de los siguientes números complejos:

a. $z_1 = (5, -3)$ **b.** $z_2 = -6 + 7i$

c. $z_3 = 2 - 4i$. **d.** $z_4 = (-12, 8)$

Lección 8: Resolución de problemas usando la operatoria de números complejos

6. Resuelve.

a. $(2, 4) + (3, -1)$

b. $(1 + 7i) + (-5 + 2i)$

c. $(4 + 5i) - (-4 + 2i) + (3 - 10i)$

d. $(-3 + 11i) - (-4 - 3i)$

e. $(2, 8)\ (-3, 4)$

f. $(-2, -2) : (-4, 6)$

7. Resuelve considerando que

$z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = -4 + 2i$, $z_3 = 8 - 4i$ y $z_4 = -7 - 5i$.

a. $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$

b. $z_1 \cdot z_2 + z_3 \cdot z_4$

c. $\left(\left|z_3 - \overline{z_4}\right|\right)$

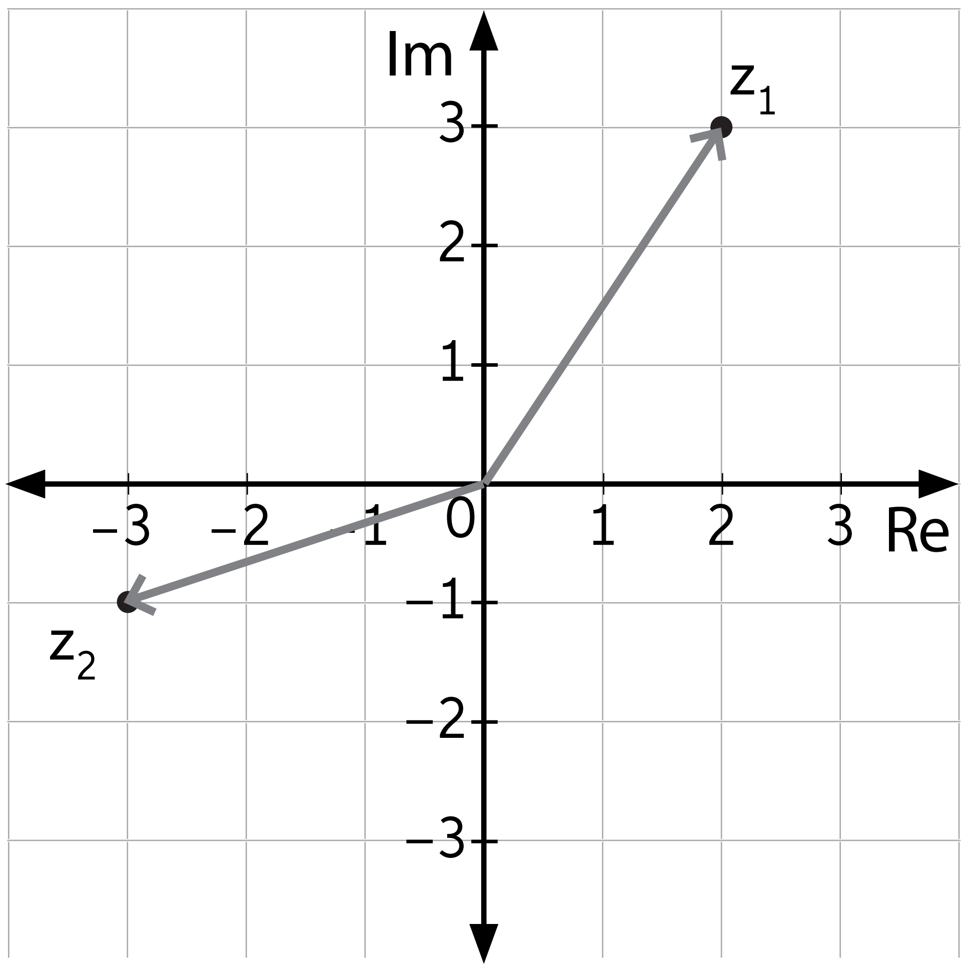
d. $\dfrac{z_3 - z_4}{z_1} - \dfrac{z_3 - z_4}{z_1}$

e. $\dfrac{z_3 + z_4 - z_1}{|z_2|}$

f. $\left|\dfrac{z_1 + z_2}{z_4}\right| - \left(\overline{\dfrac{z_3 - z_4}{z_1}}\right)$

8. Resuelve el siguiente problema:

Raúl representó z_1 y z_2 en el plano de Argand.



a. ¿Cuál es la forma binomial y de par ordenado del resultado de $z_1 \cdot z_2$?

b. ¿Cuál es el valor de $|z_1 + z_2|$?

c. ¿Cuál es valor de $|\overline{z_1 - z_2}|$?

d. ¿Es correcto afirmar que $z_1 : z_2$ equivalente a $\frac{3}{10} + \frac{11}{10}$ Justifica.

¿QUÉ APRENDÍ?

Realiza las siguientes actividades para que sepas lo que aprendiste durante esta Unidad. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexiono.

1. Representa cada número complejo en su forma binomial o como par ordenado según corresponda.

a. $8 + 4i$

b. $(2, -9)$

c. $6i$

d. $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{2}{5}\right)$

e. $-3 - 11i$

f. $(6,5)$

g. $0{,}5i$

h. $\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}i$

i. $4{,}5 - 7i$

j. $(-7, -12)$

k. 14

l. $\left(\dfrac{1}{9}, 5\right)$

2. Escribe tres números complejos distintos que cumplan con las condiciones dadas.

a. Su parte real es un número natural y su parte imaginaria es un entero negativo.

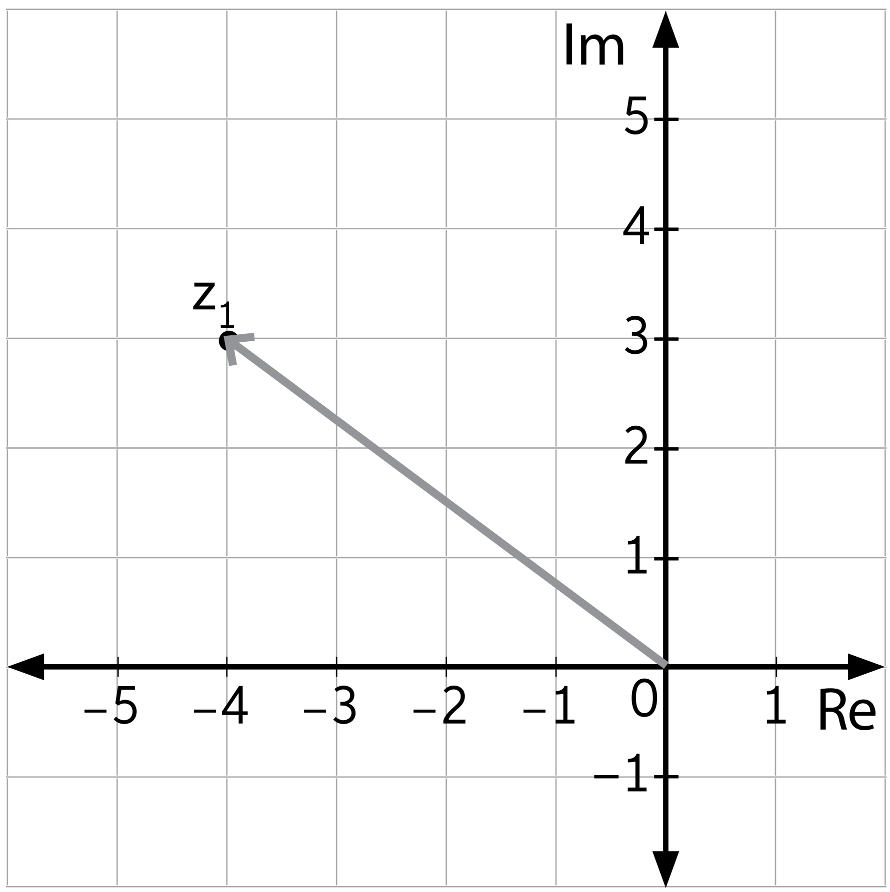
b. Su parte real es cero y su parte imaginaria real es mayor que –6.

c. Su parte real es múltiplo de cinco y su parte imaginaria es un número par.

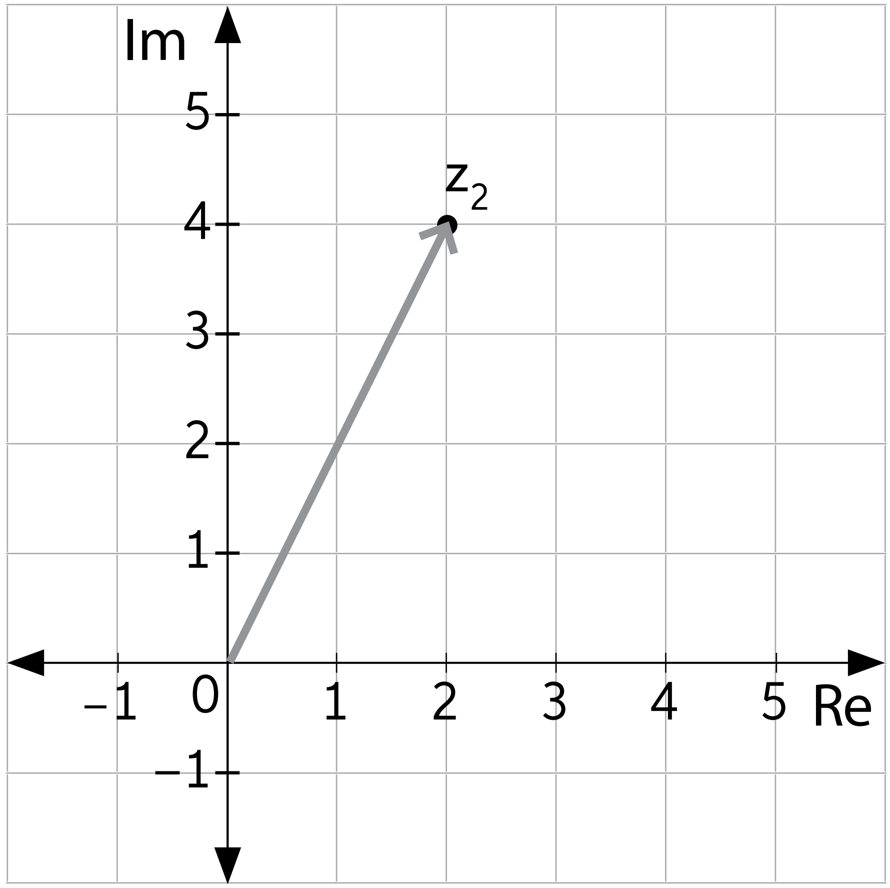
d. Su parte real es la mitad de su parte imaginaria.

3. Identifica el número complejo representado. Luego, calcula su módulo y su conjugado.

a.



b.



4. Indica en qué cuadrante del plano de Argand se encuentra cada número complejo. Luego, calcula su módulo.

a. $z_1 = 1 - i$ **b.** $z_2 = 3 + 7i$

c. $z_3 = 8 - 2i$ **d.** $z_4 = -7 + 9i$

e. $z_5 = 7 - 8i$ **f.** $z_6 = 2 + 5i$

5. Calcula el inverso del conjugado de los siguientes números complejos:

a. $z_1 = 2 - 3i$ **b.** $z_2 = 5 + i$
c. $z_3 = -4 - 2i$ **d.** $z_4 = 6 - 6i$
e. $z_5 = 9 - 8i$ **f.** $z_6 = 5i$

6. Calcula el resultado de las siguientes operaciones. Considera

$z_1 = -3 + 3i$, $z_2 = -2 + 4i$, $z_3 = 1 + i$ y $z_4 = 3 - 2i$. Luego, identifica sus partes real e imaginaria.

a. $z_1 + z_2$

b. $z_2 - z_3$

c. $z_1 - (z_2 - z_4) - z_3$

d. $z_4 + z_3 - z_2$

e. $z_1 - z_2 - z_4 - z_4$

f. $z_4 - z_3 + z_2$

7. Representa de forma binomial el resultado de las siguientes operaciones. Considera

$z_1 = -3 + 3i, z_2 = -2 + 4i$, $z_3 = 1 + i$ y $z_4 = 3 - 2i$.

Luego identifica sus partes real e imaginaria.

a. $z_1 : z_2$

b. $z_3 : z_4$

c. $z_3 : z_1$

d. $z_2 : z_3$

e. $z_1 \cdot z_2 : z_3 : z_4$

f. $z_4 : z_3 + z_1 \cdot z_2$

8. Analiza y resuelve el siguiente problema.

Fernando desarrolló el siguiente ejercicio en su cuaderno:

$$(4 - 5i)\cdot(7 - 6i) = 28 - 24i - 35i - 30i^2$$
$$= 28 - 24\cdot(-1) - 35\cdot(-1) - 30\cdot\sqrt{1}\ i$$
$$= 28 + 24 + 35 - 30i$$
$$= 87 - 30i$$

a. ¿Cuáles fueron los errores que cometió Fernando? Explica.

b. Resuelve correctamente el ejercicio.

9. Determina en cada caso un número complejo z que cumpla con la condición pedida por cada estudiante.

490

Ariel: $|z| = \dfrac{|\overline{z}|}{|\overline{z}|} = |1 - z|$

Paula: $z^{-1}+2(\overline{z})^{-1}=1+i$

Reflexiono

- Con respecto a tu desempeño en esta evaluación, ¿cuáles fueron tus fortalezas y debilidades en esta Unidad?

- De las actividades que realizaste, ¿en cuál(es) tuviste más dificultades?, ¿qué hiciste al respecto?

GLOSARIO 3° MEDIO

A

Ángulo del centro: en una circunferencia, ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia.

Ángulo exterior: en una circunferencia, ángulo cuyo vértice se encuentra en el exterior de la circunferencia y cuyos lados son rectas secantes o tangentes.

Ángulo inscrito: en una circunferencia, ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son cuerdas.

Ángulo interior: en una circunferencia, ángulo cuyo vértice se encuentra al interior de la circunferencia.

Ángulo semiinscrito: en una circunferencia, ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia, uno de sus lados es tangente en dicho punto y el otro lado es una cuerda.

Arco: parte de una circunferencia. Se nombra por sus puntos extremos en sentido antihorario.

Asíntota: recta a la que se aproxima indefinidamente la gráfica de una función sin intersecarse nunca con ella.

C

Coeficiente de variación: cociente entre la desviación estándar de un conjunto de datos y su media aritmética. Permite realizar comparaciones entre distribuciones distintas respecto de la dispersión de sus datos e incluso entre variables que se miden con diferentes unidades de medida.

Cuartil: valores que dividen las mediciones realizadas en cuatro partes con aproximadamente igual cantidad de datos.

Cuerda: segmento cuyos extremos pertenecen a una circunferencia.

D

Demostración: secuencia lógica basada en definiciones, postulados o axiomas y teoremas que permite determinar nuevos resultados matemáticos.

Diagrama de árbol: representación gráfica que muestra todas las posibles combinaciones o resultados de un experimento (espacio muestral).

Diagrama de Venn: diagrama que representa conjuntos y las relaciones entre ellos.

Dominio: conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente de una función.

E

e o número de Euler: número irracional cuyo valor es e = 2,7182818...

Ecuación logarítmica: ecuación cuya incógnita se encuentra en el argumento de un logaritmo.

Equiprobables: experimento en que los resultados tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Espacio muestral: conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Se representa con el símbolo Ω .

Evento o suceso: conjunto de algunos resultados posibles de un experimento aleatorio. Por ejemplo, en el experimento "lanzar una moneda y que al caer, salga cara", el evento es "que salga cara".

Eventos dependientes: eventos tales que la ocurrencia de uno de ellos afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.

Eventos independientes: eventos tales que la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad del otro.

Experimento aleatorio: experimento que depende del azar, es decir, no se puede asegurar cierto resultado aunque se repita bajo las mismas condiciones.

F

Función: relación entre elementos de dos conjuntos A y B, tal que a cada elemento del conjunto A le corresponde un único elemento de B.

Función creciente: función cuyos valores aumentan a medida que los valores de su dominio crecen.

Función decreciente: función cuyos valores disminuyen a medida que los de su dominio crecen.

Función exponencial: función cuya variable independiente se encuentra en el exponente de una potencia de la forma f(x)= + c

Función logarítmica: función cuya variable independiente se encuentra en el argumento de un logaritmo, de la forma f(x) = (x) + c.

H

Heterogéneo: en un conjunto de datos, se refiere a que ellos son muy distintos entre sí.

Histograma: representación gráfica de una variable continua o discreta que está agrupada en intervalos.

Homogéneo: en un conjunto de datos, se refiere a que ellos son similares entre sí.

L

Lados correspondientes: lados que se ubican en la misma posición relativa a dos o más polígonos.

Lados homólogos: par de lados de dos polígonos semejantes, cuya razón es igual a la razón de semejanza.

Logaritmo: exponente al que se debe elevar una base para obtener un número dado, llamado argumento.

Logaritmo natural: logaritmo cuya base corresponde al número e.

M

Marca de clase: corresponde al promedio entre el límite inferior y el superior de un intervalo. Por ejemplo, la marca de clase del intervalo [3, 6] es 4,5.

Media aritmética: medida de tendencia central que corresponde al promedio de un conjunto de datos.

Mediana: medida de tendencia central que corresponde al dato que ocupa el lugar central de una muestra de datos ordenados. Si la cantidad de datos es par, se considera el promedio de los dos valores centrales.

Medida angular de un arco: medida del ángulo del centro que subtiende un arco dado.

Medidas de dispersión: valores que indican la proximidad entre sí o respecto del promedio de los datos de un conjunto.

Medidas de tendencia central: valores en torno a los cuales suelen agruparse los datos de un conjunto. Corresponden a la media, la mediana y la moda.

N

Número complejo: toda expresión que se pueda escribir de la forma $z = a + bi$, donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria.

Números reales: conjunto que tiene todos los números racionales e irracionales. Se simboliza por medio de la letra R.

P

Parámetros: valores que definen una expresión determinada. En el caso de las funciones, corresponden a sus coeficientes y términos.

Plano de Argand: es un plano similar al cartesiano. El eje horizontal representa las partes reales de un número complejo y el eje vertical, las partes imaginarias.

Probabilidad condicional P(B/A): probabilidad de que ocurra un suceso B, dado que ocurrió otro A.

R

Rango: medida de dispersión que corresponde a la diferencia entre los valores máximo y mínimo de un conjunto de datos.

Regla de Laplace: forma de calcular la probabilidad de un evento con un espacio muestral finito (asumiendo que los resultados posibles o eventos simples son equiprobables), obteniendo el cociente entre los casos favorables y los casos totales del experimento aleatorio.

S

Secante a una circunferencia: recta que se interseca con una circunferencia en dos puntos.

T

Tangente a una circunferencia: recta que se interseca con una circunferencia en un solo punto de ella. Además, es perpendicular en dicho punto al radio de ella.

Teorema: proposición demostrada que afirma el cumplimiento de una tesis a partir de las condiciones dadas en una hipótesis.

V

Variable dependiente: variable cuyo valor depende del valor de otra u otras variables. Por ejemplo, el monto a pagar (variable dependiente) en una cuenta de luz depende de los kilowatts que se consuman.

Variable independiente: variable cuyo valor no depende del valor de otra u otras variables. Por ejemplo, el monto a pagar en una cuenta de luz depende de los kilowatts que se consuman (variable independiente).

Varianza: medida de dispersión que corresponde al promedio entre los cuadrados de las diferencias de cada dato con el promedio de ellos.