ADAPTACIÓN A MACROTIPO

Matemática
1º Medio

TOMO II

Autores

Carlos Fresno Ramírez

Claudia Torres Jeldes

Jaime Ávila Hidalgo

Editorial Santillana

Centro de Cartografía Táctil
Universidad Tecnológica Metropolitana
Dieciocho 414
Teléfono: (562) 2787-7392
Santiago de Chile
Año 2021

ÍNDICE

TOMO I

TOMO II

TOMO III

CUADERNO DE ACTIVIDADES

Pag.

TOMO IV

Pag.

UNIDAD 3

MEDIOAMBIENTE

El quinto postulado de Euclides indica que por un punto exterior a una recta pasa una única paralela. En este caso, el punto de fuga se relaciona con la geometría no euclidiana, ya que las paralelas convergen por la perspectiva utilizada.

Con 2 palos de maquetas largos puedes confeccionar esta vía de ferrocarril y reconocer cuál sería el punto de fuga.

El punto de fuga es el lugar geométrico en el cual las rectas que son paralelas en el plano se encuentran o convergen de acuerdo con la perspectiva.

- ¿Cómo describirías la imagen de la **página 481**? Comenta con tus compañeros.

- ¿Cuál es el punto de fuga en la imagen? Intenta encontrar diferentes puntos de fuga en el patio de tu colegio. ¿Cuántos viste?

- ¿En qué situaciones se utilizan proporciones o escalas? Averigua y comenta con tu curso.

¿Qué sabes?

Evaluación diagnóstica

Desarrolla las siguientes actividades en tu cuaderno.

1. Determina el valor de las siguientes razones:

a. $\frac{3}{4}$ **b.** $\frac{2}{3}$ **c.** 5 **:** 2

d. $\frac{7}{5}$ **e.** $\frac{4}{7}$ **f.** 1 **:** 4

2. Ubica los siguientes puntos en el plano cartesiano.

a. P(5, 2) **b.** Q(0, -1)

c. R(-2, -4) **d.** S(3, 0)

e. T(-1, 1) **f.** U(0, 2)

3. Determina el valor del término desconocido en cada proporción.

a. $\frac{x}{2} = \frac{3}{7}$ **b.** $\frac{3}{2} = \frac{u}{5}$

c. $\frac{v}{15} = \frac{2}{3}$ **d.** $\frac{p}{6} = \frac{3}{2}$

e. $\frac{7}{3} = \frac{9}{18}$ **f.** $\frac{10}{h} = \frac{5}{12}$

4. Se tienen tres fotografías de 5 por 10 cm, 10 por 20 cm y 20 por 40 cm. Calcula el cociente entre el largo y el ancho de cada fotografía. ¿Qué puedes concluir con tus resultados?

5. Resuelve los siguientes problemas.

a. Si para cocinar 8 queques se necesitan 24 huevos, ¿cuántos se requieren para preparar 12 queques?

b. Cuatro trabajadores demoran 9 días en llevar a cabo cierto trabajo. ¿Cuántos días demorarán 6 trabajadores en realizar exactamente lo mismo?

c. Si 12 barriles tienen capacidad para almacenar 600 L de un cierto químico, ¿cuántos barriles se necesitan para almacenar 800 L de la misma sustancia?

d. ¿A qué escala está dibujado el plano de un terreno si 250 m en la realidad se representan con 5 cm en el plano?

6. Demuestra que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, con b, d $\neq 0$, entonces, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$. Verifica con un ejemplo numérico.

7. Demuestra que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, con b, d $\neq 0$, entonces, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$. Verifica con un ejemplo numérico.

Lección 8

Homotecia y teorema de Tales

Araucaria angustifolia (pino brasileño).

¿Cómo podemos aplicar las proporciones en situaciones cotidianas?

Analiza la siguiente información, y luego responde.

La imagen anterior corresponde a araucarias angustifolia o también llamadas pino brasileño. Es una planta dioica, es decir, presenta los géneros masculino y femenino en troncos separados. Su lugar de origen es el sur de Brasil y norte de Argentina. La palabra araucaria proviene de la región de Arauco (Chile), en donde se descubrió la primera especie.

1. ¿Observas alguna similitud entre las araucarias de las fotografías? ¿Se podrían generar varias imágenes con igual forma al aumentar o disminuir proporcionalmente su tamaño?

2. ¿Por qué crees que las araucarias deben estar protegidas en un parque nacional? ¿Cómo piensas que se podría reducir la contaminación del medioambiente? Comenta con tu curso.

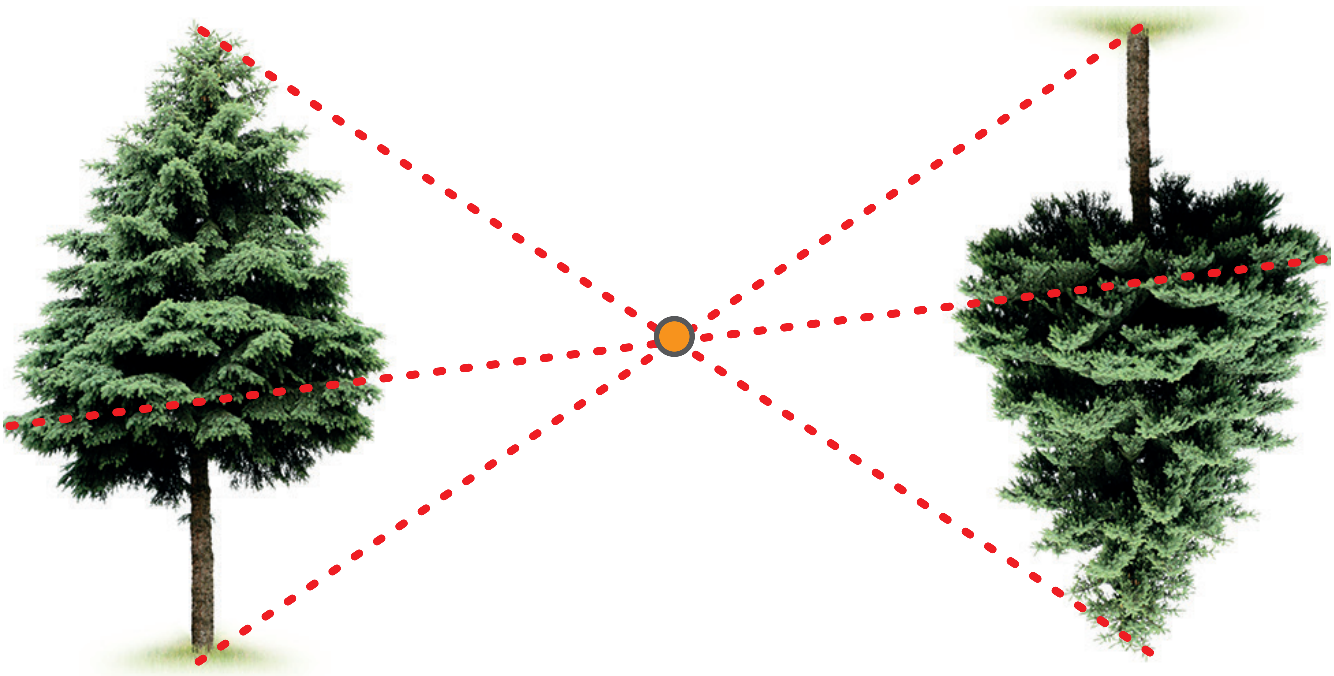
Reflexiona

- ¿Qué recuerdas acerca de la proporcionalidad vista en años anteriores?

- ¿Piensas que trabajar en equipo te ayudará a comprender de mejor manera los contenidos que estudiarás?, ¿por qué?

HOMOTECIA

Un pino corresponde a un tipo de árbol con tronco fuerte y rugoso, cuyas hojas son estrechas y parecen agujas. Existen más de 100 especies de pinos y están repartidas por todo el mundo en diferentes continentes. Algunos pinos se encuentran casi extintos y requieren que sean protegidos en parques nacionales para asegurar su bienestar. Observa la siguiente imagen, y luego responde.



- ¿En qué se parecen los dos pinos?

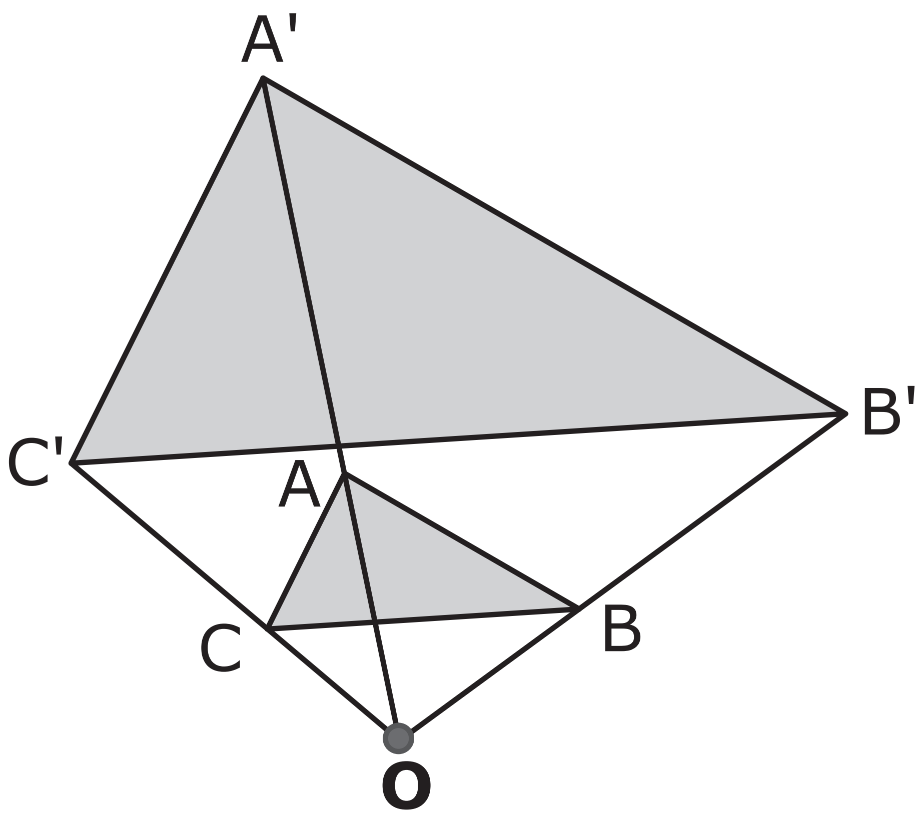
- ¿Cómo podrías obtener el pino de la derecha a partir del de la izquierda?

- Investiga junto con tus compañeros acerca de si los pinos producen algún efecto negativo o positivo en el medioambiente chileno. Argumenta tu respuesta.

Una homotecia es una **transformación geométrica** en la que se obtiene una figura a partir de **ampliar** o **reducir** otra, multiplicando cada trazo por un mismo valor distinto de 0, llamado **razón de homotecia**, con lo que la imagen obtenida conserva la forma de la original en el mismo sentido o invertida, por tanto, sus trazos son proporcionales y la unión de los puntos homólogos convergen en un punto llamado **centro de homotecia.**

Ejemplo 1

Se aplica una homotecia de centro O sobre el triángulo CBA, obteniendo el triángulo C'B'A'. Si OC = 4 cm, OB = 5 cm y OC' = 12 cm, ¿cuál es la longitud del segmento $\overline{BB'}$?



Tenemos que $\frac{OC'}{OC} = \frac{OB'}{OB} \rightarrow \frac{12}{4} = \frac{OB'}{5}$

$$12 \bullet 5 = 4 \bullet OB'$$
$$OB' = \frac{12 \bullet 5}{4}$$
$$OB' = 15 \text{ cm}$$

Luego, como $OB' = OB + BB'$, se tiene que:

$$15 = OB + BB' \rightarrow BB' = 15 - OB$$
$$BB' = 15 - 5$$
$$BB' = 10 \text{ cm}$$

La **propiedad fundamental de las proporciones** establece que: “En toda proporción se cumple que el producto de los medios es igual al producto de los extremos”, es decir, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces: $a \bullet d = b \bullet c$.

Actividades en tu cuaderno

Considera la figura del Ejemplo 1 y responde.

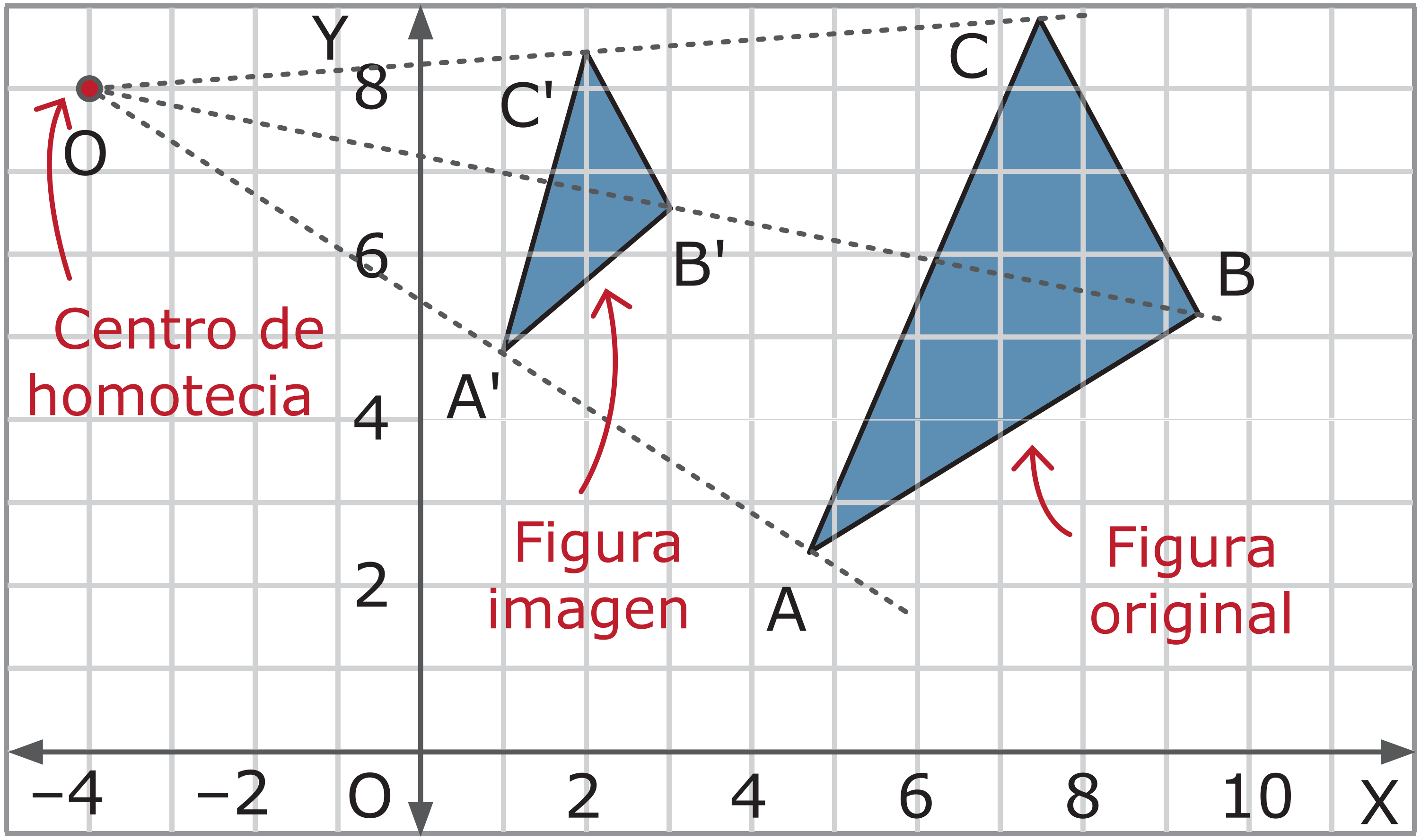
1. Si OA = 7 cm, ¿cuánto mide OA’?

2. ¿En qué porcentaje crees que aumentó el tamaño del triángulo ABC con respecto al triángulo A’B’C’?

Se aplica una homotecia de centro O sobre el triángulo ABC, obteniendo el triángulo A’B’C’.

La **razón de homotecia** (k) corresponde al cociente (k ≠ 0) entre la distancia desde O a cada vértice de la figura imagen y la distancia desde O a cada vértice de la figura original.

Además, se cumple que la razón de longitud de dos segmentos homotéticos es igual a la razón de homotecia (k).



$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = K \text{ y } \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = K$$

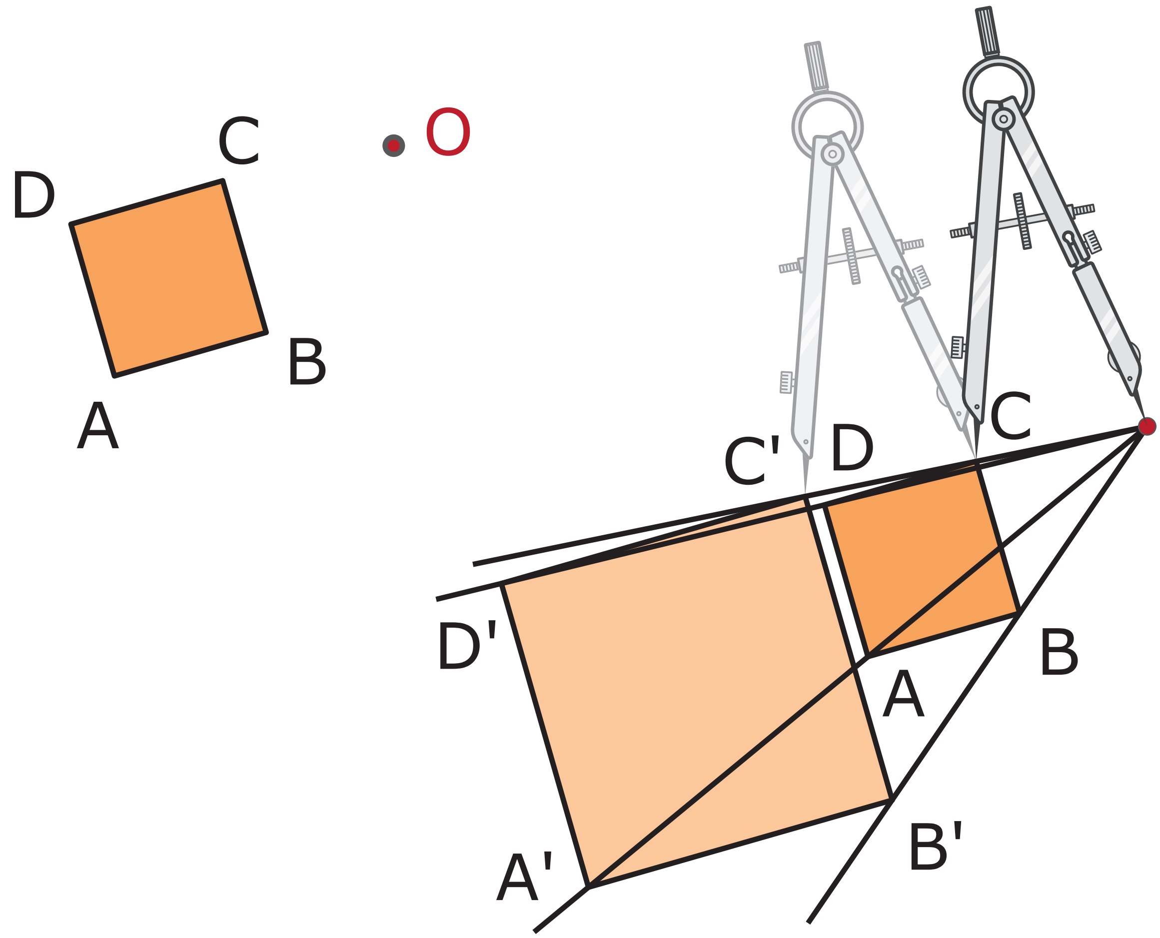
Ejemplo 2

Utilizando regla y compás, explica cómo puedes realizar una homotecia de razón k = 2 y centro en O sobre el cuadrado ABCD.

1º Con la regla, dibuja rectas que partan desde el punto O y pasen por cada uno de los vértices del cuadrado ABCD.

2º Ubica el compás con centro en O y radio $\overline{OA}$ y copia la distancia sobre la misma recta, pero ahora con centro en A. Así obtendrás el punto imagen A’. Repite el proceso con todos los vértices para obtener las imágenes B’, C’ y D’.

3º Une los puntos A, B, C y D para obtener el cuadrado imagen A′B′C′D′.



Recurso Web

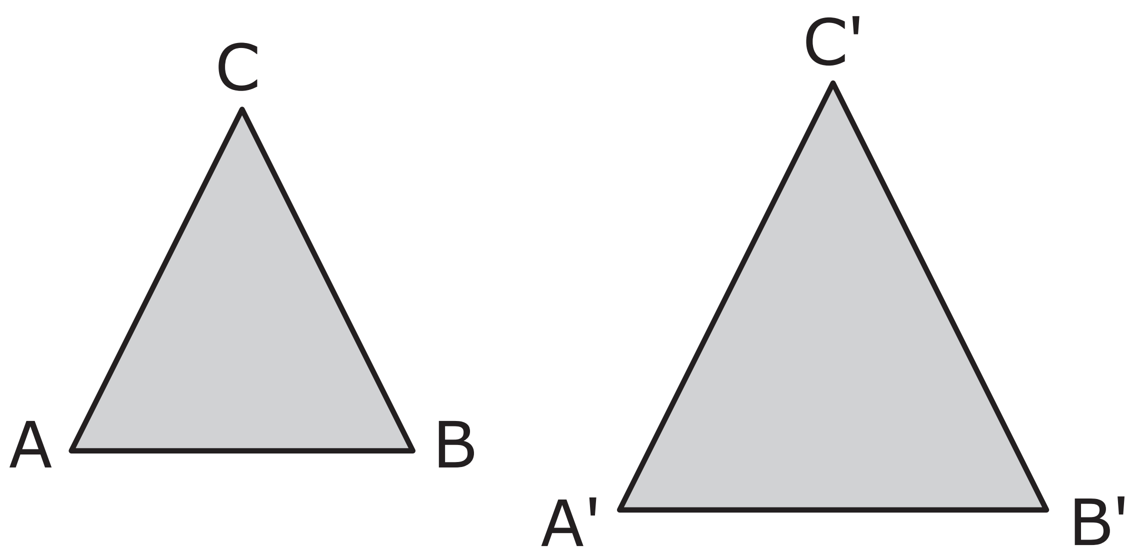
Para saber más acerca de la homotecia, puedes ver el siguiente video: https://youtu.be/pi5Ok-vZIC4

¿Qué sucedería con la figura imagen del **Ejemplo 2** si la razón de homotecia fuera k = 1?

¿Y si fuera k = 0,5? Comenta con tus compañeros.

Ejemplo 3

A un triángulo ABC de lados 3 cm, 5 cm y 6 cm se le aplica una homotecia de razón k = 3. Determina las medidas de los lados del triángulo imagen A’B’C’.



Supongamos que AB = 3 cm, BC = 5 cm y CA = 6 cm.

Luego, como $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = K$, entonces:

► $A'B' = k \bullet AB$

► $B'C' = k \bullet BC$

► $C'A' = k \bullet CA$

Así, **A'B'** = 3 • 3 = 9, **B'C'** = 3 • 5 = 15 y **C'A'** = 3 • 6 = 18.

Por lo tanto, las medidas de los lados del triángulo imagen son: **A'B'** = 9 cm, **B'C'** = 15 cm y **C'A'** = 18 cm.

Recurso Web

Para profundizar en las propiedades de la homotecia, explora la actividad propuesta en el siguiente sitio: https://n9.cl/jkgg

Actividades en tu cuaderno

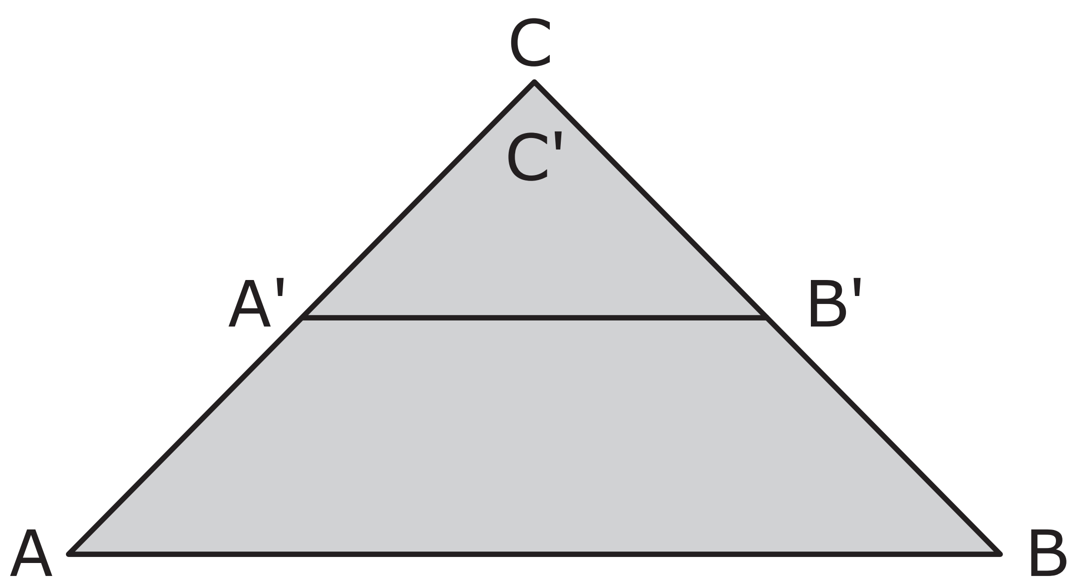
Considera los datos del **Ejemplo 3** y responde.

1. Calcula el perímetro de los triángulos ABC y A’B’C’. ¿Cuál es la razón entre estos valores?

2. ¿Hay alguna relación entre la razón de los perímetros y el valor de k? ¿Crees que sucederá lo mismo con el área? Explica.

Ejemplo 4

En la figura se muestra una homotecia de centro C y razón $0 < k < 1$ del triángulo ABC. ¿Qué proporción se puede establecer?



El triángulo ABC es homotético al triángulo A'B'C' y, además, C' = C.

Luego, considerando el punto C como centro de homotecia, la razón está dada por:

$$k = \frac{CA'}{CA} = \frac{CB'}{CB}$$

Esta proporción se conoce como el **teorema particular de Tales**, y lo estudiarás en esta lección.

Actividades en tu cuaderno

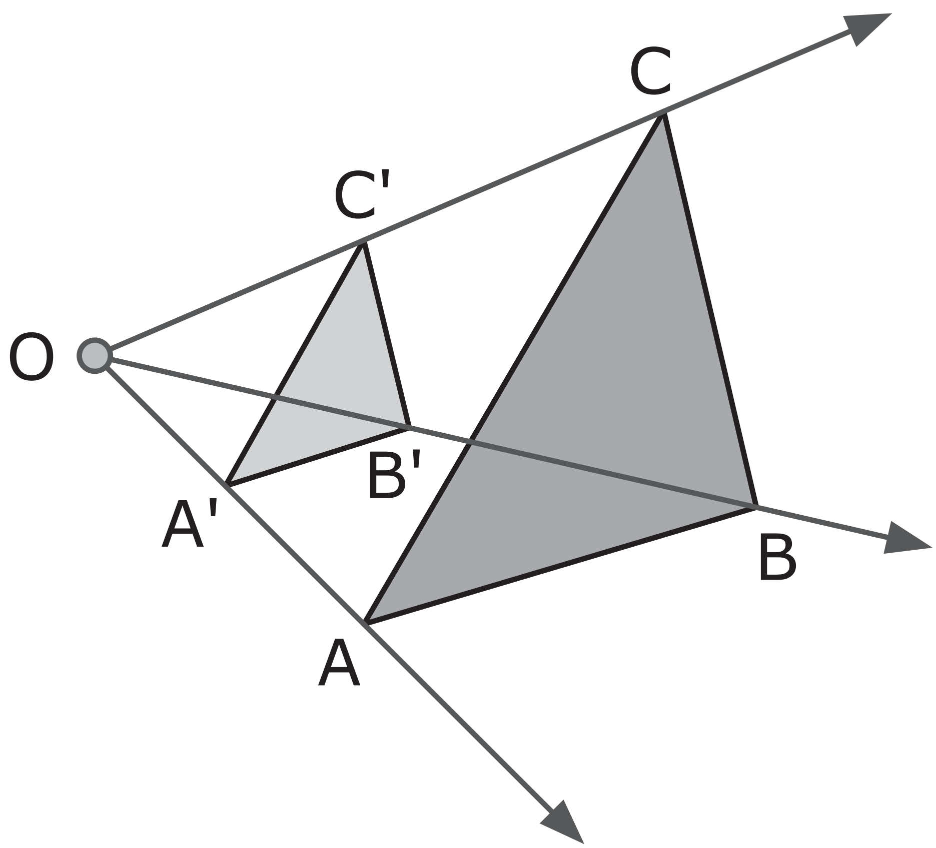
1. Construyan un triángulo ABC cualquiera y apliquen una homotecia de razón $k = \dfrac{3}{4}$ y centro el vértice A. Deduzcan alguna proporción que se establezca entre los lados del triángulo original y el triángulo imagen.

Dependiendo de la razón de homotecia con $k \neq 0$, si $k > 0$, entonces la homotecia es **directa** y las figuras imagen y original quedan en el mismo lado respecto del centro O, mientras que si $k < 0$ es **inversa** y las figuras imagen y original quedan a distintos lados respecto del centro O.

► Homotecia directa: k > 0

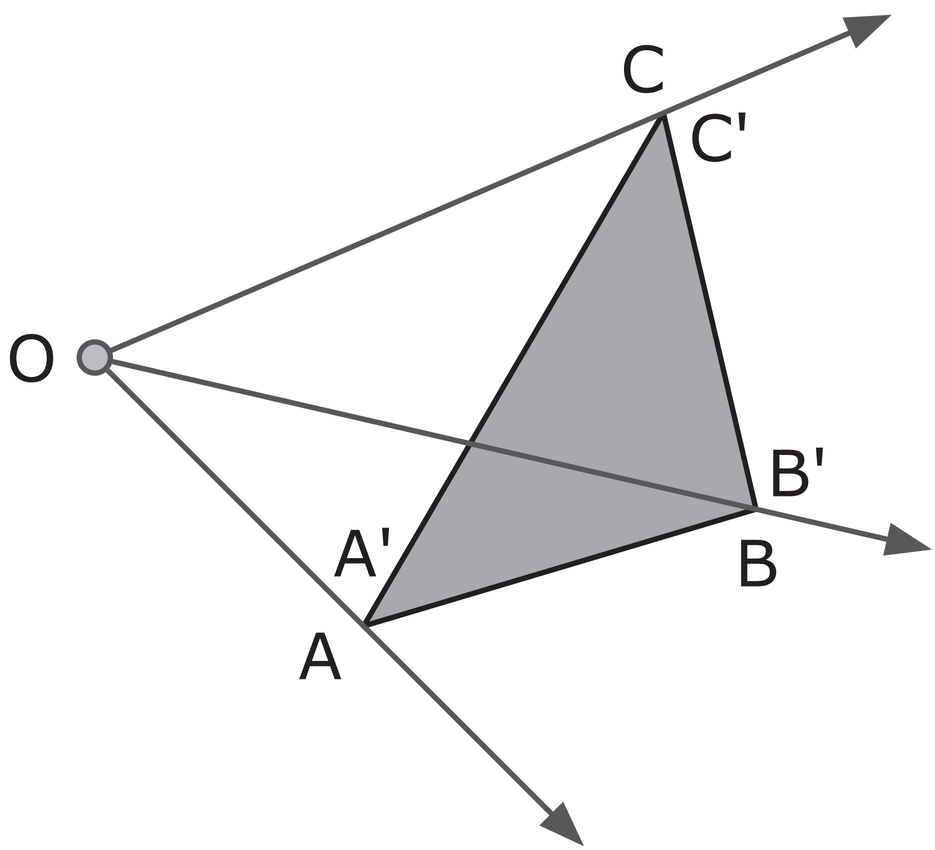
• 0 < k < 1

La figura imagen (A’B’C’) corresponde a una **reducción o contracción** de la figura original (ABC).



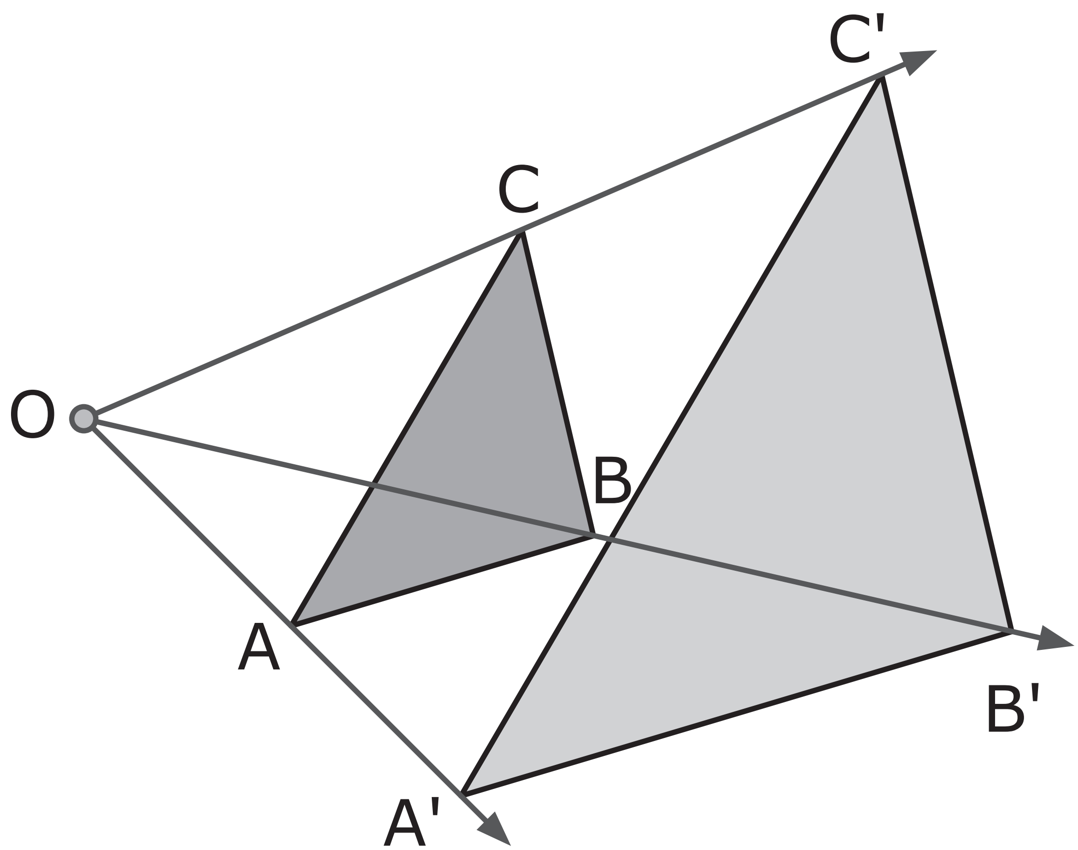
- **k=1**

La figura imagen (A’B’C’) es **congruente** con la figura original (ABC), es decir, la figura imagen coincide con la figura original.



- **k > 1**

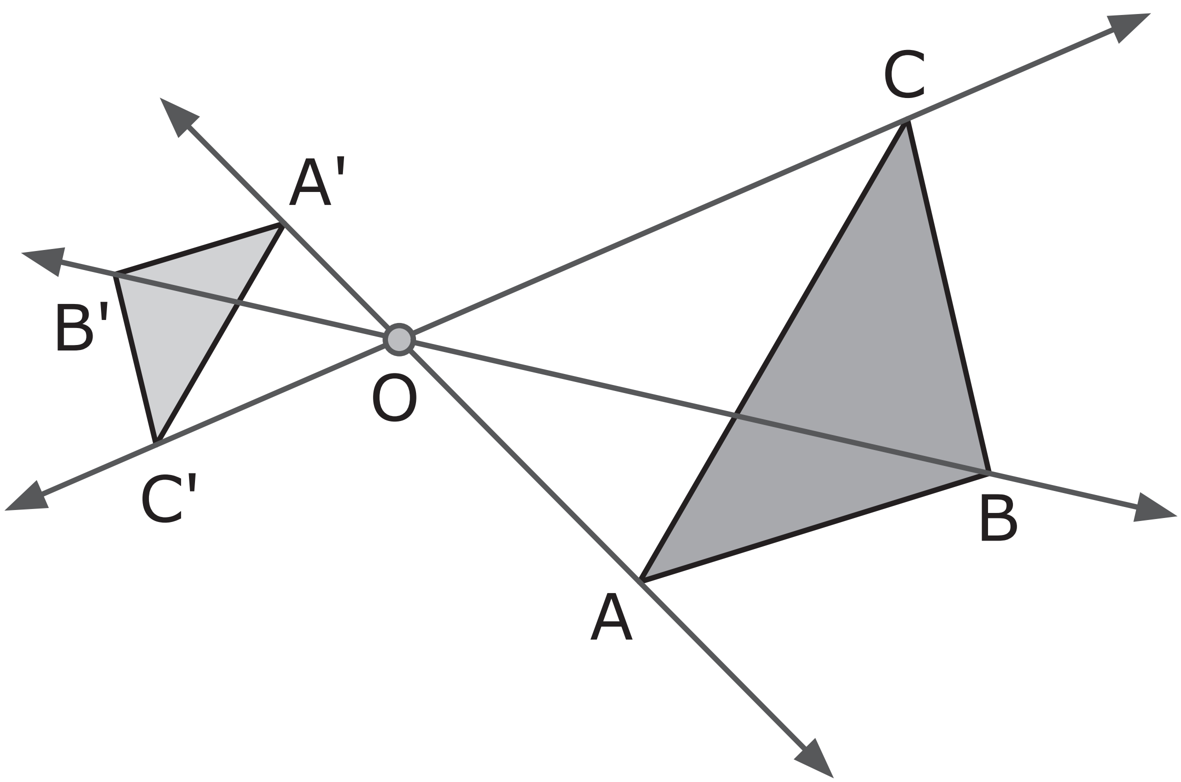
La figura imagen (A’B’C’) corresponde a una **ampliación o dilatación** de la figura original (ABC).



► Homotecia inversa: $k < 0$

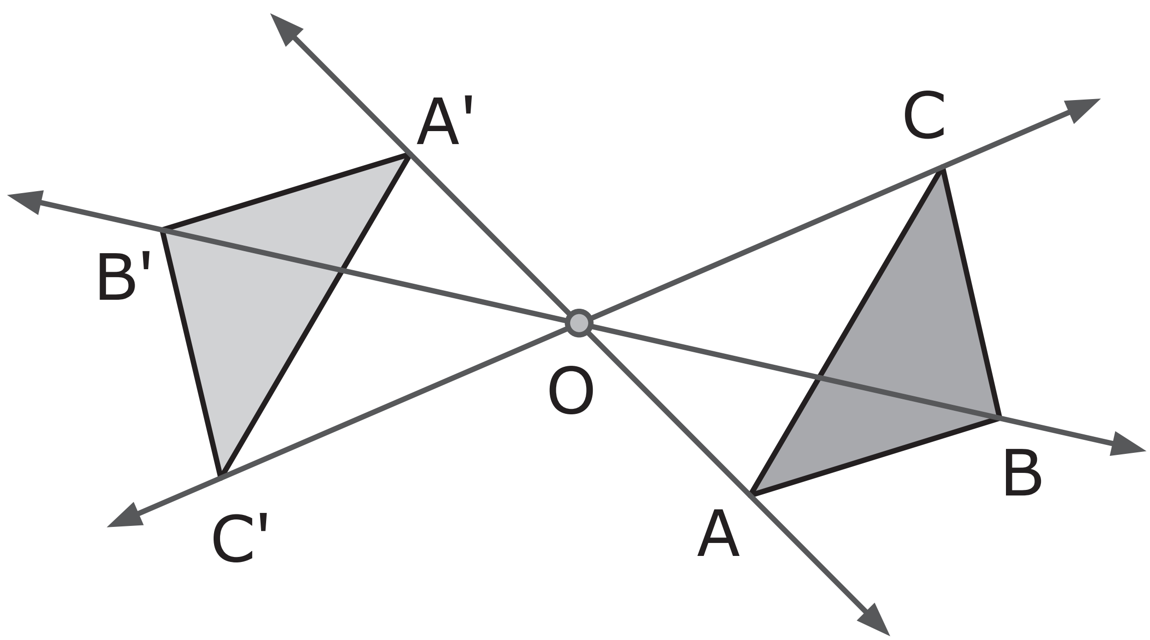
- $-1 < k < 0$

La figura imagen (A’B’C’) es una **reducción** o **contracción** de la figura original (ABC) y se **invierte su sentido**.



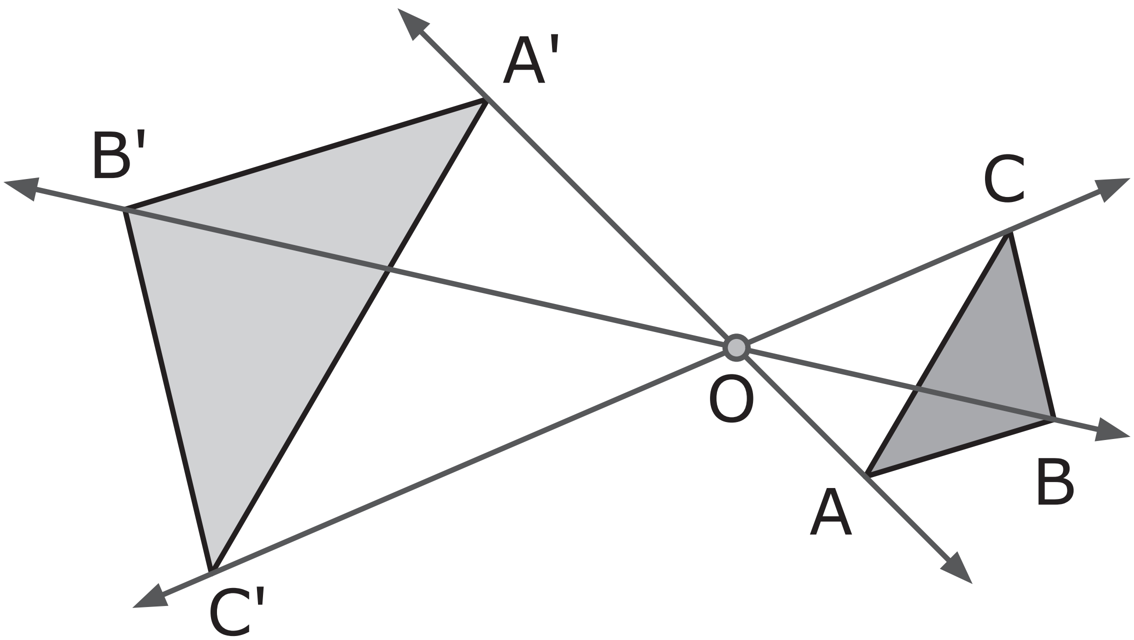
- **k = −1**

La figura imagen (A’B’C’) es **congruente** con la figura original (ABC) y se **invierte su sentido**.



- **k < −1**

La figura imagen (A’B’C’) es una **ampliación** o **dilatación** de la figura original (ABC) y **se invierte su sentido**.

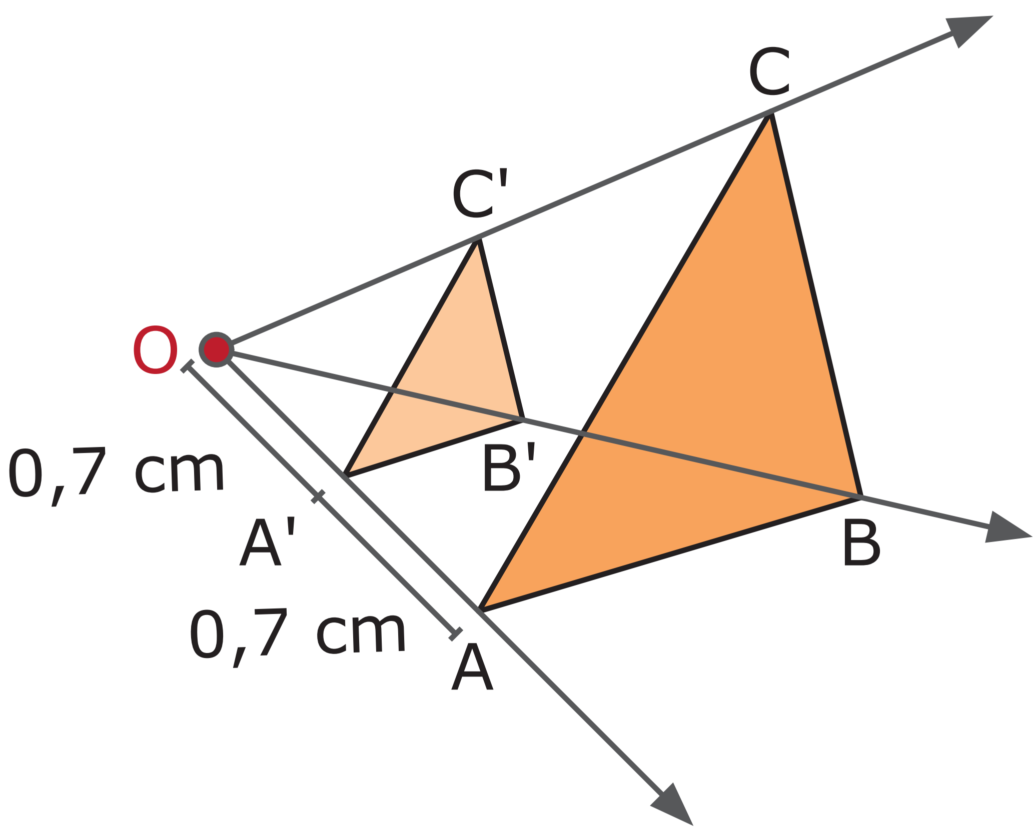


Actividades en tu cuaderno

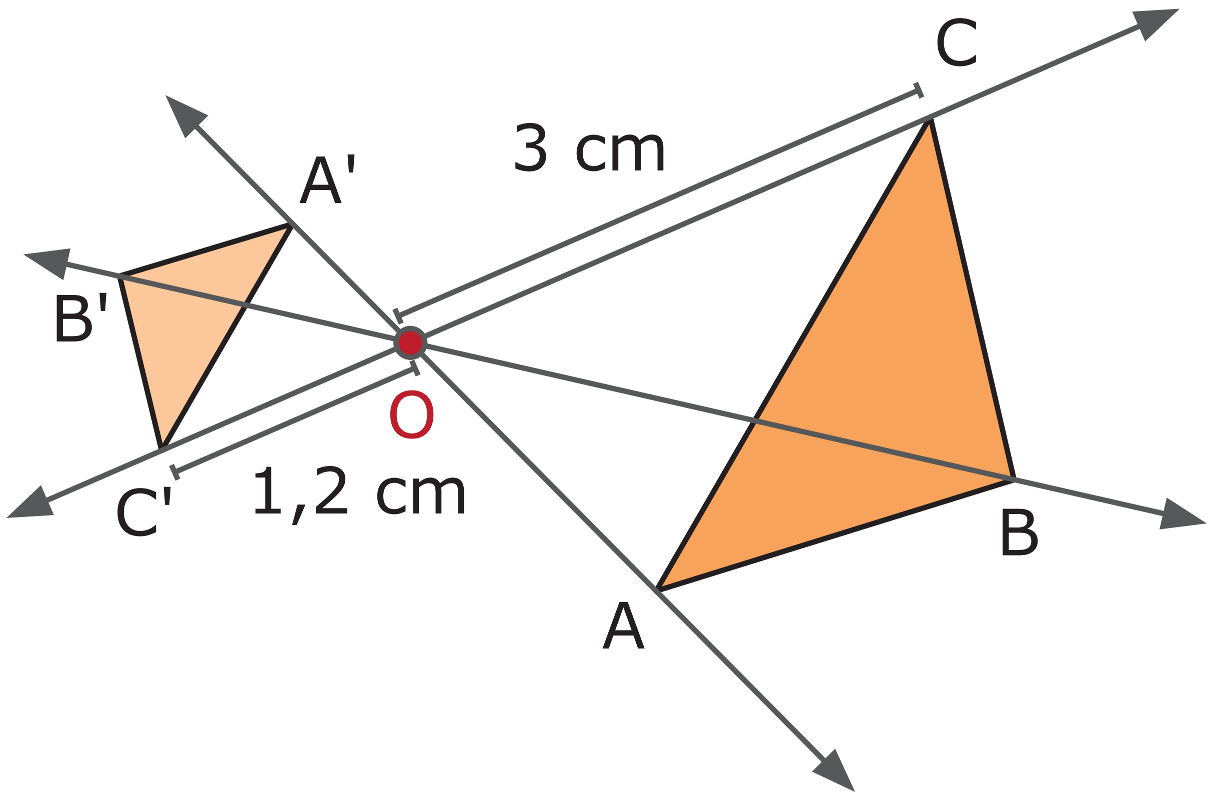
1. Calcula el valor de la razón de homotecia (k) según los datos que se muestran en cada caso.

Explica si se trata de una ampliación o reducción y si es una homotecia directa o inversa.

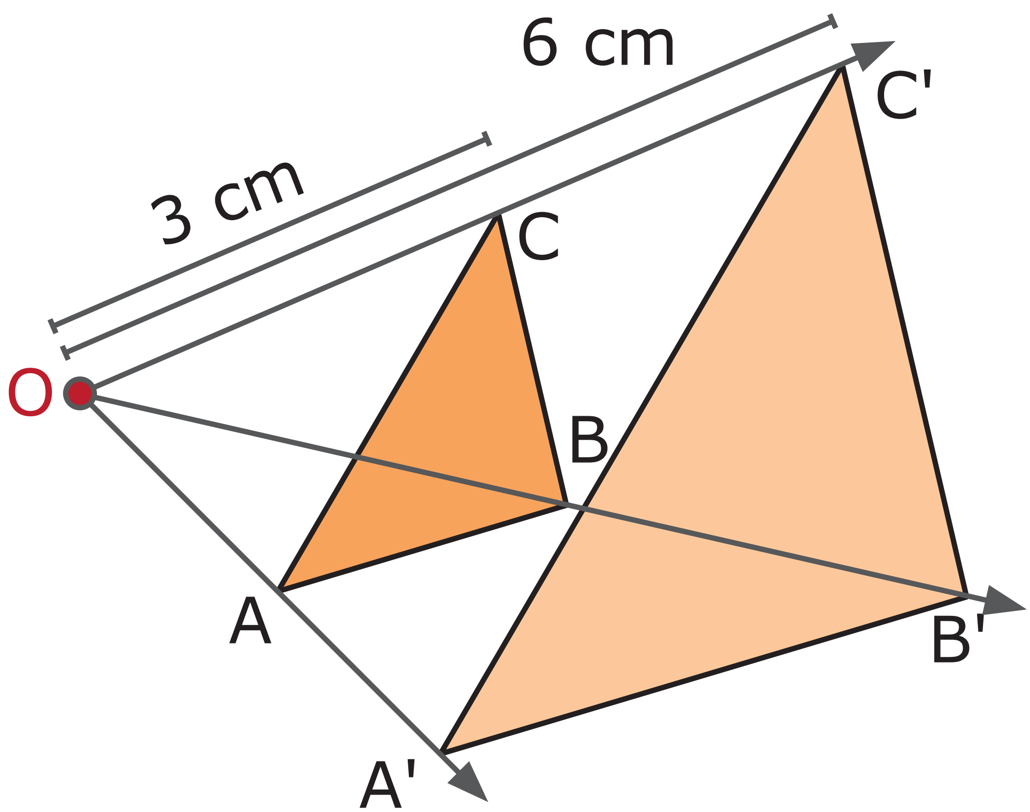
a.



b.



c.



2. Si al aplicar la homotecia, la figura original y quedan en el mismo lado respecto del centro O, ¿cuál es el valor de k?

3. Si al aplicar una homotecia, la figura imagen es congruente con la figura original, pero se invierte su sentido, ¿cuál es el valor de k?

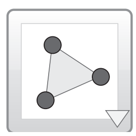
Dos figuras son **congruentes** (≅) si tienen exactamente la misma forma y tamaño, es decir, al superponerlas coinciden completamente.

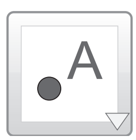
Ejemplo 5

Construye una homotecia utilizando un software educativo.

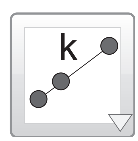
Puedes utilizar el software GeoGebra ingresando en el sitio https://www.geogebra.org/geometry.

Luego, considera los siguientes pasos:

1º Haz clic en  y construye un polígono.

2º Con el botón 

ubica el centro de homotecia.

3º Finalmente, con el botón 

k haz clic en el centro de homotecia de la figura y se abrirá una ventana donde debes ingresar el valor de la razón de homotecia.

Actividades en tu cuaderno

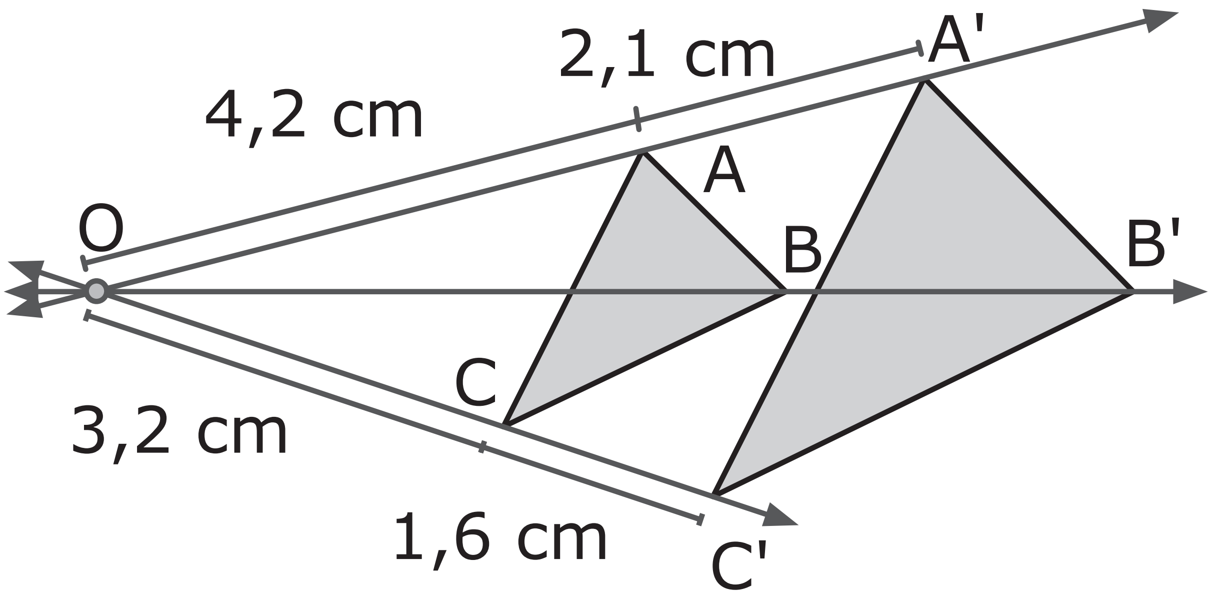
1. **Construye** 2 homotecias diferentes: una en que la razón de homotecia sea un número positivo, y la otra, un número negativo.

2. **Actividad de profundización.** Construye un triángulo y haz una rotación en 180º con respecto al vértice A. Luego, aplica una homotecia con centro en el mismo vértice y razón $k = -1$. ¿Qué obtuviste? Compara con tus compañeros.

Actividades en tu cuaderno

1. Observa las siguientes homotecias, y luego responde.

a.



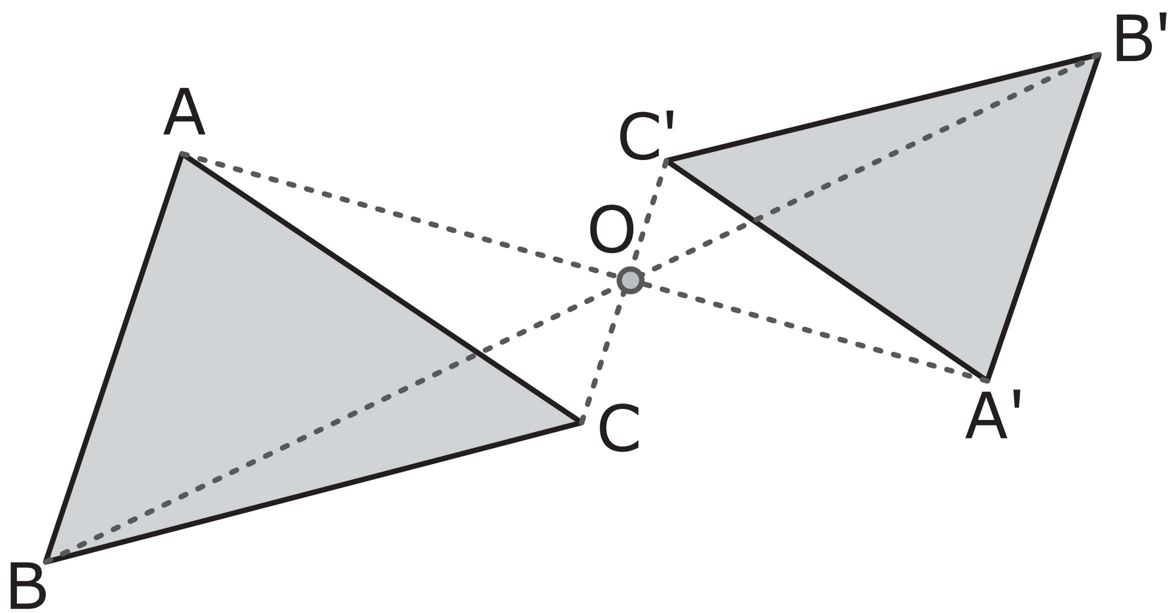
- ¿Cuál es el valor de la razón de homotecia?

- Si OB = 5 cm, ¿cuánto mide $\overline{BB'}$?

- Si CA = 2,2 cm, ¿cuánto mide $\overline{C'A'}$?

• Si m ($\measuredangle$BABC) = 72°, ¿cuál es el valor de m ($\measuredangle$BA’B’C’)?

b.



• ¿Cuál es el signo de la razón de homotecia k?

• Califica la homotecia de la figura como inversa o directa.

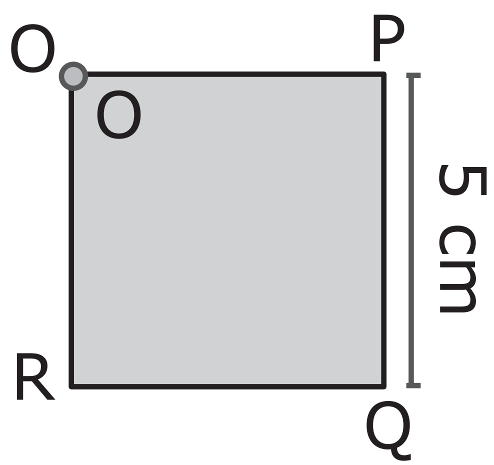
• Si OB = 5 cm, OA = 6 cm, OB’ = 4 cm

y OA′ = 4,8 cm, calcula el valor de k.

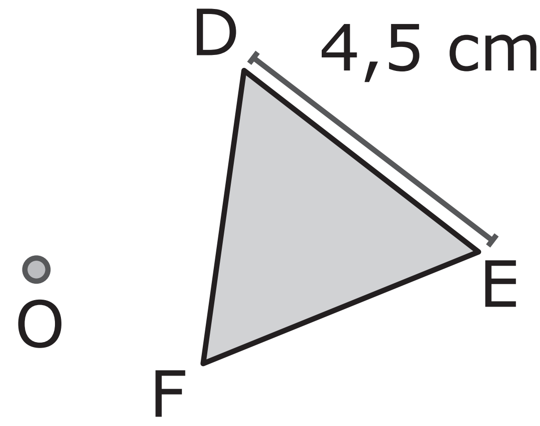
• Calcula $\overline{OC}$ y $\overline{OC'}$ sabiendo que OC + OC′ = 5,6

2. Construye en cada polígono regular la homotecia de centro O y razón k utilizando regla y compás.

a. $k = \dfrac{1}{2}$



b. k = -2



3. Evalúa si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. **Justifica** tu respuesta.

a. Si el valor de la razón de una homotecia cumple que $|k| > 1$, se tiene una reducción.

b. Si el valor de la razón de una homotecia cumple que $k > 0$, es una homotecia directa.

c. Si el valor de la razón de una homotecia es igual a 1 o -1, la figura imagen es congruente con la figura original.

d. Si el valor de la razón de una homotecia cumple que $k < 0$, siempre se obtiene una reducción de la figura original.

e. Si el valor de la razón de una homotecia es menor que 0, las figuras imagen y original quedan a distintos lados respecto del centro de homotecia.

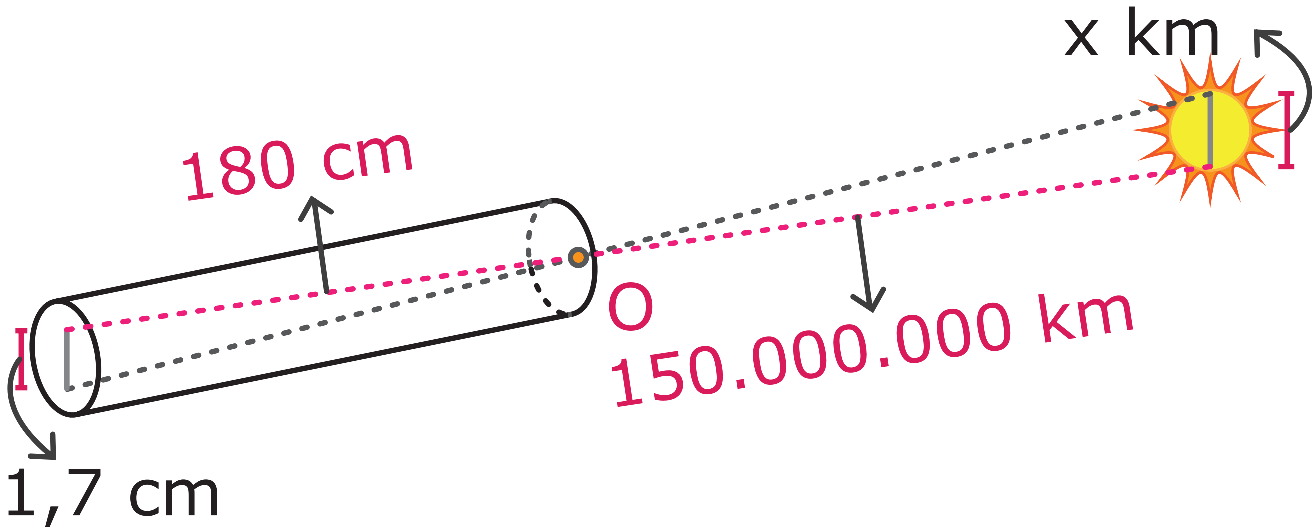
4. Artes Visuales. Respecto al concepto de **punto de fuga** que estudiaste al inicio de la unidad, responde lo siguiente:

a. Explica con tus palabras qué entiendes por «punto de fuga». En caso de tener dificultad, pídele ayuda a tu profesor o profesora de Artes Visuales.

b. **Construye** en tu cuaderno una imagen tridimensional de un cubo a partir de un cuadrado cuyo lado mida 5 cm. ¿Puedes encontrar algún punto de fuga asociado al cuadrado? Compara con tus compañeros.

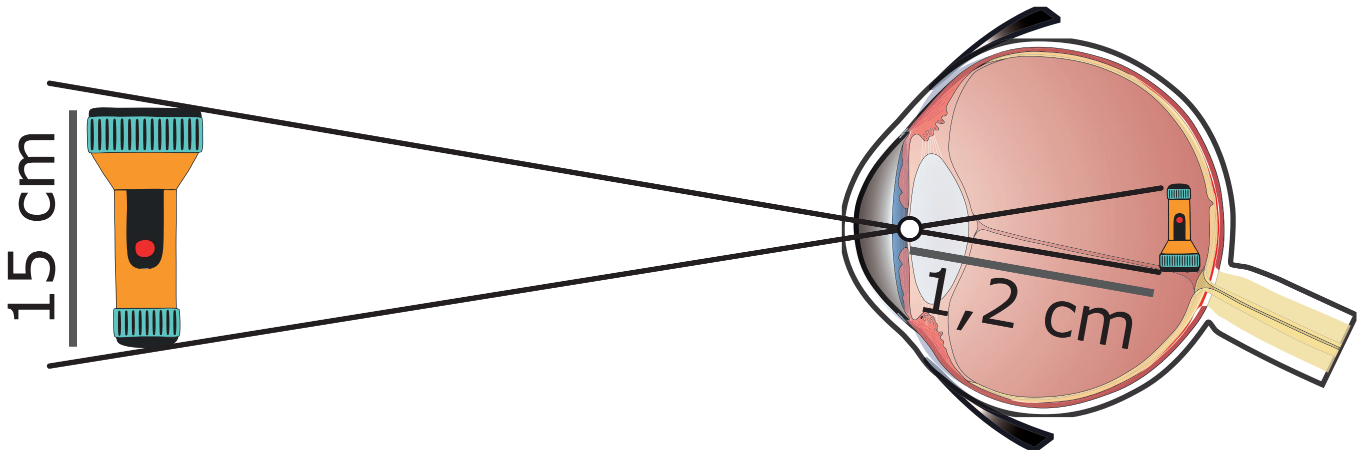
c. **Investiga** el uso del punto de fuga en áreas como la fotografía, la pintura y la arquitectura.

5. **Ciencias Naturales.** Para medir el diámetro solar, se puede confeccionar un instrumento con un tubo, como el que se muestra en la imagen. Si la distancia promedio de la Tierra al Sol es de 150 millones de kilómetros.



Argumenten cómo podrían determinar el diámetro aproximado del Sol utilizando propiedades de la homotecia.

6. Ciencias Naturales. Actividad de profundización. El ojo humano tiene forma parecida a una esfera. Cuando miras algún objeto, este refleja luz que ingresa a nuestros ojos y estos forman una imagen invertida del objeto sobre la retina. **Analiza** la siguiente figura y responde:



a. Decide si la homotecia que se genera al mirar un objeto es directa o inversa. Justifica.

b. ¿Qué signo tiene el factor de homotecia k? Justifica.

c. Si se observa una linterna, como la que se muestra en la imagen, de modo que la distancia entre la parte superior de esta y la pupila del ojo es 25 cm, determina cuál será el largo de la imagen que se proyecta en la retina.

d. Investiga acerca de los efectos de la contaminación atmosférica sobre la salud de los ojos. Luego, comparte la información con tu curso.

e. Averigua por qué vemos la imagen en su posición original siendo que la retina procesa la imagen invertida.

Cuaderno de Actividades

Páginas 1439 a 1460

Cierre

- Explica con tus palabras el concepto de homotecia.

- Respecto al trabajo colaborativo que debiste realizar, ¿cómo te sentiste en el grupo? ¿Hubo dificultades? ¿Cómo crees que podrían tener un mejor desempeño grupal? Explica.

HOMOTECIA DE FORMA VECTORIAL

En la imagen se muestra un logotipo universal que encontramos en papeleras, contenedores y otros lugares para referirse al reciclaje.

Representemos este símbolo en el plano cartesiano con el triángulo ABC y los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, que van desde el origen (O) a cada uno de los vértices del triángulo.

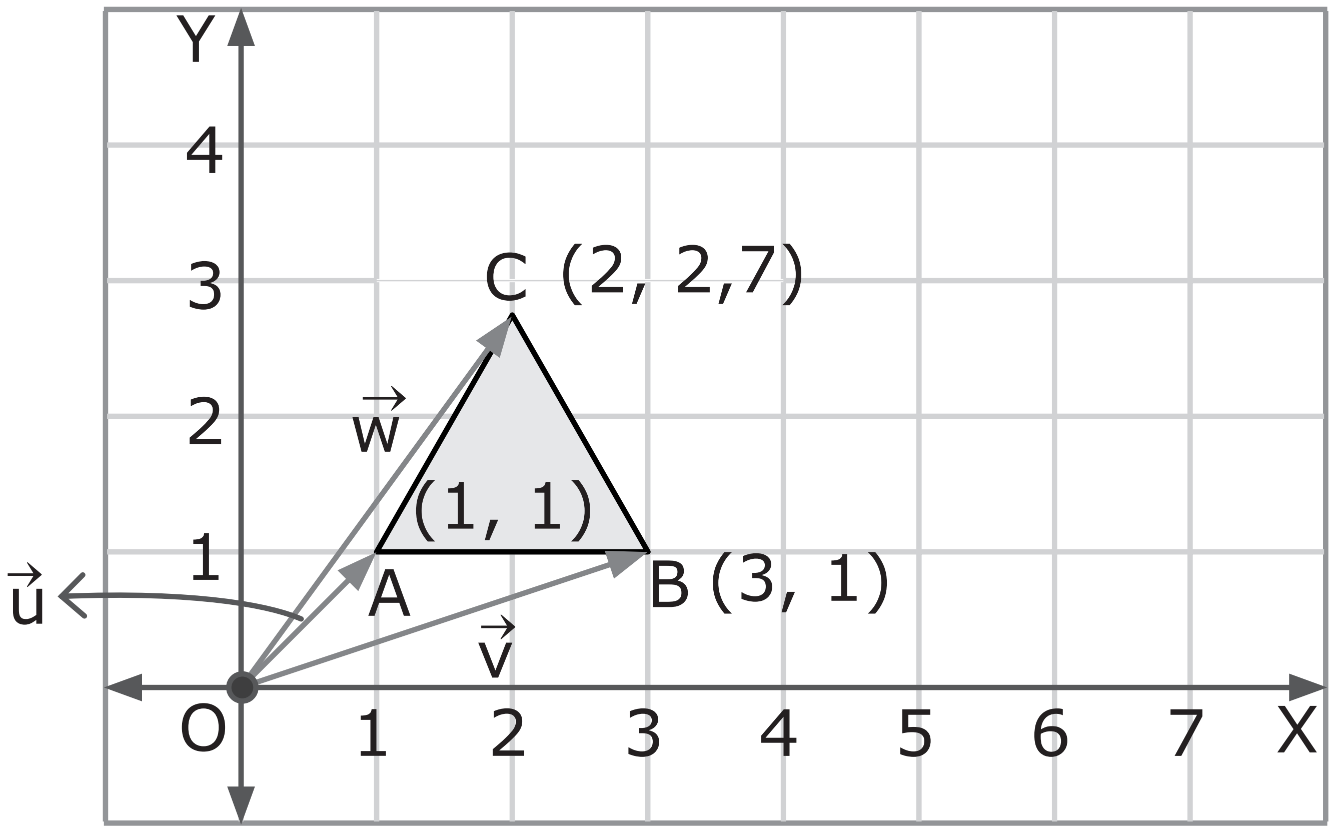
Tenemos que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, cuyas componentes son (1, 1).

Luego, al multiplicar por 2 el vector $\vec{u}$ se obtiene:

$$2 \bullet \vec{u} = (2 \bullet 1, 2 \bullet 1) = (2, 2)$$

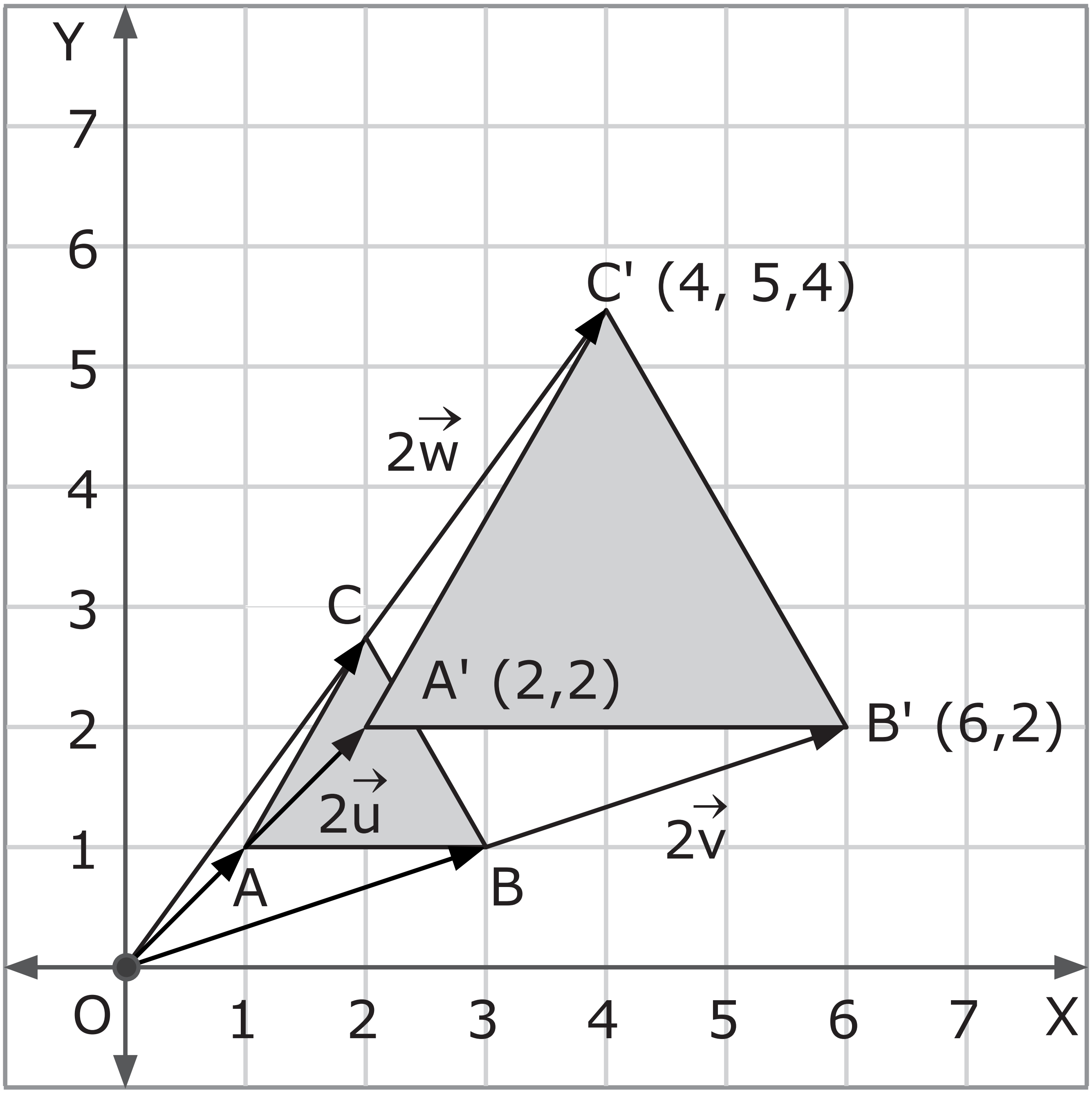
- ¿Cuáles son las componentes de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$?

- ¿Cuál es el producto que obtienes al multiplicar los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ por 2?



Al ubicar estos tres nuevos vectores en el plano cartesiano, obtenemos el triángulo A'B'C', que resulta ser **homotético** al triángulo original.

$$2\,\vec{u} = \overrightarrow{OA'}$$
$$2\,\vec{v} = \overrightarrow{OB'}$$
$$2\,\vec{w} = \overrightarrow{OC'}$$



Y
X
O
1
2
3
4
5
6
7
C' (4, 5,4)
$2\vec{w}$
C
A' (2,2)
B' (6,2)
$2\vec{u}$
$2\vec{v}$
A
B

Ejemplo 1

Identifica la razón de homotecia en el ejercicio anterior.

Como los triángulos son homotéticos, sus lados homólogos son proporcionales, por lo que se cumple que $\frac{A'B'}{AB} = k$, entonces, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{4}{2} = 2$

> En el plano cartesiano, un **vector** se puede representar como un segmento de recta orientado que está determinado por dos puntos: un origen y un extremo. De esta manera, un vector se caracteriza por su magnitud (es decir, longitud), dirección y sentido.

Al **multiplicar un vector** $\vec{u}$ por un **escalar** α se obtiene otro vector, que corresponde **al vector ponderado** de $\vec{u}$.

Si $\vec{u} = (x, y)$, al multiplicar por α obtienes: $\alpha \bullet \vec{u} = \alpha \bullet (x, y) = (\alpha \bullet x, \alpha \bullet y) = (\alpha x, \alpha y)$.

Un vector ponderado cumple con lo siguiente:

- Mantiene la dirección del vector.
- Si $\alpha = 0$, se obtiene el vector nulo, es decir, $0 \bullet \vec{u} = 0 \bullet (x, y) = (0 \bullet x, 0 \bullet y) = (0, 0)$.

- Si $\alpha < 0$, el vector cambia de sentido.

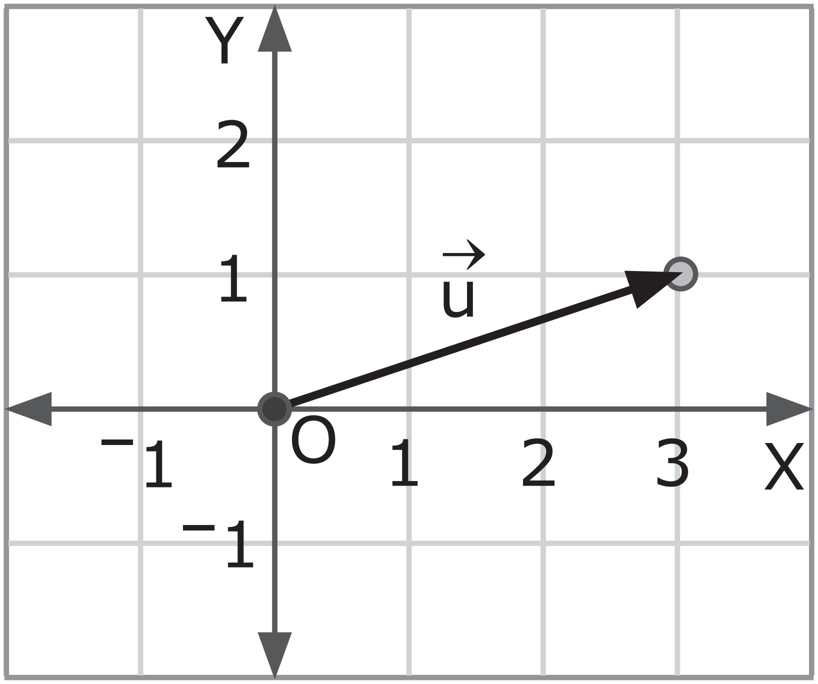
- Si $\alpha > 0$, el vector mantiene el sentido.

Ejemplo 2

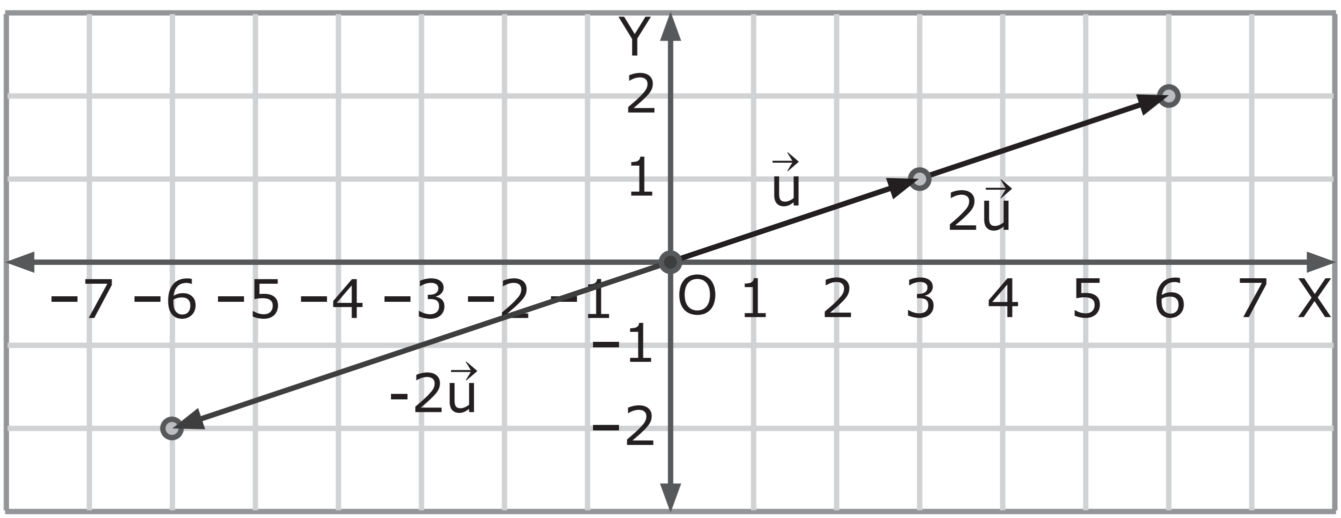
En el plano cartesiano se representa el vector $\vec{u}$. Construye los vectores $2\vec{u}$ y $-2\vec{u}$.

Como $\vec{u} = (3, 1)$, entonces, tenemos que:

$$2\vec{u} = 2 \bullet (3, 1) = (6, 2)$$
$$-2\vec{u} = -2 \bullet (3, 1) = (-6, -2)$$



Gráficamente



Actividades en tu cuaderno

1. Considerando los datos del **Ejemplo 2**, determina los vectores $-\vec{u}$, $3\vec{u}$ y $0{,}5\vec{u}$.

2. ¿Qué propiedades tiene el vector $-2\vec{u}$ en comparación con el vector $\vec{u}$? ¿Y el vector $0{,}5\vec{u}$? Comenta con un compañero(a).

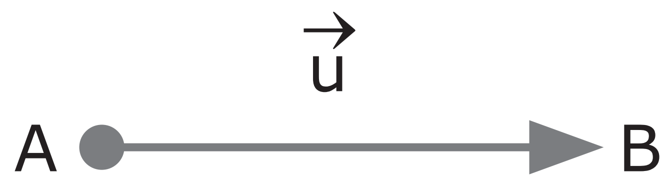
3. Construye el vector $\vec{u} = (-1, 2)$ y determina los vectores $2\vec{u}$ y $-2\vec{u}$.

4. ¿Qué vector obtienes al multiplicar un vector $\vec{v}$ por 0?

5. ¿Qué sucede al multiplicar un vector $\vec{u}$ por un escalar $\alpha < 0$?

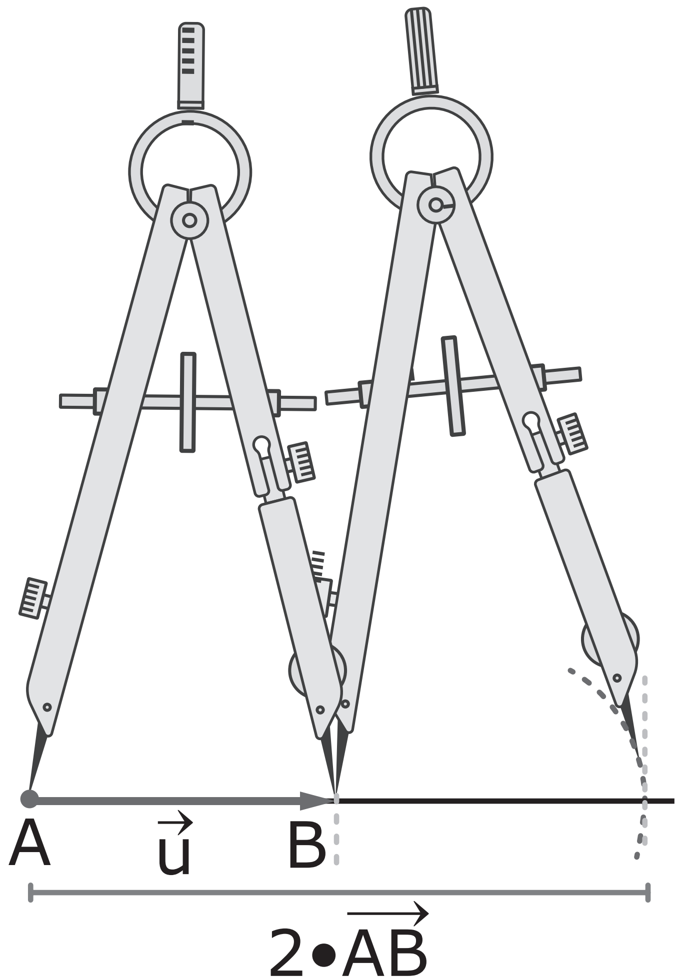
Ejemplo 3

Construye el vector $2 \bullet \overrightarrow{AB}$ utilizando el compás a partir del vector $\overrightarrow{AB}$.



Ubica el compás con centro en A y radio $\overrightarrow{AB}$.

Luego, a partir de B, copias la amplitud del vector $\overrightarrow{AB}$ y obtendrás el vector $2 \bullet \overrightarrow{AB}$.



¿Cómo construirías el vector $2 \bullet \overrightarrow{AB}$ del **Ejemplo 3** utilizando regla en vez de compás? Compara tu estrategia con la de tus compañeros.

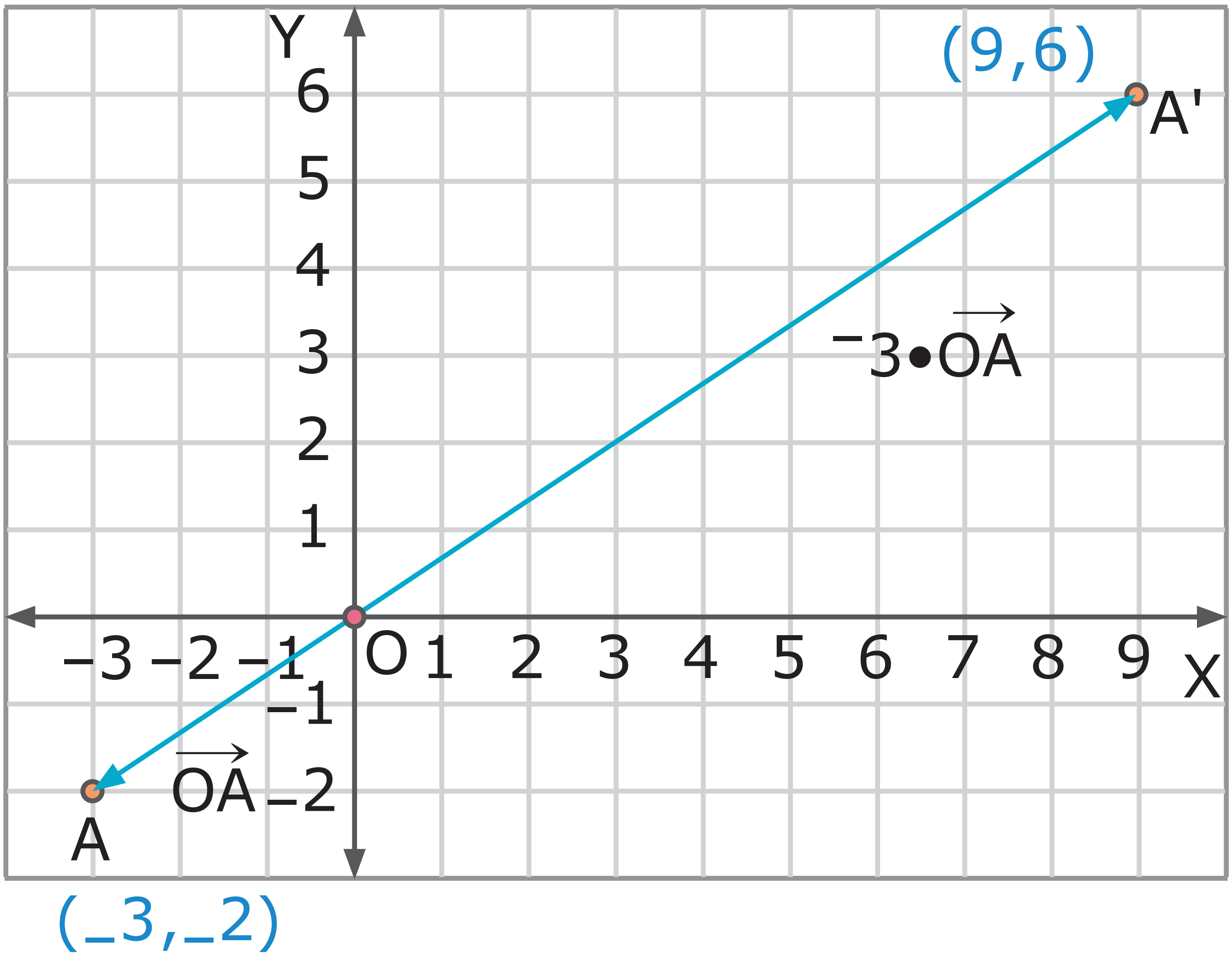
Ejemplo 4

Determina las coordenadas de la imagen del punto A(–3, –2) si se le aplica una homotecia de centro O(0, 0) y razón de homotecia k =-3.

Para hallar el punto imagen, podemos multiplicar el vector $\overrightarrow{OA}$ por el valor de la razón k:

$$k \bullet \overrightarrow{OA} = -3 \bullet (-3, -2) = (9, 6)$$

Gráficamente



Recurso Web

Para practicar y repasar más acerca de homotecia, visita el siguiente sitio: https://n9.cl/xld1

Actividades en tu cuaderno

Considera los datos del **Ejemplo 4** y responde.

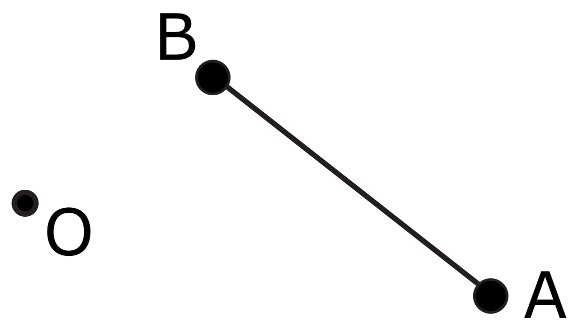
1. ¿Qué diferencia habría si la razón de homotecia fuera $k = 3$? Explica.

2. ¿Qué ocurre si el centro de homotecia se cambia? Comenta con tu curso.

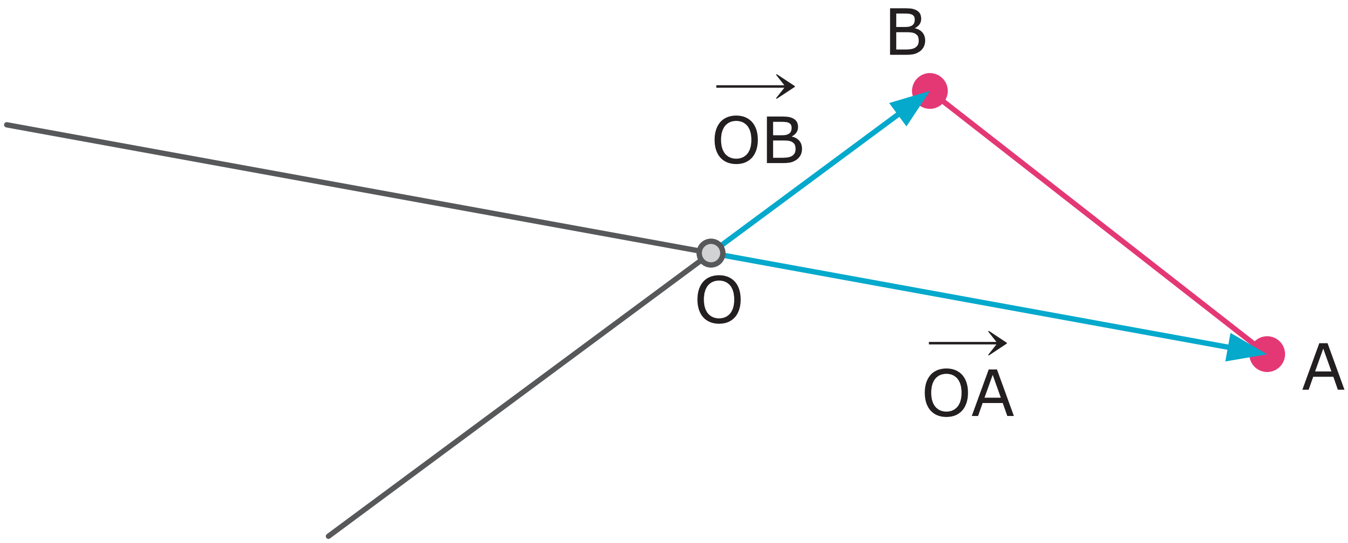
Utiliza tus materiales para desarrollar las actividades.

Ejemplo 5

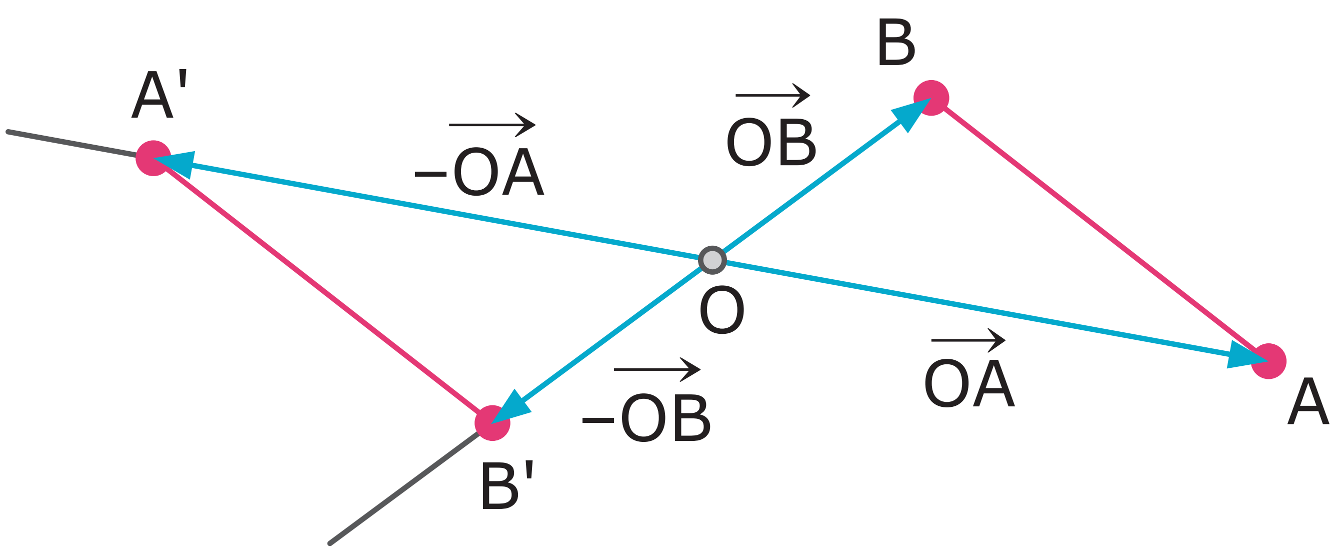
Construye mediante una homotecia la imagen del segmento $\overline{AB}$ considerando el centro de homotecia O y el factor k = −1.



Traza los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$. Luego, como el valor de k es negativo, dibuja un segmento de línea en sentido contrario a cada vector.

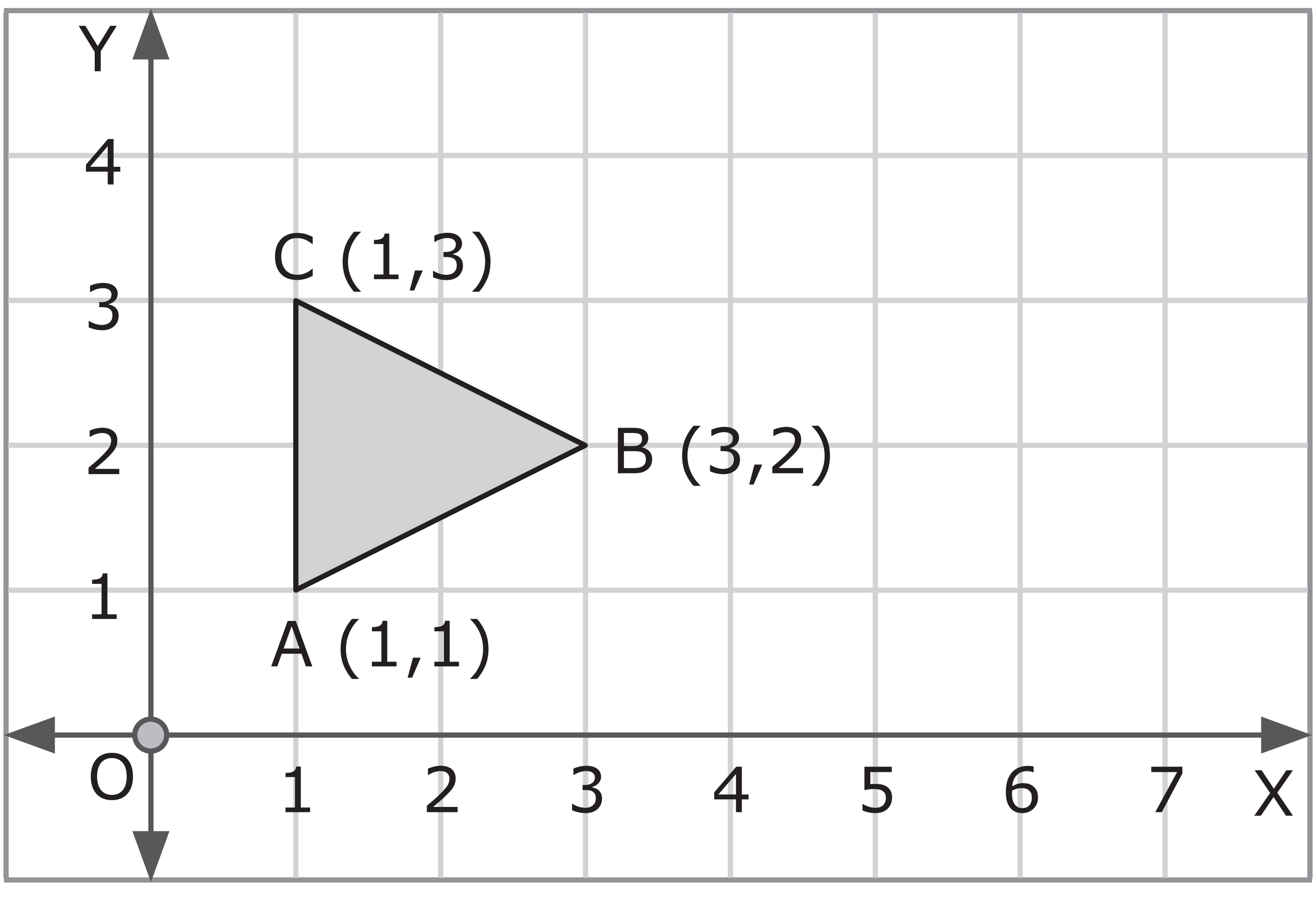


Considera la amplitud de los vectores y y traza los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, respectivamente. Así obtendrás el segmento $\overrightarrow{A'B'}$, como se muestra a continuación:



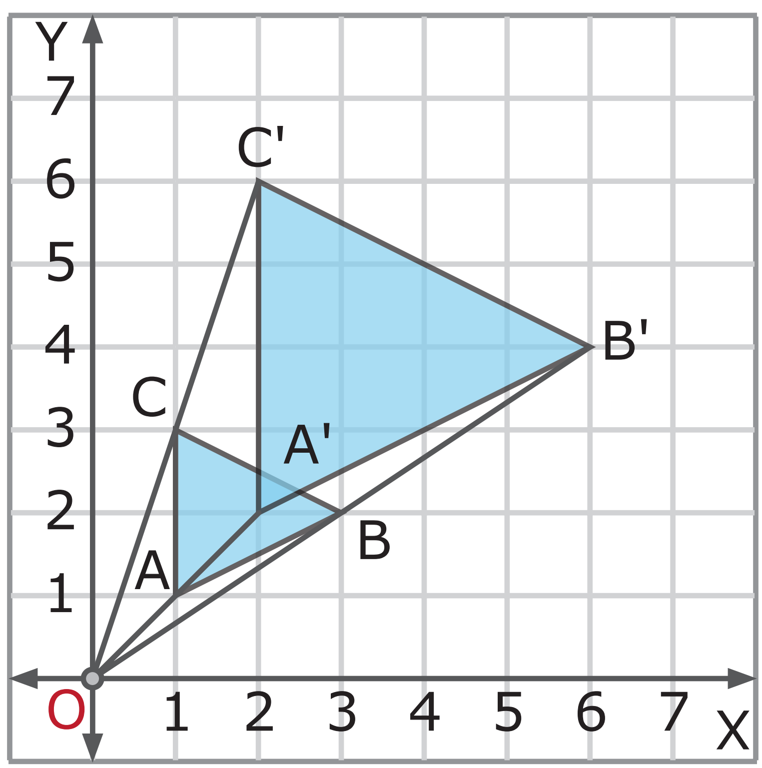
Ejemplo 6

En el plano cartesiano se representa el triángulo ABC. Si se le aplica una homotecia de centro O (0, 0) y razón de homotecia k = 2, ¿cuáles son las coordenadas de los vértices de la figura que resulta?



Se trazan los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$, que van desde el origen a cada uno de los vértices, y se multiplica cada uno por el escalar k, es decir:

$$k \bullet \overrightarrow{OA} = 2 \bullet (1, 1) = (2, 2)$$
$$k \bullet \overrightarrow{OB} = 2 \bullet (3, 2) = (6, 4)$$
$$k \bullet \overrightarrow{OC} = 2 \bullet (1, 3) = (2, 6)$$



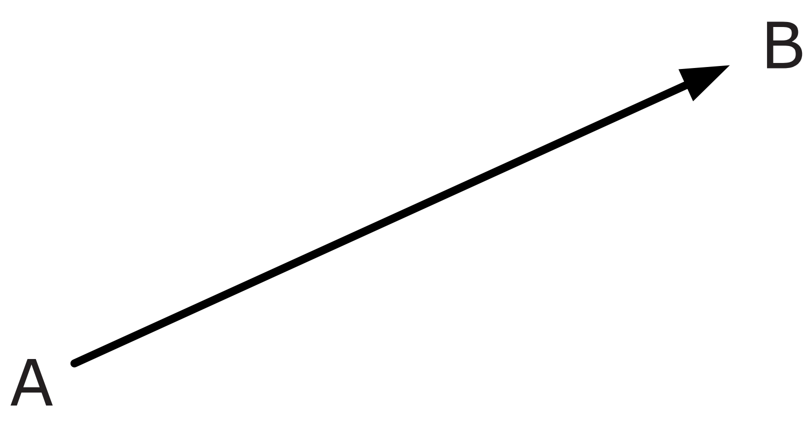
Luego, se trazan los nuevos vectores y se obtiene el triángulo A'B'C', cuyos vértices son:

A'(2, 2)   B'(6, 4)   C'(2, 6)

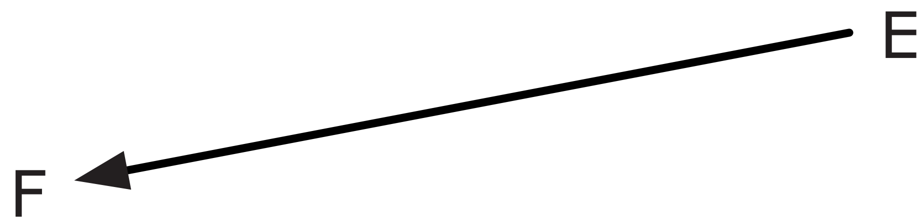
Actividades en tu cuaderno

1. Construye cada vector utilizando regla y compás, y explica el procedimiento a tus compañeros.

a. Construir $3\overrightarrow{AB}$ a partir de $\overrightarrow{AB}$.



b. Construir $-2\overrightarrow{EF}$ a partir de $\overrightarrow{EF}$.



2. Considera los puntos A(–3, 6) y O(0, 0) y realiza lo pedido.

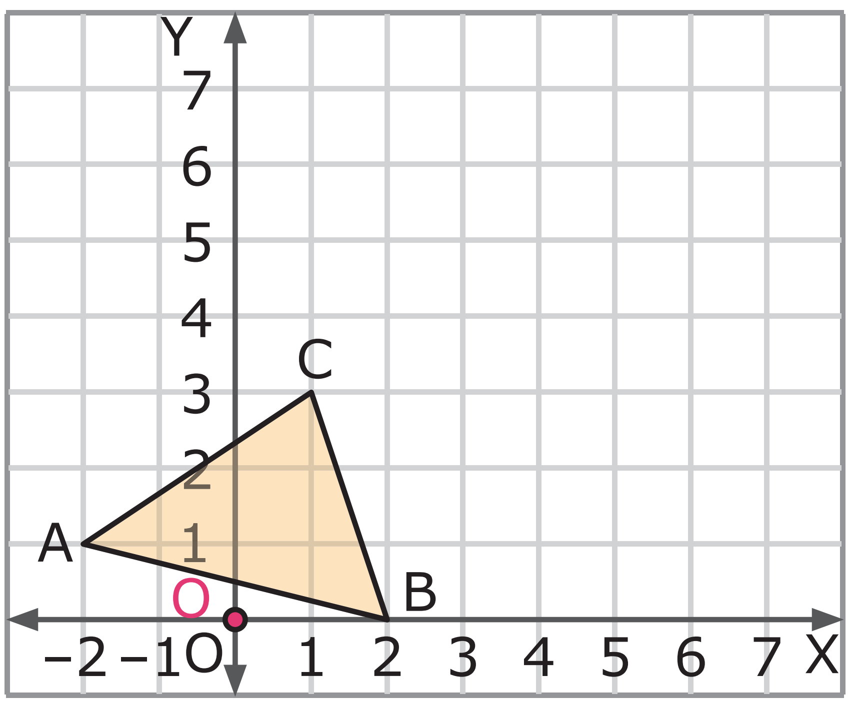
a. Construye el vector $\overrightarrow{OA}$.

b. Calcula las coordenadas del vector $3\overrightarrow{OA}$.

c. Determina la imagen del vector $3\overrightarrow{OA}$ que se obtiene mediante una homotecia de centro O(0,0) y razón de homotecia k = −3.

d. ¿Qué ocurrió con el sentido del vector $3\overrightarrow{OA}$ luego de aplicar la homotecia? Explica.

3. Analiza la figura, y luego resuelve.



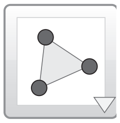
a. Aplica una homotecia al triángulo ABC considerando centro de homotecia O(0, 0) y razón k = –2.

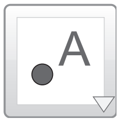
b. Aplica una homotecia al triángulo ABC considerando centro de homotecia O(0, 0) y razón k = 2.

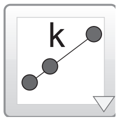
c. Aplica una homotecia al triángulo imagen A’B’C’ del ejercicio b. considerando centro de homotecia O(0, 0) y razón k = 0,5.

4. Realiza la siguiente actividad usando un software educativo. Puedes utilizar el software GeoGebra ingresando en el sitio:

https://www.geogebra.org/geometry.que. Luego, considera los siguientes pasos:

1º Haz clic en  y construye un polígono.

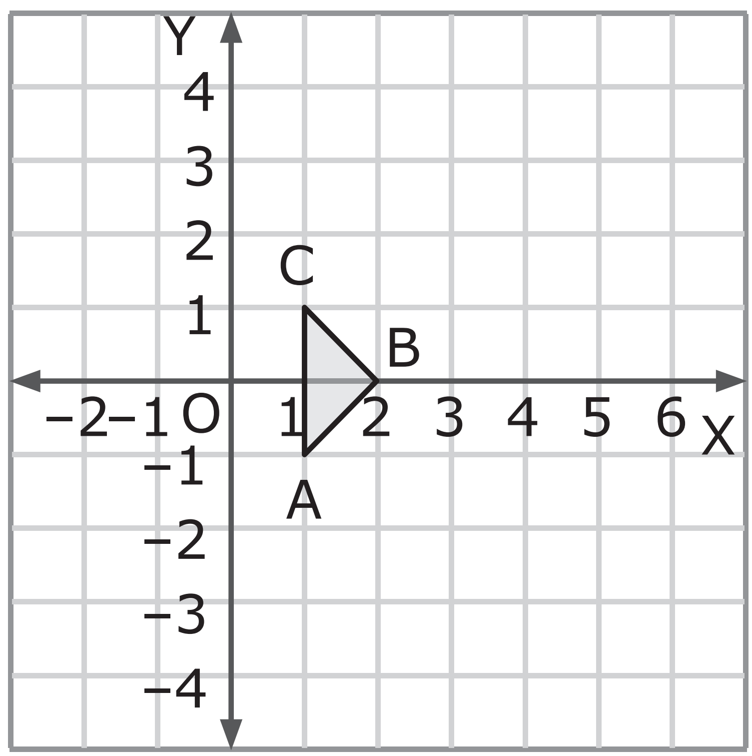
2º Con el botón  ubicas el centro de homotecia.

3º Con el botón  k haces clic en el centro de homotecia de la figura, y luego debes ingresar el valor de la razón de homotecia.

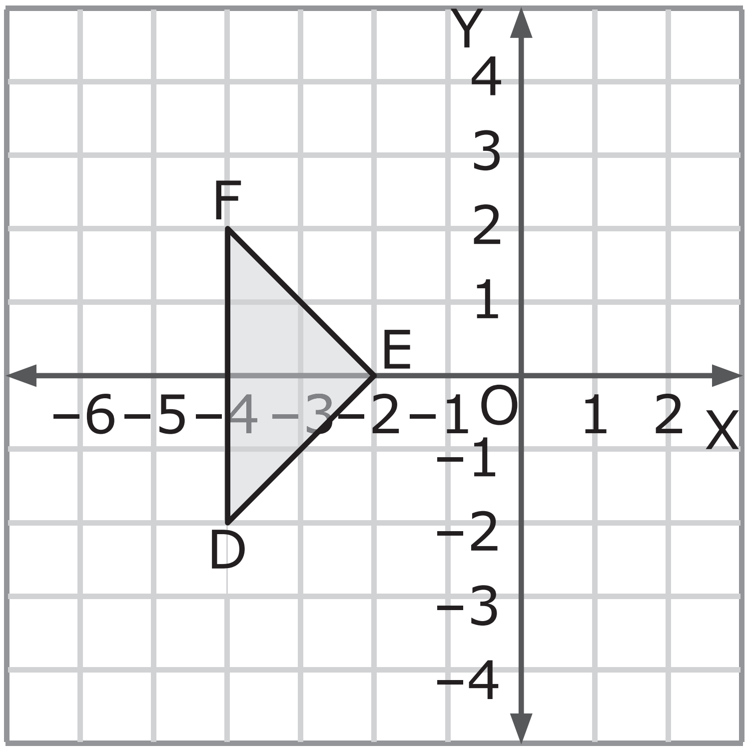
Construye un cuadrilátero de vértices A(–2, 4), B(–4, 4), C(–5, 1) y D(–1, 1), y luego aplica una homotecia de centro O(1, –1) y valor de la razón k = –0,5. ¿Cuáles son las coordenadas homotéticas de cada vértice?

5. Aplica una homotecia a cada figura. Para ello, considera que el valor de la razón es k.

a. Centro de homotecia O, k = 2,5.



b. Centro de homotecia O, k = −0,5.

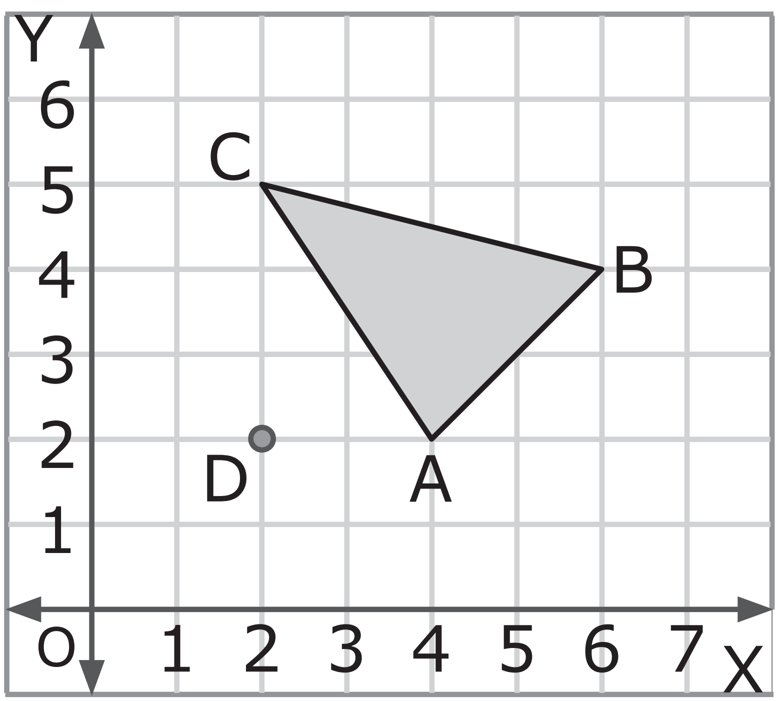


6. Analiza la figura, y luego responde. Considera el centro de homotecia D(2, 2).

a. Aplica una homotecia de razón k = 2,5.

b. Aplica una homotecia de razón $k = -2,5$.

c. Aplica una homotecia de razón $k = 2$.
Explica cómo desarrollaste los ejercicios a tus compañeros.



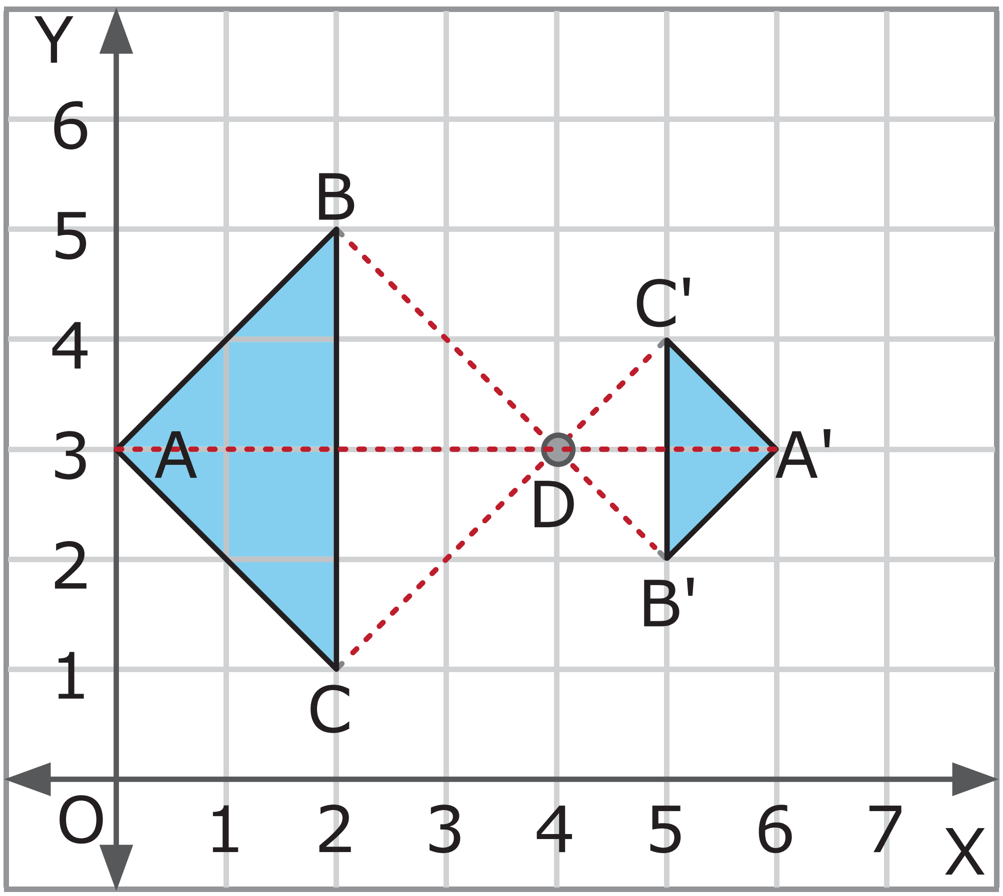
7. Resuelve el siguiente problema.

A un triángulo de vértices A (–2, 4), B (–4, 6) y C (–4, 2) se le aplica una homotecia de centro O y valor de razón k, obteniéndose como imagen otro triángulo de vértices A’(4, 4), B’(8, 0) y C’(8, 8).

a. ¿Cuáles son las coordenadas del centro O?

b. ¿Cuál es el valor de razón de homotecia?

8. Evalúa si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas respecto de la homotecia que se muestra. Justifica tu respuesta.



a. D es el centro de homotecia.

b. La razón de homotecia es $-\frac{1}{2}$

c. $\overrightarrow{DC} = 2 \bullet \overrightarrow{DC'}$

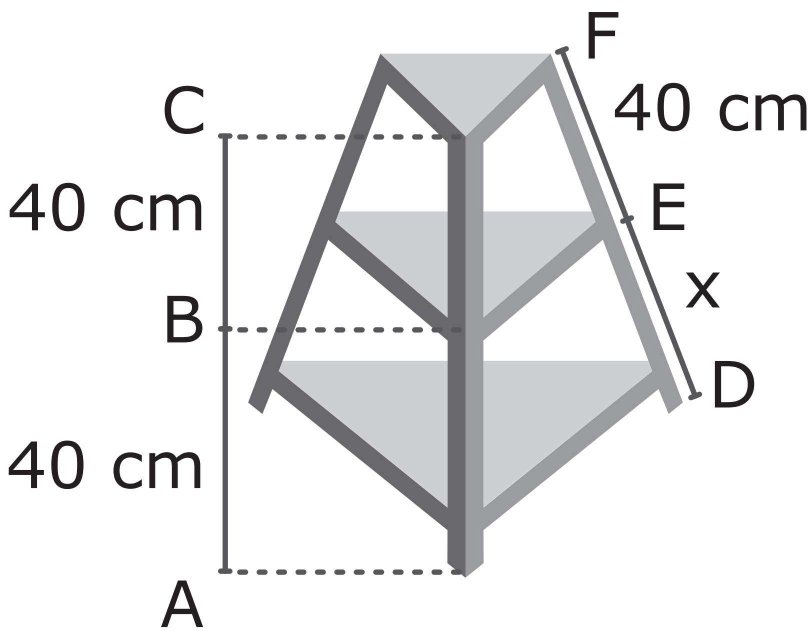
Cuaderno de Actividades
Páginas 1461 a 1483

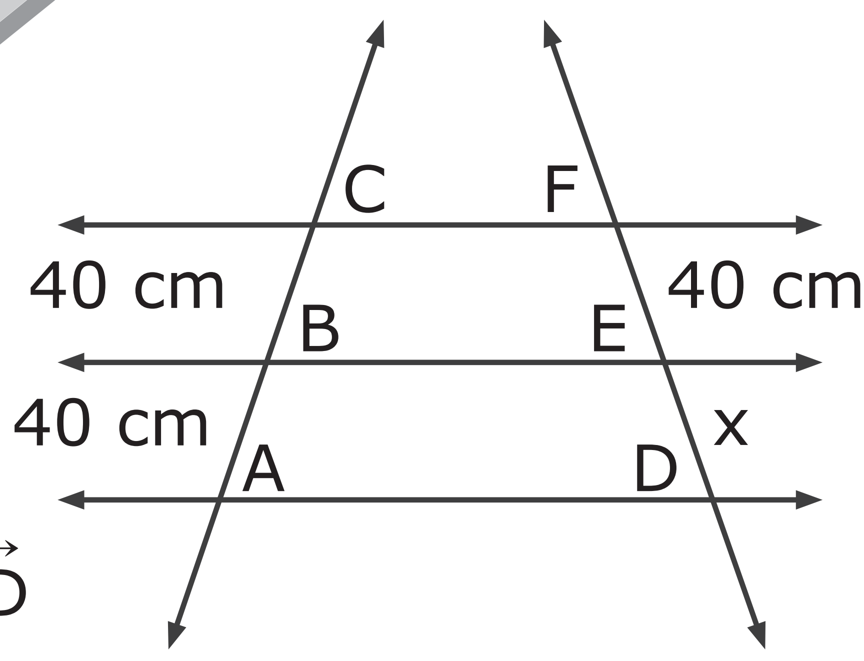
Cierre

- ¿Crees que el visualizar los vectores y las figuras en el plano cartesiano te ayuda a comprender mejor los contenidos? Comenta con tus compañeros.

TEOREMA DE TALES

Alicia está confeccionando un mueble y quiere calcular una de sus medidas. Para ello, realiza el siguiente dibujo con las dimensiones del mueble:





$\overleftrightarrow{CF} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{AD}$

- ¿Cuál es el valor de las razones CB **:** BA y CB **:** CA?

- ¿Cuál es la expresión que representa la medida de $\overrightarrow{FD}$?

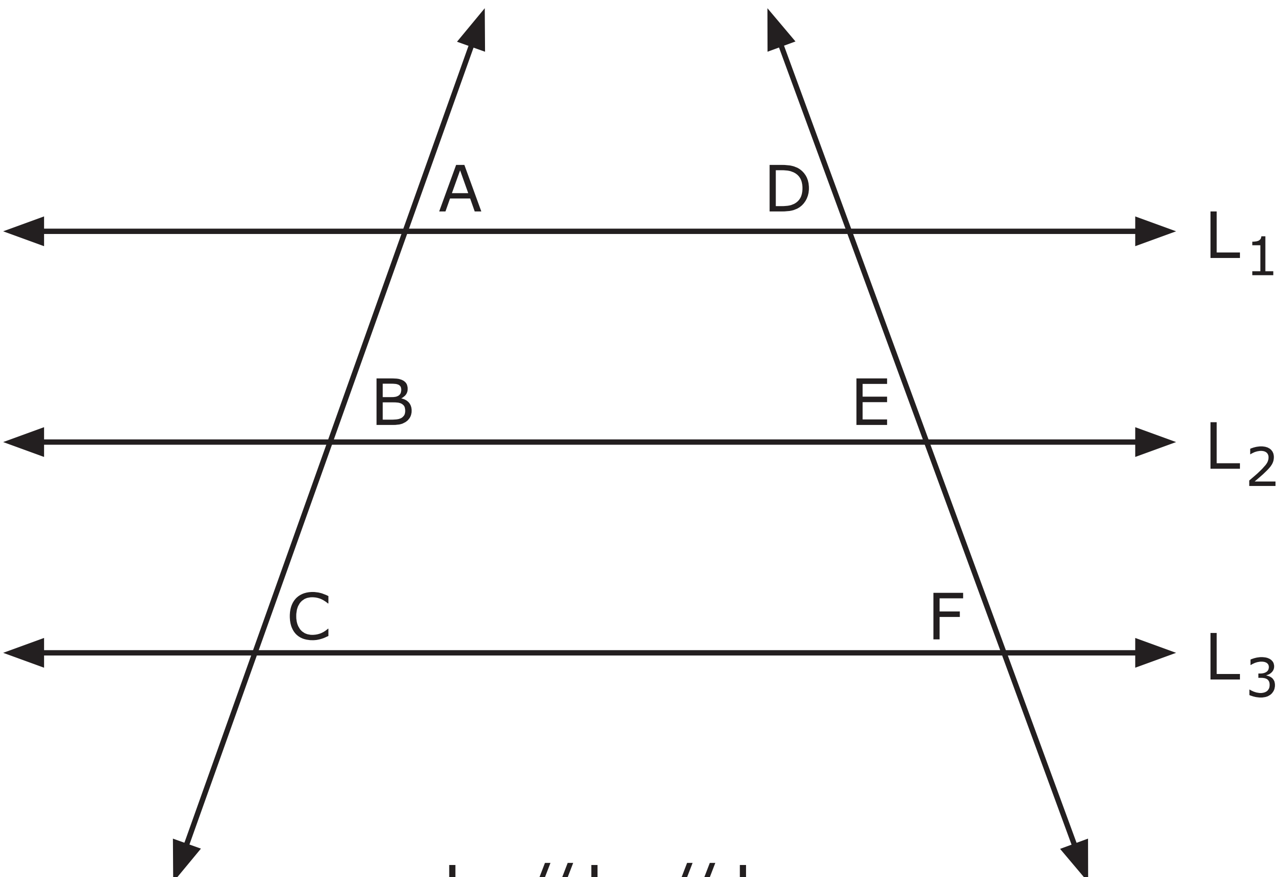
- Determina las siguientes proporciones y calcula el valor de x. Luego, explica por qué es importante considerar que $\overrightarrow{CF}$ // $\overrightarrow{BE}$ // $\overrightarrow{AD}$.

$$\frac{CB}{BA} = \frac{FE}{ED}$$

$$\frac{CB}{CA} = \frac{FE}{FD}$$

Ejemplo 1

En la figura se tiene que AB = 4 cm, DE = 3 cm y AC = 9 cm. Determina la medida del segmento $\overline{EF}$.



$L_1 // L_2 // L_3$

Como AC = 9 cm y AB = 4 cm, entonces, BC = 5 cm. Así, se tiene lo siguiente:

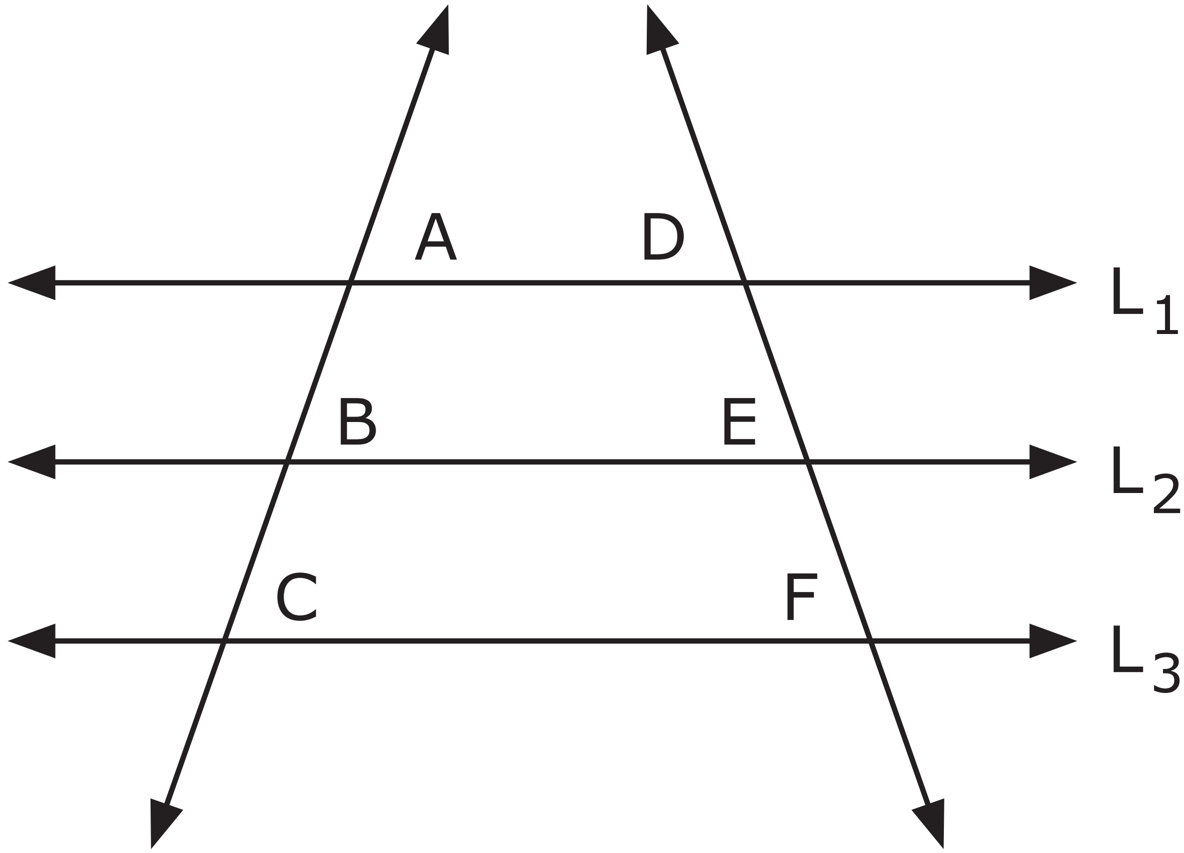
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \rightarrow 4 \bullet EF = 3 \bullet 5 \rightarrow$$

$$EF = \frac{15}{4} = 3{,}75$$

Luego, la medida del segmento $\overline{EF}$ es de 3,75 cm.

El **teorema de Tales** establece que si dos o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales, entonces, las medidas de los segmentos determinados sobre las secantes son proporcionales.

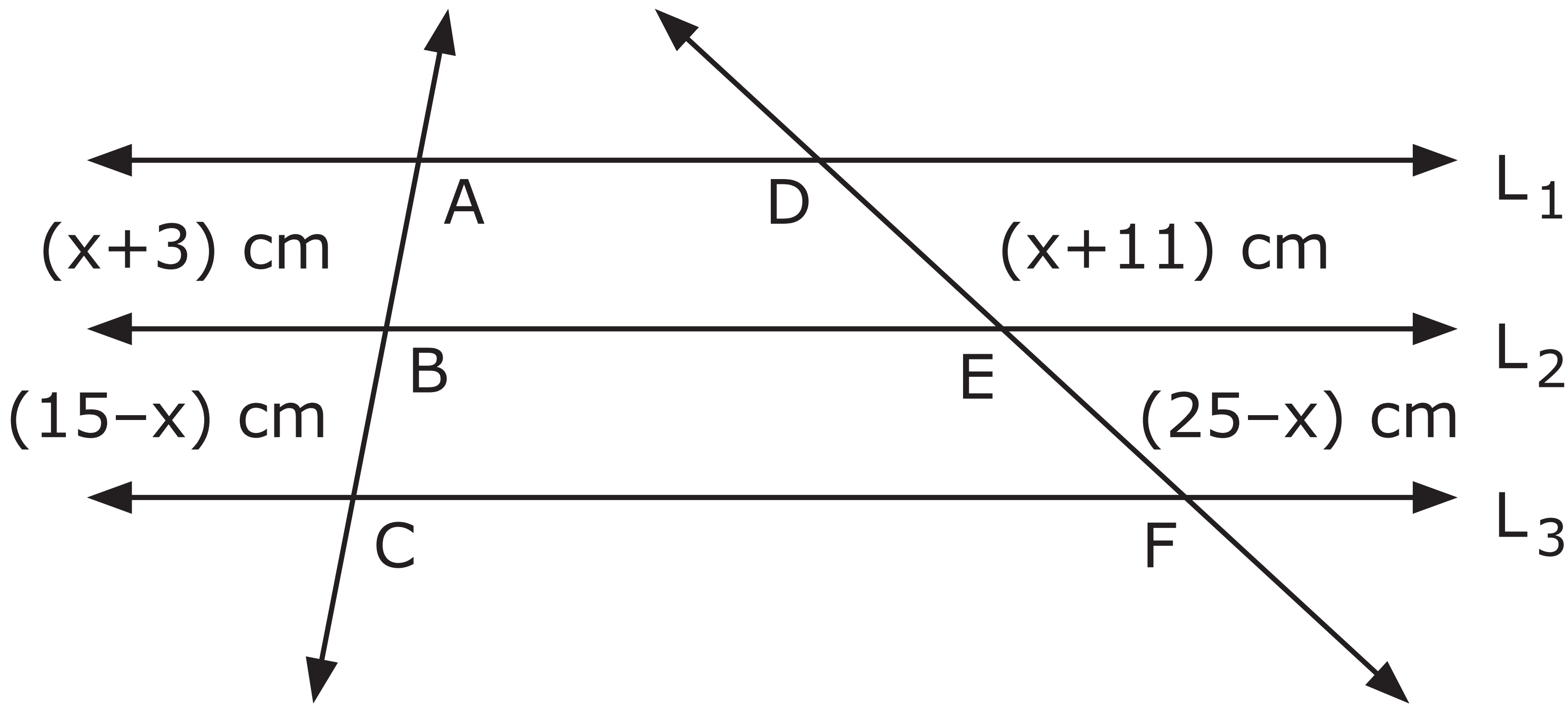
Si L 1 // L 2 // L 3 se tiene que:



$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ o de manera equivalente $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ y $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$

Ejemplo 2

En la figura L1 // L2 // L3. ¿Cuál es la medida del segmento $\overline{BC}$?



Del teorema del Tales se tiene la siguiente proporción:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \rightarrow \frac{x+3}{x+11} = \frac{15-x}{25-x} \rightarrow$$

$$(x + 3)(25 - x) = (x + 11)(15 - x)$$

$$25x - x^2 + 75 - 3x = 15x - x^2 + 165 - 11x$$

$$22x - x\ 2 + 75 = 4x - x\ 2 + 165$$

$$18x = 90$$

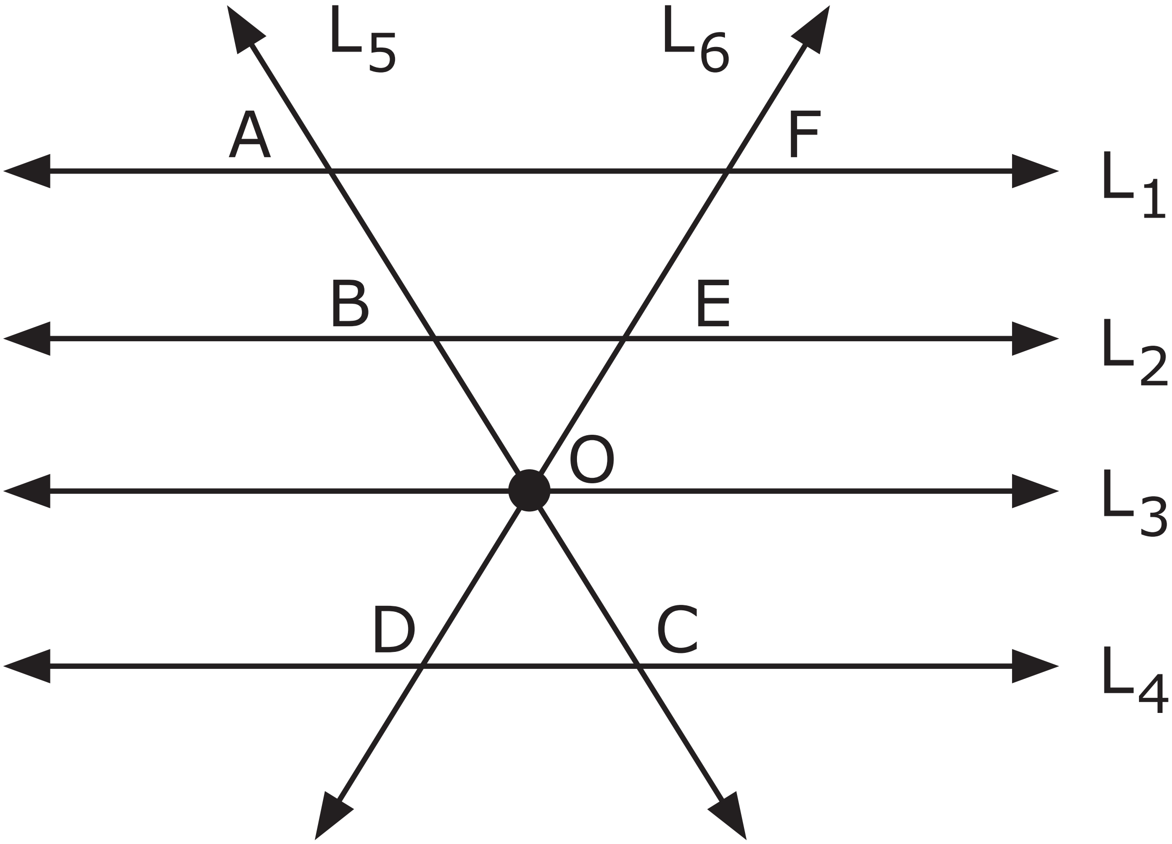
$$x = 5$$

El valor de x es 5, por lo que el segmento $\overline{BC}$ mide (15 – x) cm = (15 – 5) cm = 10 cm.

Corolario: Proposición que no necesita prueba particular y se deduce con facilidad de lo demostrado previamente.

Corolario del teorema de Tales: Si los lados de un ángulo o sus prolongaciones se cortan con varias rectas paralelas, las medidas de los segmentos que se determinan en los lados del ángulo son proporcionales.

L 1 // L 2 // L 3 // L 4



$$\frac{FE}{AB} = \frac{EO}{BO} = \frac{OD}{OC}$$

Ejemplo 3

En la figura se tiene que AO = 16 cm, OD = 10 cm y OC = 30 cm. Determina la longitud del segmento $\overline{BC}$.

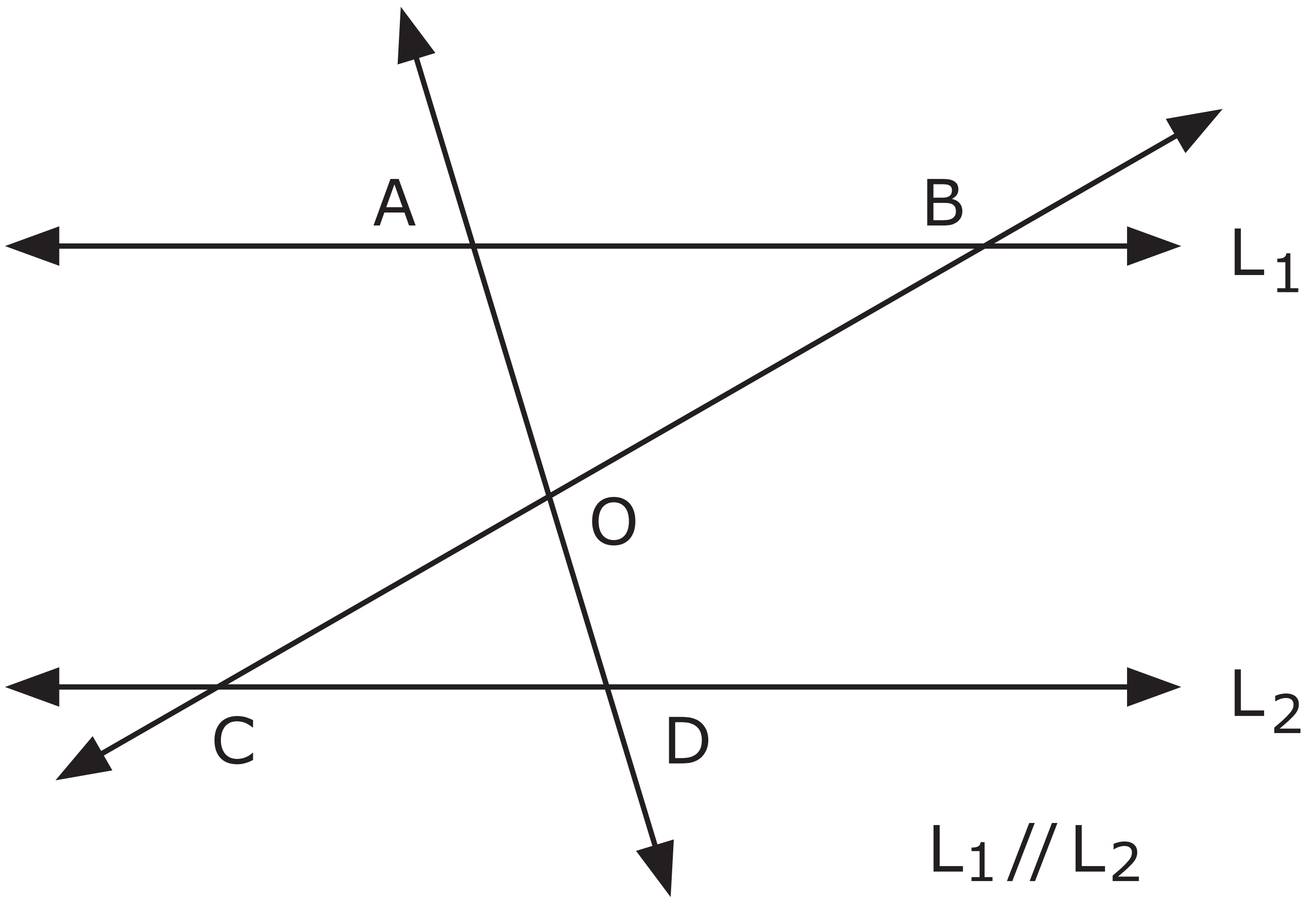
Aplicando el corolario del teorema de Tales, se tiene la siguiente proporción:

$$\frac{AO}{BO} = \frac{OD}{OC} \rightarrow \frac{16}{BO} = \frac{10}{30}$$

Al resolver se obtiene:

$$\frac{16}{BO} = \frac{10}{30} \rightarrow BO\,\frac{16 \bullet 30}{10} = \frac{480}{10} = 48$$

El segmento $\overline{BO}$ mide 48 cm y como BC = BO + OC, se tiene que BC = (48 + 30) cm = 78 cm.



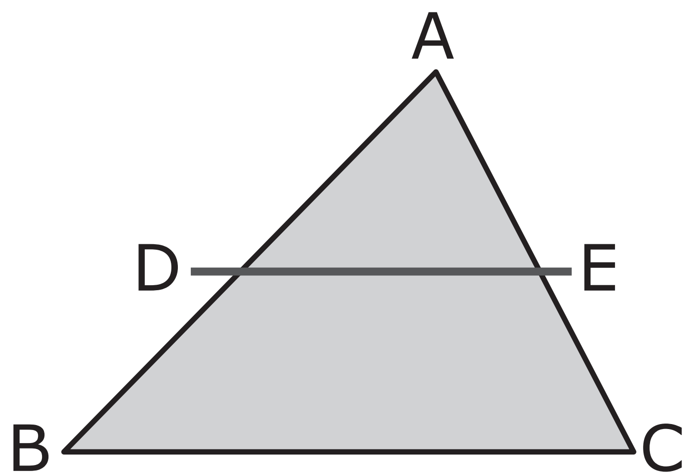
Actividades en tu cuaderno

Considera la figura del **Ejemplo 3** y responde.

1. Si AO = 4 cm, BO = 6 cm y OD = 2 cm, ¿cuál es la medida de $\overline{OC}$?

2. Si OD = 12 cm, BO = 35 cm y OC = 21 cm, ¿cuál es la medida de $\overline{AD}$?

El **teorema particular de Tales** establece que si se traza una recta paralela a un lado de un triángulo, entonces, los segmentos determinados sobre los otros dos lados son proporcionales.



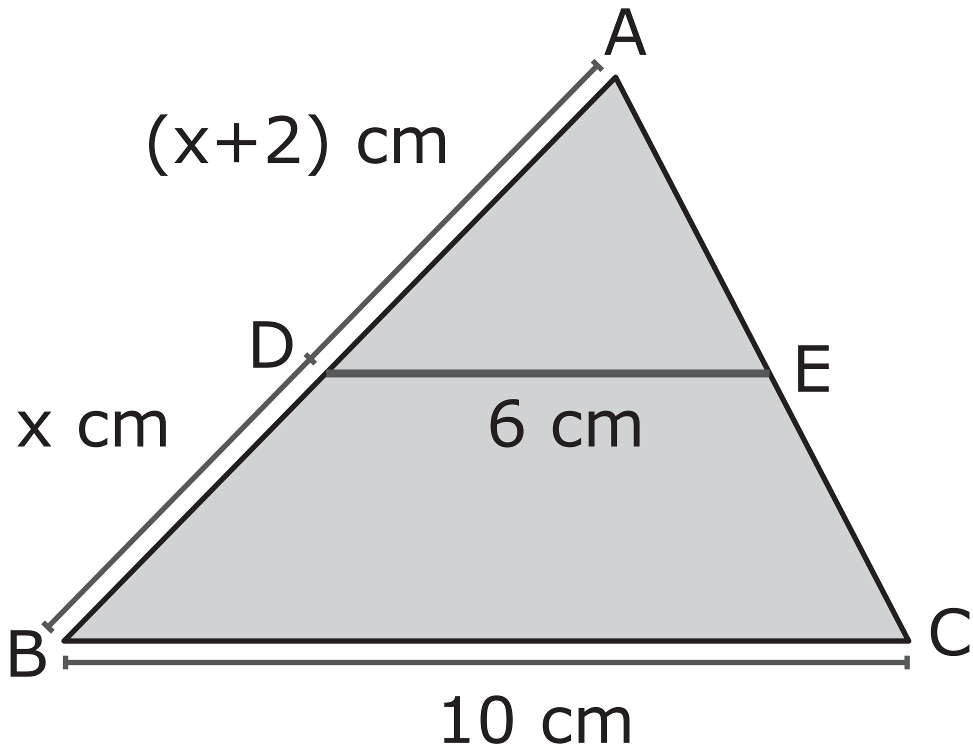
Si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, entonces, se cumplen las siguientes proporciones:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \qquad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \qquad \frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BC}$$

El **recíproco del teorema particular de Tales** establece que si una recta corta dos lados de un triángulo y los divide en segmentos proporcionales, entonces, esa recta es paralela al otro lado del triángulo.

Ejemplo 4

En el triángulo ABC se tiene que $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$. ¿Cuál es la medida del lado $\overline{AB}$?



Por el teorema particular de Tales tenemos que $\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BC}$.

Luego, reemplazamos los valores y resolvemos.

$$\frac{x+2}{6} = \frac{x+2+x}{10} \rightarrow$$

$$10(x + 2) = 6(2x + 2)$$
$$10x + 20 = 12x + 12$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

Luego, $AB = (2x + 2)$ cm $= (2 \bullet 4 + 2)$ cm $= 10$ cm.

Para **dividir interiormente un segmento** $\overline{QR}$ en la razón r se necesita encontrar un punto P en este segmento, de manera que el valor de la razón entre $\overline{QP}$ y $\overline{PR}$ sea igual a r, es decir:

$$\frac{QP}{PR} = r$$

Para **dividir exteriormente un segmento** $\overline{QS}$ en la razón r, se necesita encontrar un punto P en la prolongación del segmento $\overline{QS}$, de manera tal que la razón entre $\overline{QS}$ y $\overline{SP}$ sea igual a r, es decir: $\frac{QP}{SP} = r$. Se tienen dos casos:

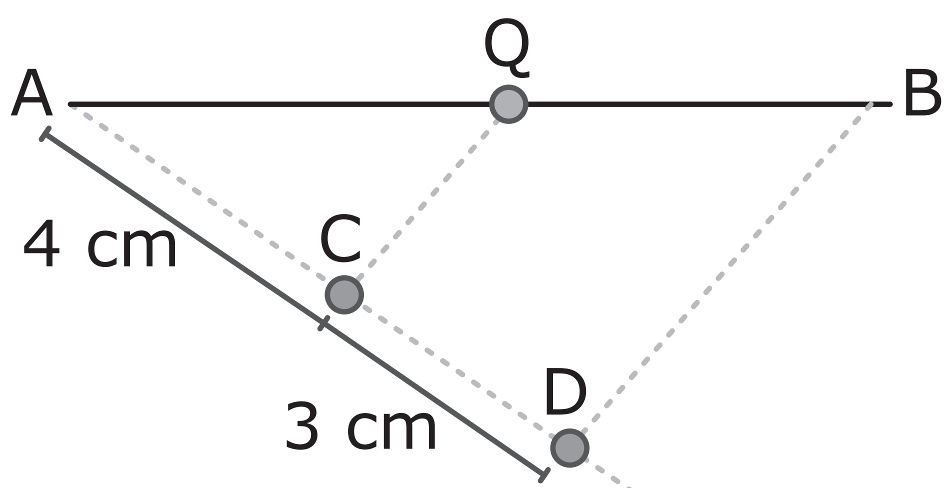
- $0 < r < 1$

- $r > 1$

Ejemplo 5

Divide un segmento $\overline{AB}$ de longitud 8 cm en dos partes que estén en la razón r = 4 **:** 3.

Para resolver, se debe encontrar un punto Q tal que $\frac{AQ}{QB} = 4 = r$.

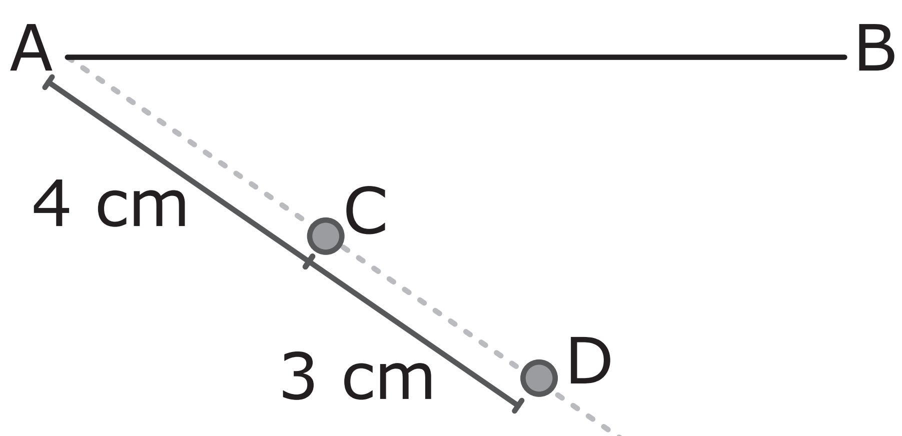


Desde A traza un rayo y determina un segmento que mida 4 cm y otro de 3 cm.

Une el punto D con B. Luego, construye una paralela al segmento $\overline{DB}$ que comience en C y corte al segmento $\overline{AB}$. El punto de intersección es el punto Q buscado.

Finalmente, por el teorema particular de Tales se tiene que:

$$\frac{AQ}{QB} = \frac{AC}{CD} = \frac{4}{3} = r$$



Ejemplo 6

Al dividir exteriormente el segmento $\overline{QS}$ ubicado el punto P, en la razón 7 **:** 2, se tiene la situación que se presenta en la siguiente figura.

Calcular la medida de x.

Se tiene que $r = \dfrac{7}{2}$, además $\dfrac{QP}{SP} = r$, luego se tiene la siguiente proporción:

$$\frac{QP}{SP} = \frac{7}{2} \rightarrow \frac{25+x}{x} = \frac{7}{2} \rightarrow$$

$$2(25+x) = 7x \rightarrow x = 10 \text{ cm}$$

Actividades en tu cuaderno

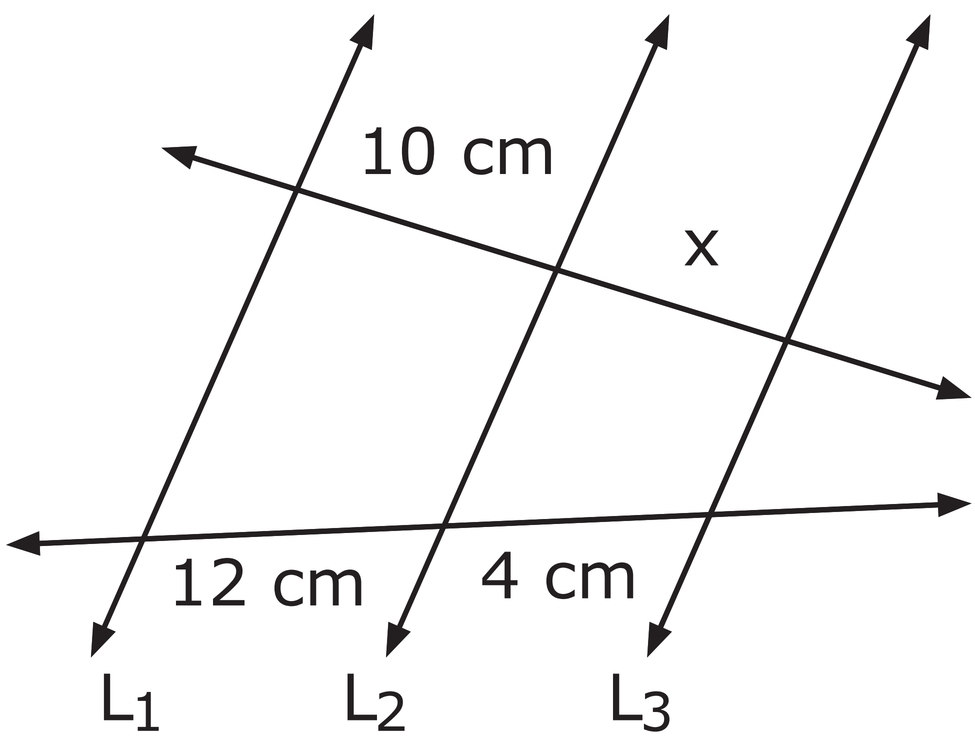
1. Considera los datos del **Ejemplo 5** y explica cómo determinarías la longitud de los segmentos $\overline{AQ}$ y $\overline{QB}$ si $\overline{AB}$ mide 10,5 cm.

2. Actividad de profundización. Investiga en qué consiste la división armónica de un trazo.

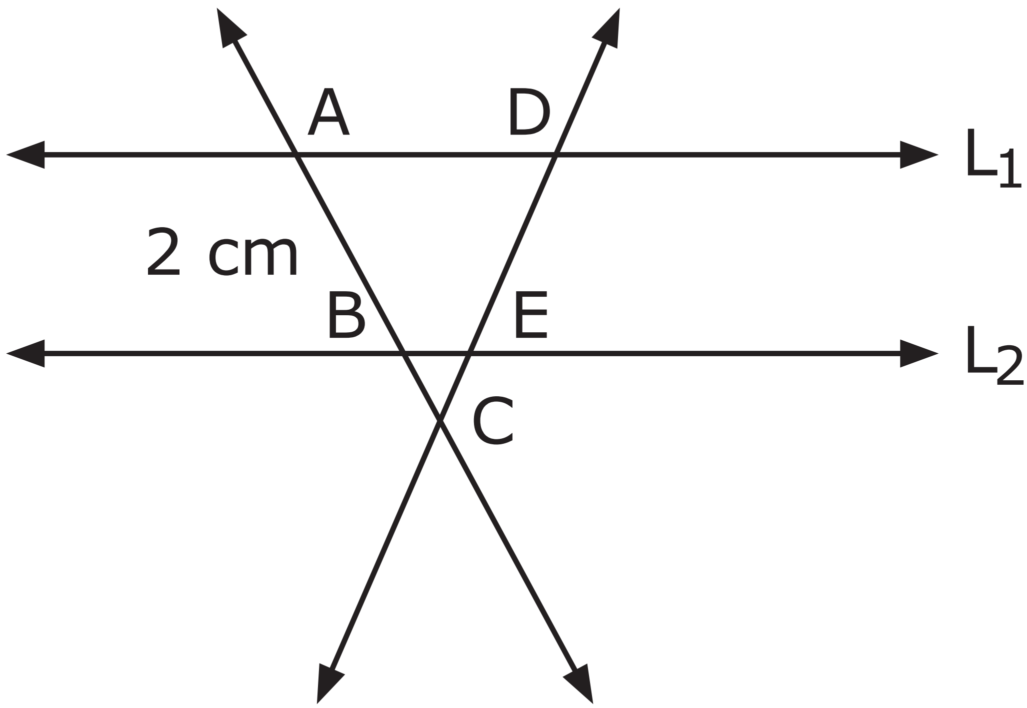
Actividades en tu cuaderno

1. Calcula la medida solicitada en cada caso. Considera que L1 // L2 // L3

a. Calcula x.



b. BC = 0,8 cm, DC = 2,24 cm. Calcula la medida de $\overline{DE}$.



2. Divide interiormente un segmento en la razón dada en cada caso.

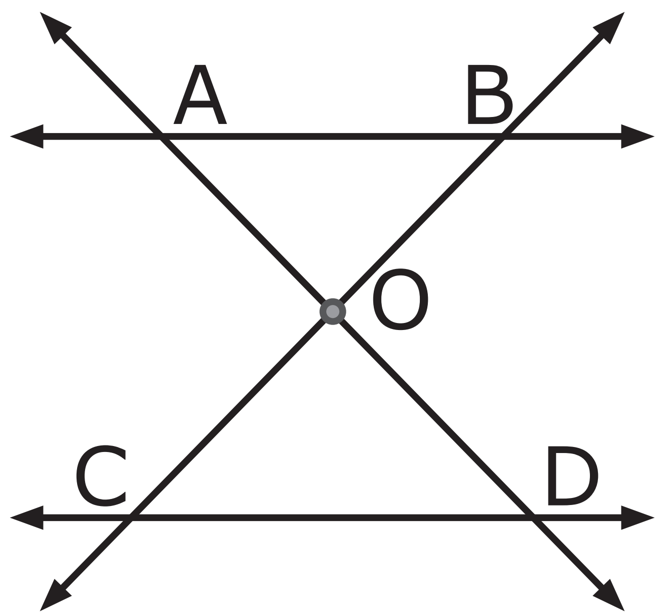
a. Razón 2 **:** 1

b. Razón 3 **:** 2

c. Razón 4 **:** 2

d. Razón 5 **:** 3

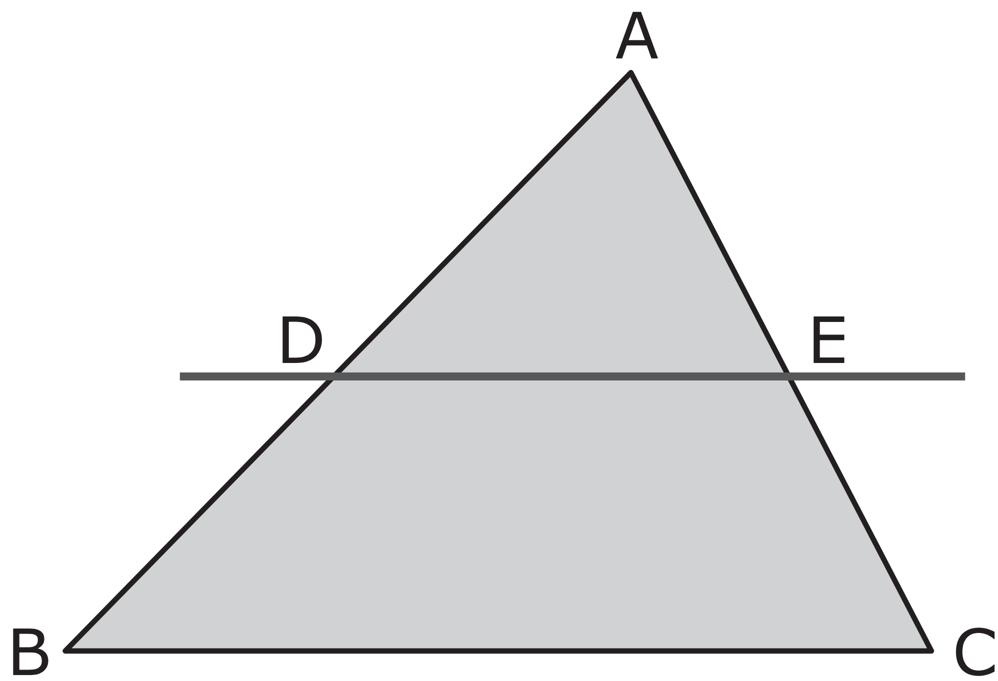
3. Observa la figura y resuelve los siguientes problemas. Considera que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.



a. Determina OB + OA sabiendo que AD = 35 cm, CO = 12 cm y OB = 18 cm.

b. Determina la medida del segmento $\overline{CO}$ si se sabe que CB = 30 cm y AO : OD = 4 : 6

4. Observa la figura y resuelve los siguientes problemas.



$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

a. Determina el valor de $p \in Q$ si se sabe que $AD = 2p$ cm, $DB = (p + 2)$ cm, $AE = (2p - 3)$ cm y $EC = p$ cm.

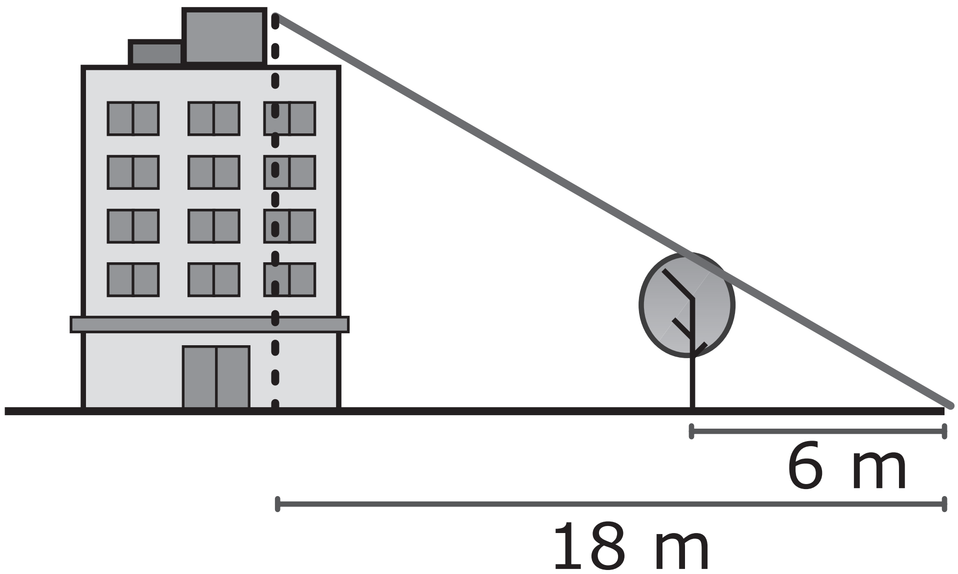
b. Si x ∈ Q, determina la longitud del segmento $\overline{BC}$ si se sabe que AD = x cm, DE = (2x – 2) cm, AB = (x + 3) cm y BC = 2x cm.

5. Resuelve el siguiente problema.

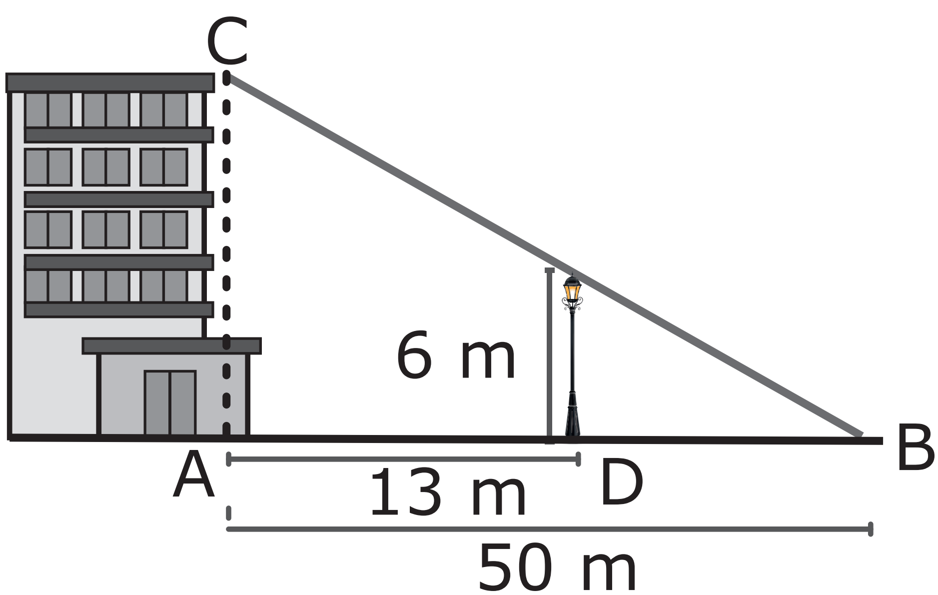
Un segmento $\overline{QR}$ se ha dividido interiormente ubicando un punto P sobre él en la razón 4 **:** 7, como se muestra a continuación. ¿Cuáles son las medidas de los segmentos $\overline{PR}$ y $\overline{QR}$?

6. Resuelve los siguientes problemas.

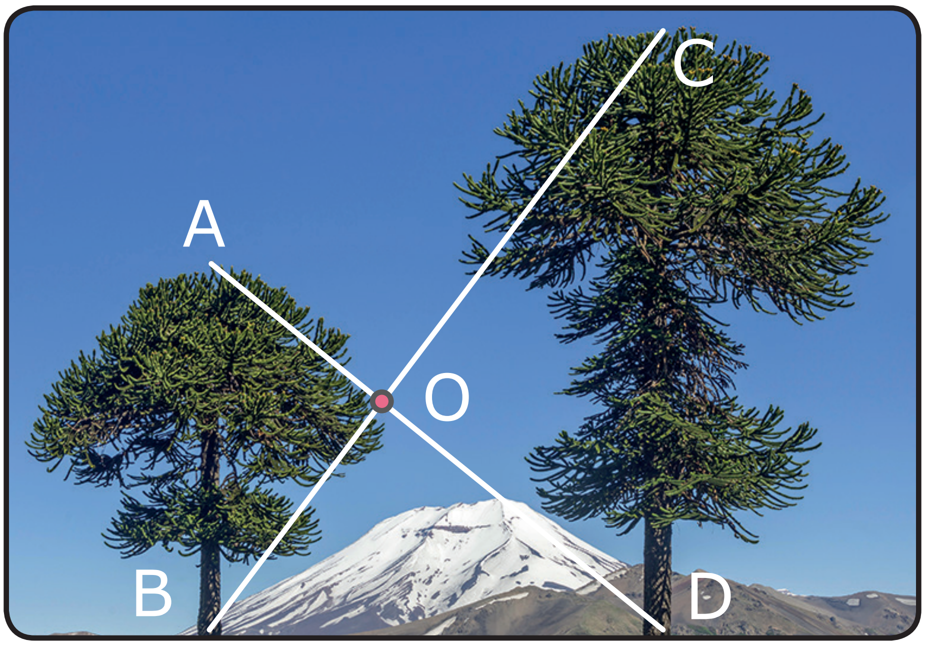
a. Si la altura del árbol en la figura es de 4 m, ¿cuánto mide el edificio?



b. ¿Cuál es la altura del edificio que se muestra en la imagen?



7. **Ecología.** Junto con un compañero, analicen la siguiente información y respondan.



Las dos araucarias de la imagen son paralelas entre sí y perpendiculares a la superficie del suelo.

Calculen la altura de la araucaria más alta si se sabe que la otra araucaria mide 7,5 m, BO = 6 m y OC = 10 m.

Cuaderno de Actividades
Páginas 1484 a 1514

Cierre

- ¿Utilizaste representaciones para aplicar el teorema de Tales? ¿Qué requisito es necesario para ello?, ¿por qué? Explica.

Síntesis

En las páginas tratadas anteriormente has estudiado:

► **Homotecia**

Transformación de una figura según un factor $k \neq 0$ y un centro O. Se clasifican en homotecia directa ($k > 0$) y homotecia inversa ($k < 0$).

► Homotecia vectorial

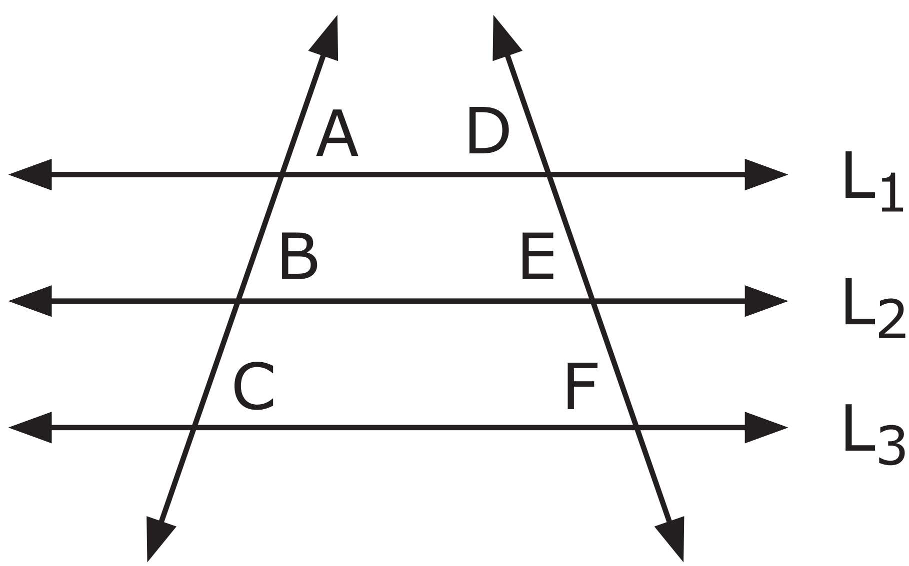
Al multiplicar un vector por un escalar α se obtiene:

$$\alpha \bullet \vec{u} = \alpha \bullet (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

► Teorema de Tales

Si L1 // L2 // L3, entonces, se cumple que:

$$\frac{AD}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$



Responde:

¿En qué situaciones pudiste aplicar la homotecia y el teorema de Tales? Nombra 2 ejemplos y comparte tu respuesta con tus compañeros.

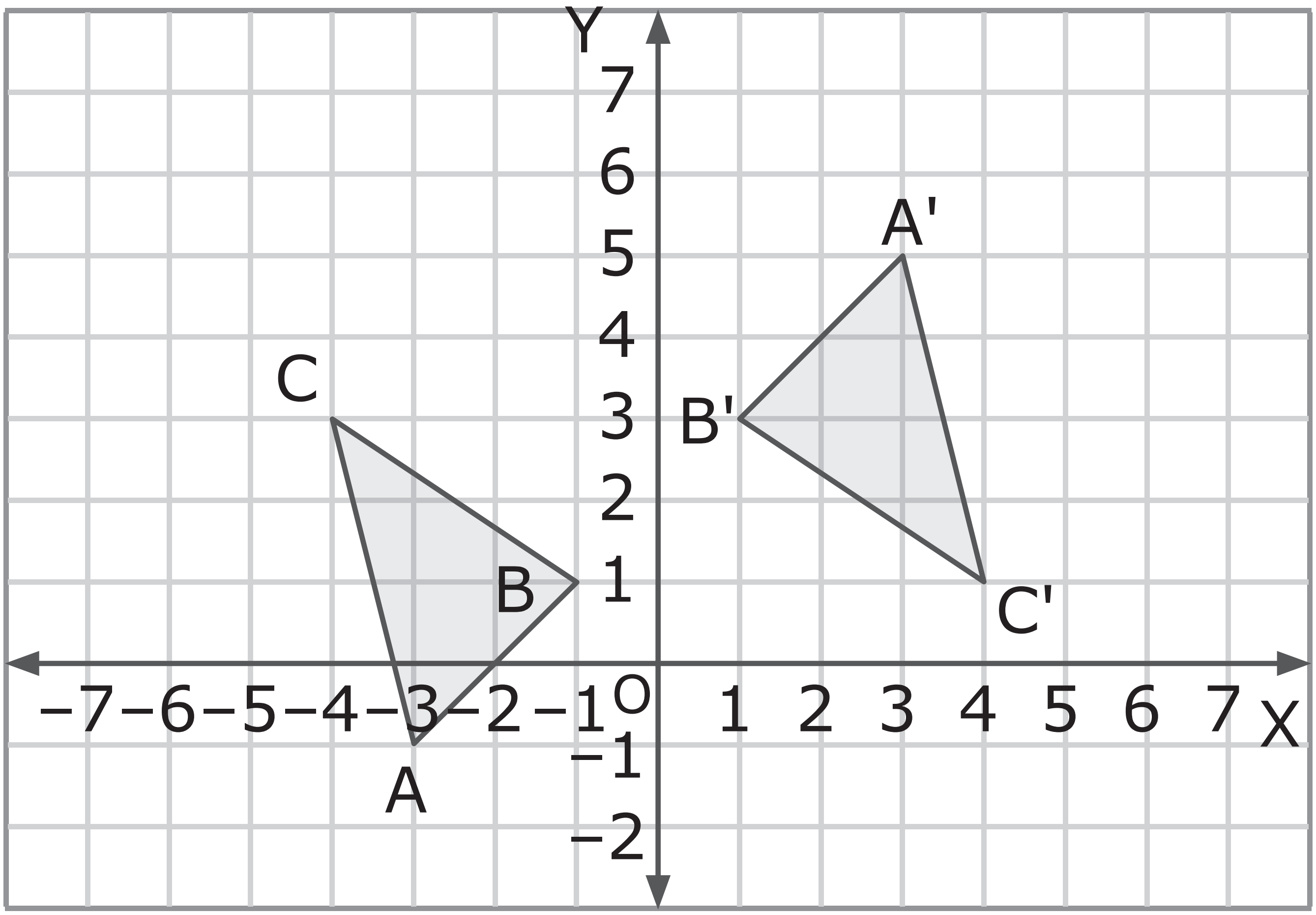
¿Cómo vas?

Evaluación Lección 8

Desarrolla las siguientes actividades en tu cuaderno.

1. Analiza la siguiente figura y responde.

Determina el centro de homotecia O y la razón de homotecia k que transforma el triángulo ABC en el triángulo A’B’C’.

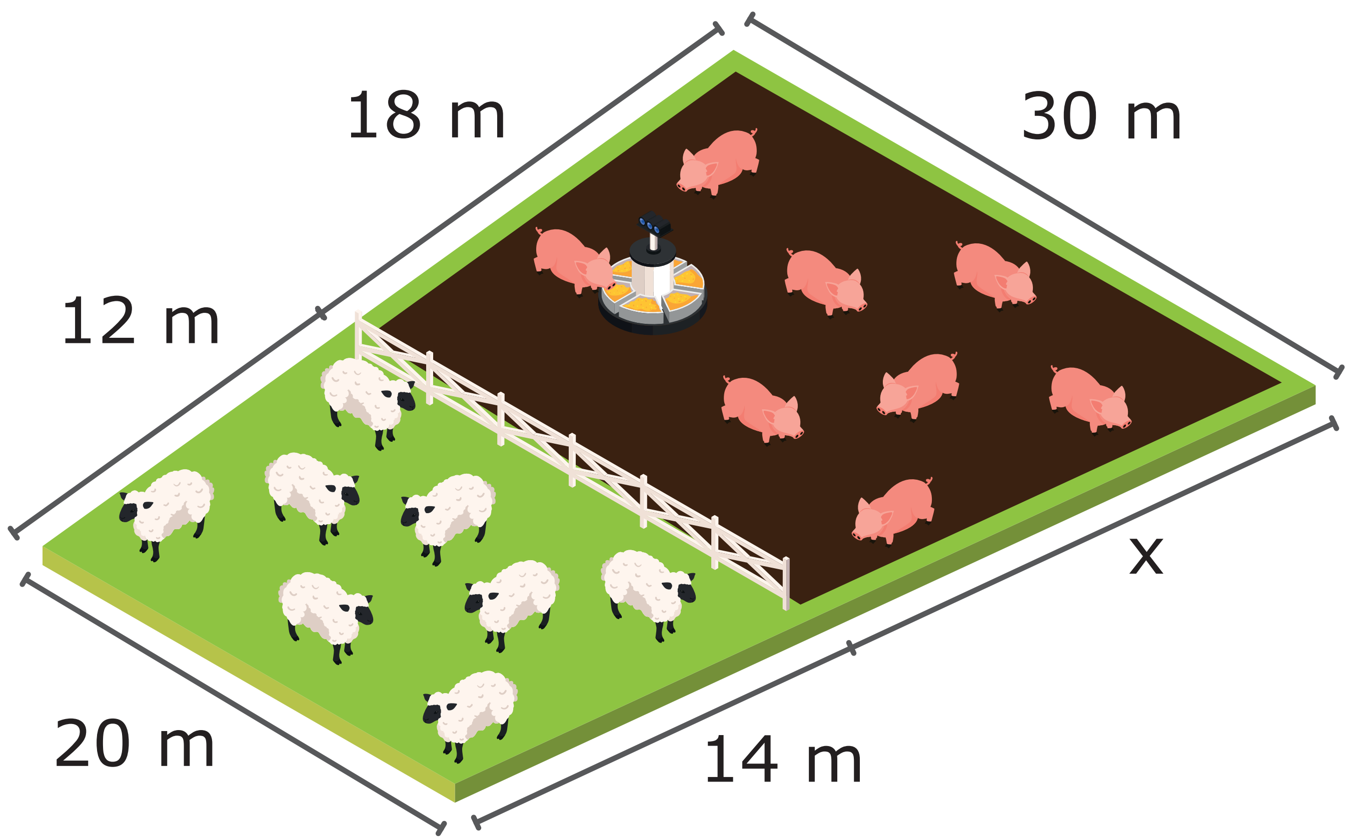


2. Decide si la siguiente aseveración es verdadera o falsa. **Justifica** tu respuesta.

A un triángulo con vértices A(−2, −1), B(2, −1) y C(0, 4) se le aplica una homotecia de centro O(0, 0) y razón de homotecia k = 1,5, entonces, las coordenadas de los vértices del triángulo homotético son A′ $(3, \frac{3}{2})$, B′ $(-3, \frac{3}{2})$ y C′ (0, −6).

3. Resuelve el siguiente problema.

Un agricultor desea instalar una nueva cerca alrededor de su parcela autosustentable en la que cría cerdos y ovejas. Tiene las medidas de casi todos los lados que necesita cercar, con excepción de una sección. Si se sabe que la cerca y los lados que miden 20 m y 30 m son paralelos, determina la longitud del segmento desconocido x. ¿Cuántos metros de cerca deberá comprar en total?

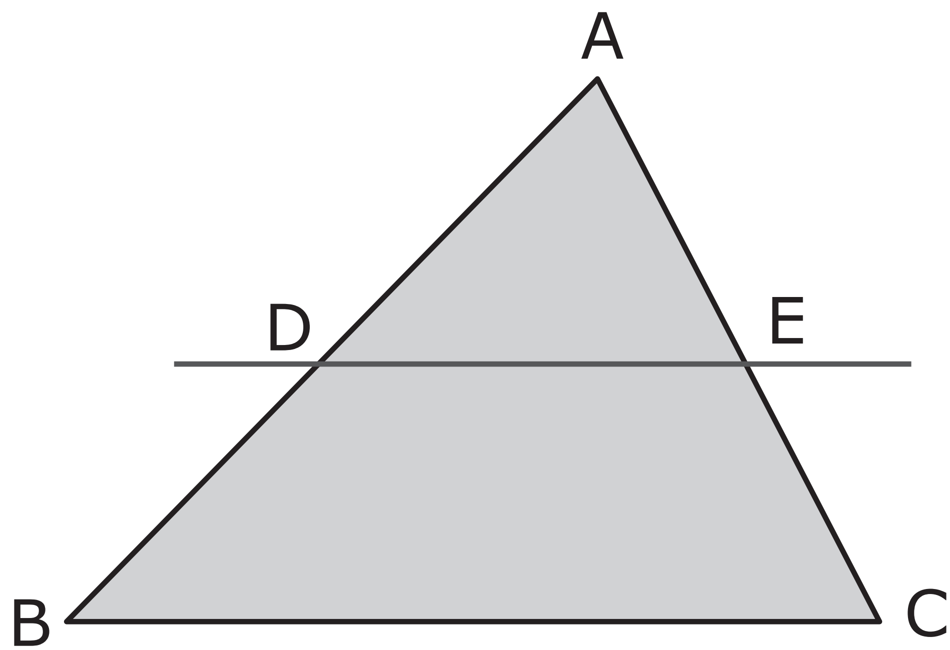


4. Explica a tus compañeros los enunciados de los teoremas de Tales y muéstrales ejemplos en cada caso.

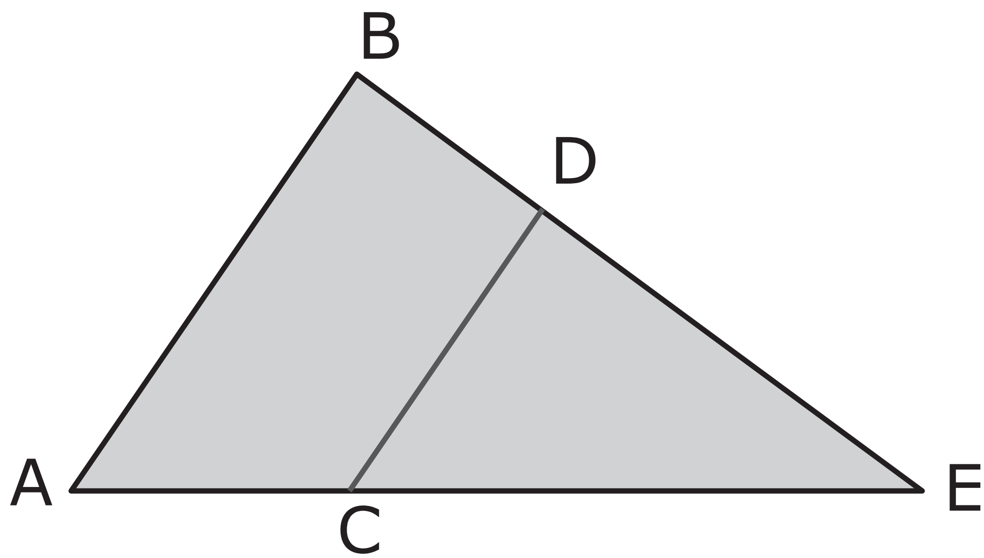
5. Analiza las siguientes situaciones y resuelve.

a. Un velero tiene dos mástiles verticales a la cubierta. El menor de ellos mide 4 m y proyecta una sombra sobre la cubierta de 2,5 m, y en ese mismo instante, el mástil mayor proyecta una sombra de 7,5 m. ¿Cuánto mide el mástil mayor?

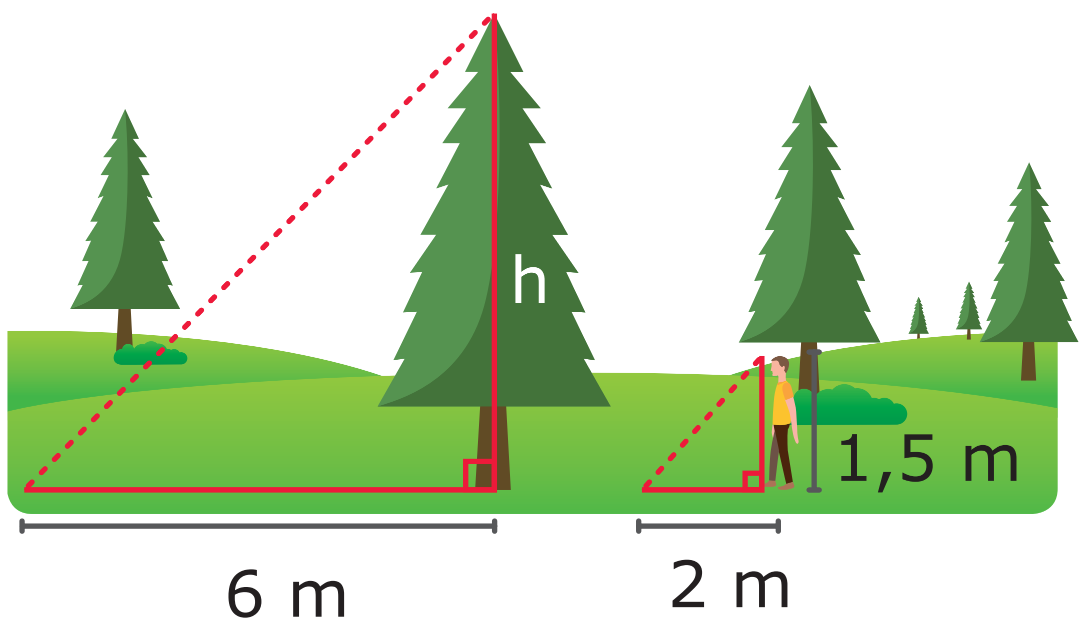
b. En el triángulo de la figura, $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$.
Si BC = 24 cm, AC = 16 cm, AE = 12 cm y AD = 9 cm, entonces, ¿cuánto mide el perímetro del trapecio BCED?



c. En la figura, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Si DE **:** BD = 5 **:** 1 y AC = 0,8 cm, ¿cuál es la medida del segmento $\overline{CE}$?



d. A la misma hora, una persona y un árbol proyectan una sombra, como se muestra en la imagen. ¿Cuál es la altura (h) del árbol?



Cuaderno de Actividades

Páginas 1515 a 1524

Lección 9

Semejanza

Mapa mundial de ecología:
diseño de bosques verdes.

¿En qué situaciones cotidianas podemos aplicar los conceptos de semejanza?

Analiza la siguiente información, y luego responde.

El mapa mundial de ecología corresponde a una metáfora para generar conciencia de la relación que existe entre el ser humano y el medioambiente.

Un mapa es una representación geográfica. En estos se utiliza una escala, de modo que los elementos que aparezcan sean de un tamaño proporcional en la realidad.

1. ¿Crees que cambiará este mapa en el futuro? ¿Por qué?

2. ¿Cuáles medidas propondrías para cuidar el medioambiente? Comenta con tus compañeros.

3. Si el mapa está hecho en una escala 1 : 100.000, ¿cuánto mide en la realidad un objeto que en el mapa mide 2 cm?

Reflexiona

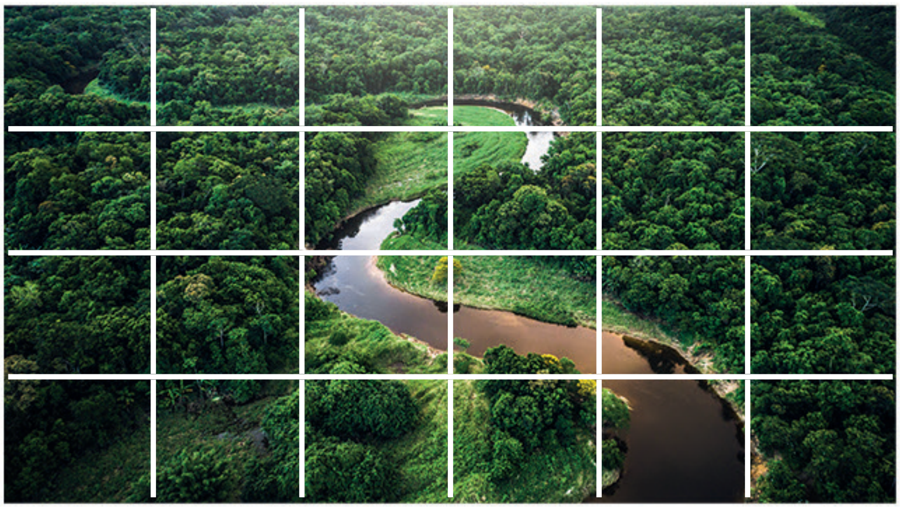
- ¿Has tenido que utilizar un mapa alguna vez? ¿Cómo lo interpretaste? Comenta con tus compañeros.

- ¿Tuviste dificultades para responder la pregunta 3? ¿Por qué? ¿Piensas que hubiera sido más fácil trabajar en equipo? Argumenta.

SEMEJANZA DE FIGURAS

Fotografía 1

D C



A B

Fotografía 2

D' C'

A' B'

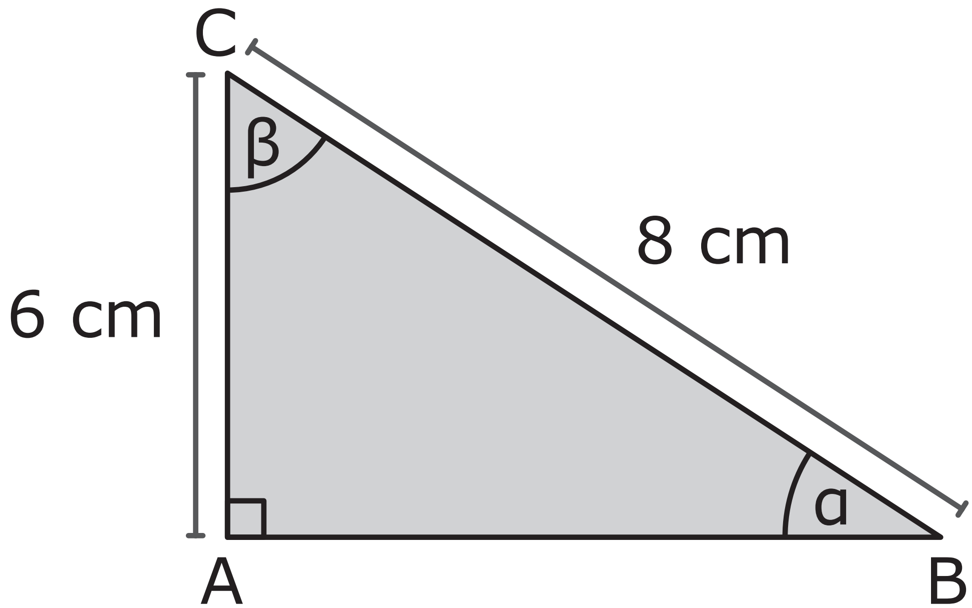
- ¿Cuántos cuadros mide cada lado de las fotografías?

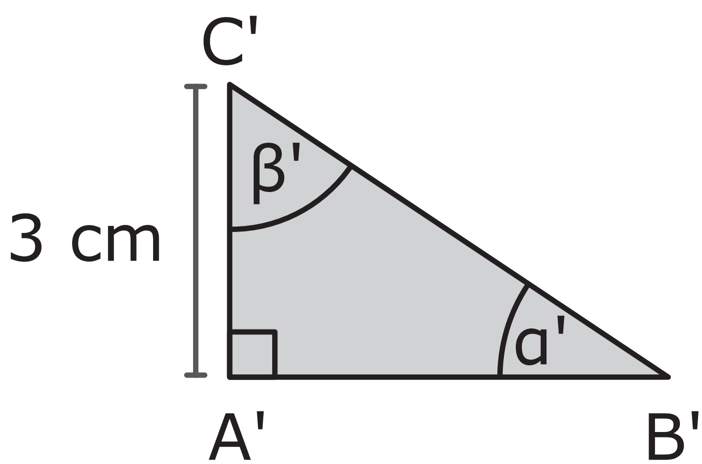
- ¿Cuál es la relación de la cantidad de cuadros del ancho y del alto entre las fotografías?

Dos polígonos son **semejantes** (~) si y solo si las longitudes de sus lados correspondientes son proporcionales y sus correspondientes ángulos son congruentes. La constante de proporcionalidad k recibe el nombre de **razón de semejanza**.

Ejemplo 1

Si los triángulos ABC y A′B′C′ son semejantes ($\Delta\ ABC \sim \Delta\ A'B'C'$), ¿cuánto mide el lado $\overline{B'C'}$?





Ya que los triángulos son semejantes, la medida de los ángulos correspondientes es igual ($\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$), y la medida de los lados correspondientes es proporcional, es decir:

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \rightarrow \frac{3}{6} = \frac{B'C'}{8} \rightarrow$$

$$B'C' = \frac{3 \bullet 8}{6} = 4$$

La razón de semejanza es: $k = \frac{3}{6} = \frac{1}{3}$, es decir, cada lado del Δ A'B'C' es la mitad del lado correspondiente del Δ ABC.

Luego la medida del lado $\overline{BC}$ es 4cm.

Si dos **polígonos regulares** tienen la misma cantidad de lados, entonces son s**emejantes**.

Si la razón de semejanza de dos figuras es k, entonces la razón de sus áreas es k^2.

Actividades en tu cuaderno

1. Crea dos polígonos semejantes cuya razón de semejanza sea k = ¿Qué significa que la razón de semejanza sea 2?

2. Crea dos rectángulos que sean semejantes con razón de semejanza k = 1,5. ¿Cuál es la razón de sus áreas?

3. Crea dos polígonos semejantes cuya razón de semejanza sea k = 1.

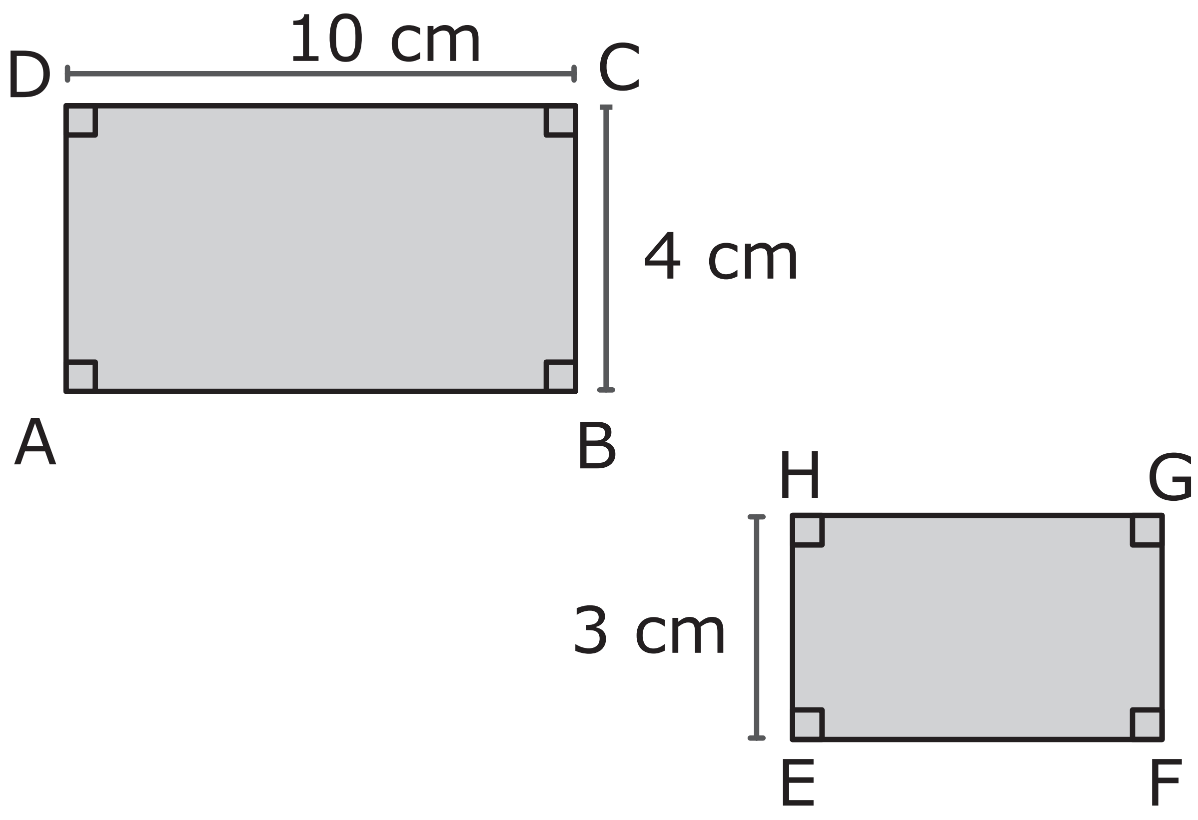
4. ¿Dos figuras congruentes siempre son semejantes?, ¿cuál sería en tal caso la razón de semejanza?

¿Ocurrirá que dos figuras que son semejantes siempre son congruentes? Justifica.

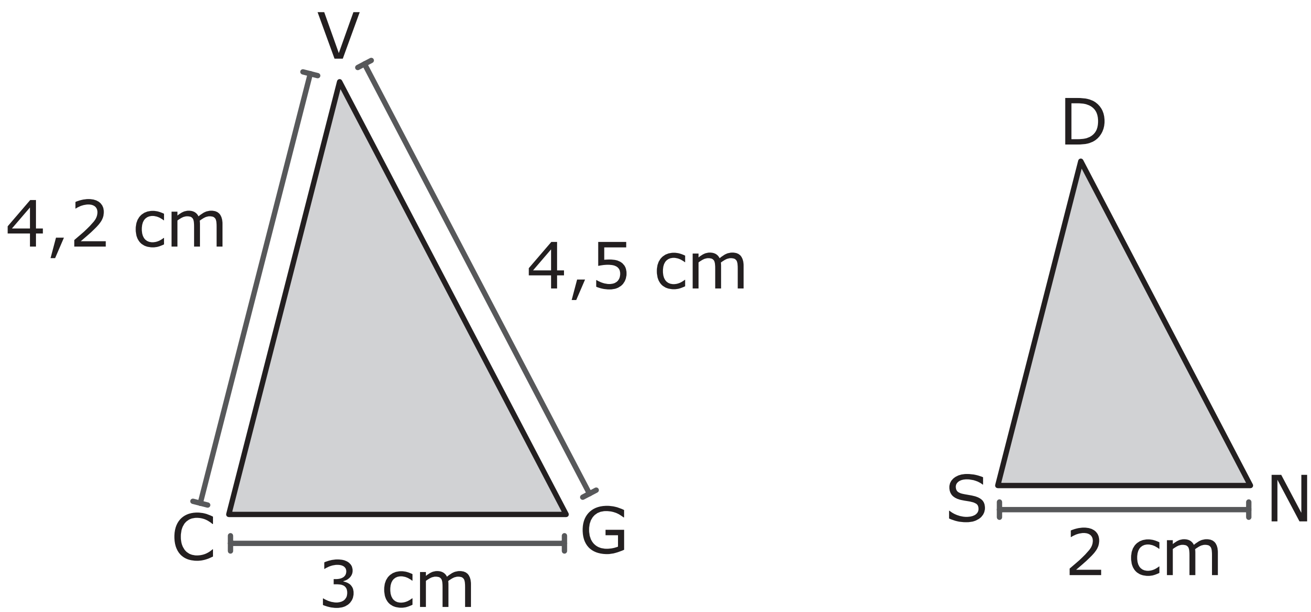
Actividades en tu cuaderno

1. Calcula las medidas pedidas en los siguientes polígonos semejantes.

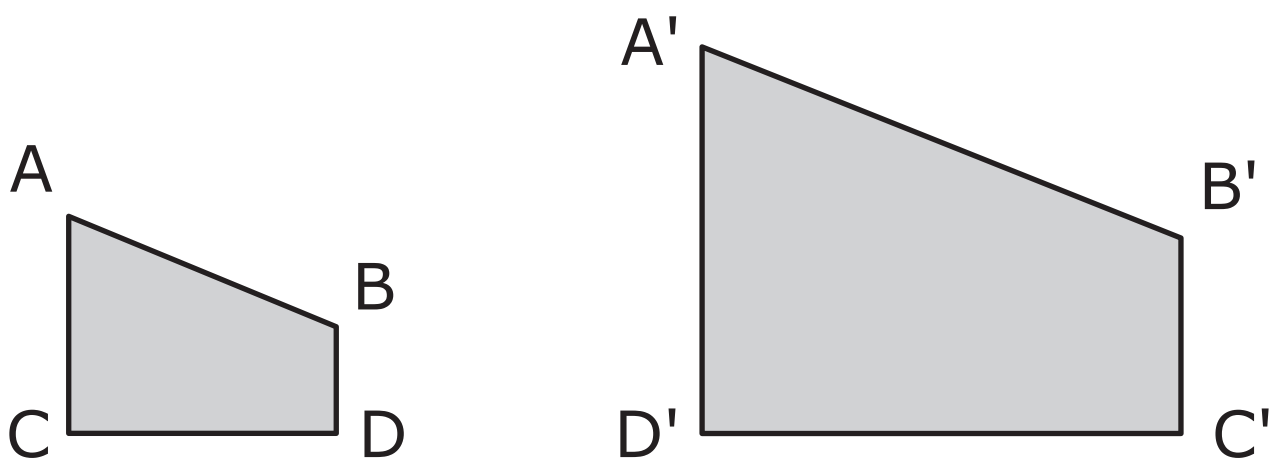
a. Lado $\overline{EF}$.



b. Lados $\overline{SD}$ y $\overline{DN}$.



2. Decide si los siguientes polígonos son semejantes. **Explica** tu respuesta.



A′B′ = 4 cm, B′C′ = 2 cm, C′D′ = 3 cm y D′A′ = 3,6 cm.

AB = 2 cm, BC = 1 cm, CD = 1,5 cm y DA = 1,8 cm.

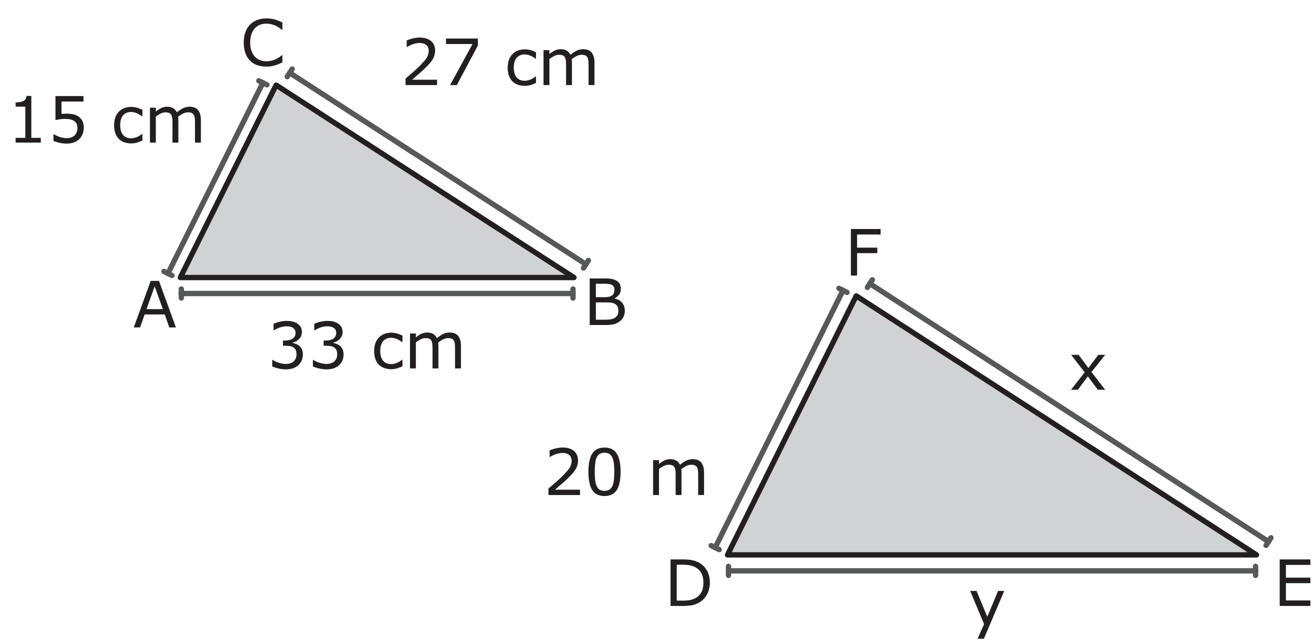
3. Resuelve el siguiente problema.

En un mapa (a escala) se tiene que 1 cm corresponde a 25 km en la realidad. Si la distancia en el mapa entre dos ciudades es 10,8 cm, entonces, ¿cuál es su distancia real?

4. Resuelve el siguiente problema.

El lado de un triángulo equilátero ABC mide 11 cm. Si se triplica la medida de sus lados y se dibuja otro triángulo A′B′C′, ¿serán semejantes los triángulos ABC y A′B′C′?

5. Si los triángulos ABC y DEF son semejantes, ¿cuál es el perímetro del triángulo DEF?



6. Decide si la siguiente aseveración es verdadera o falsa. **Justifica** tu respuesta.

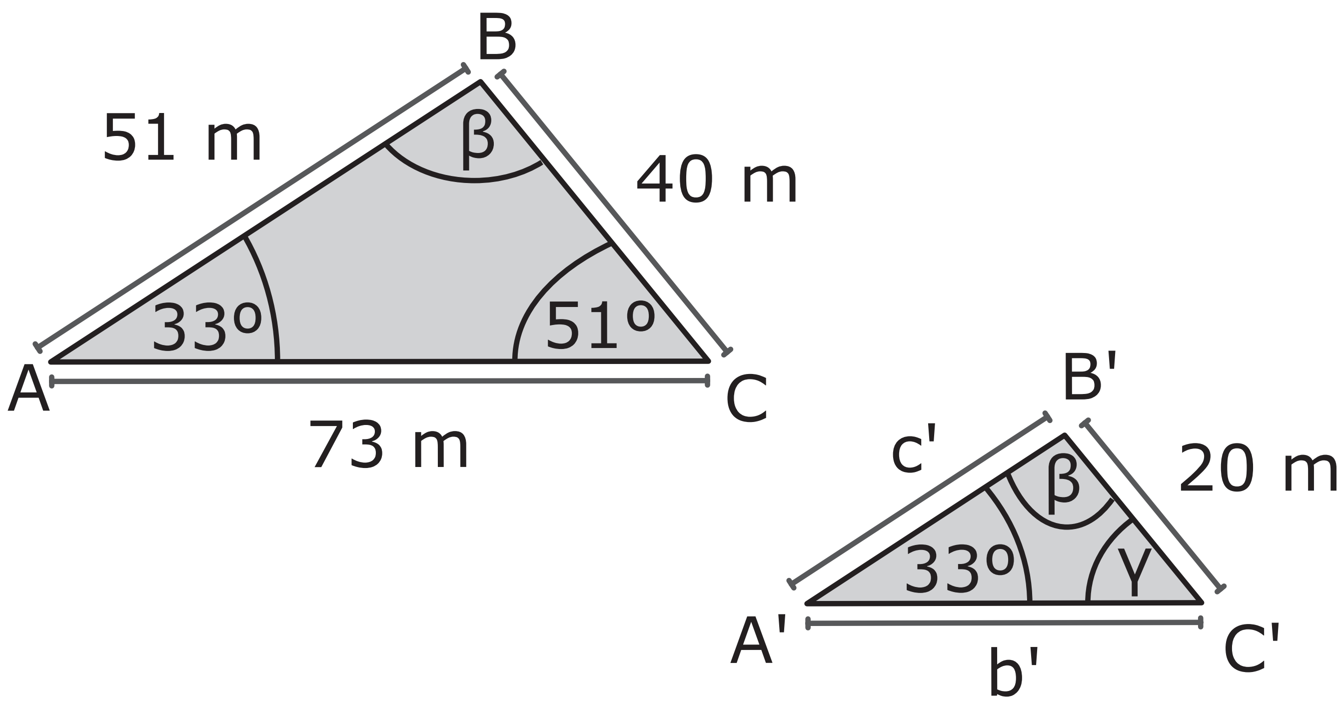
El mapa mundial de la ecología del inicio de lección utiliza una escala 1 **:** 100.000. Si dos árboles se encuentran a 5 cm de distancia en el mapa, entonces, los árboles están a 5.000 cm en la realidad.

7. Crea dos triángulos equiláteros que sean semejantes. Luego, responde.

a. ¿Qué relación existe entre las áreas de los dos triángulos?

b. ¿Qué relación existe entre los perímetros de los dos triángulos?

8. Los triángulos ABC y A’B’C’ son semejantes. Determina las medidas de los lados y ángulos indicados.



9. Determina en cada caso si los siguientes polígonos son siempre semejantes. Si la respuesta es afirmativa, justifica. Si no son semejantes, argumenta por qué no lo son.

a. Dos cuadrados.

b. Dos triángulos.

c. Dos hexágonos regulares.

d. Dos triángulos equiláteros.

10. El lado de un cuadrado aumenta de 5 cm a 15 cm. ¿Qué sucede con su perímetro? ¿Qué sucede con su área?

11. Ciencias Sociales. Actividad de profundización. Analiza la siguiente información, y luego responde.

El Partenón de Atenas es un templo griego que fue construido en el siglo V a. C. Los griegos veían en las matemáticas la manifestación de la divinidad; por esta razón, los templos, que eran la casa de los dioses, debían diseñarse sobre la base de relaciones matemáticas.

En la construcción del Partenón se observa la proporción 4 **:** 9, que se repite en varias de sus dimensiones, por ejemplo, en los lados del rectángulo que conforma su planta o en la relación entre el ancho y la altura del templo.

a. Investiga el significado histórico que tiene este templo para Grecia.

b. Establece qué relación existe entre las partes construidas bajo la proporción 4 **:** 9 y los contenidos vistos de semejanza.

c. En parejas, investiguen si hay otras proporciones que se utilizaron en la construcción del Partenón y expliquen la utilidad de los contenidos de semejanza en la arquitectura.

Recurso Web

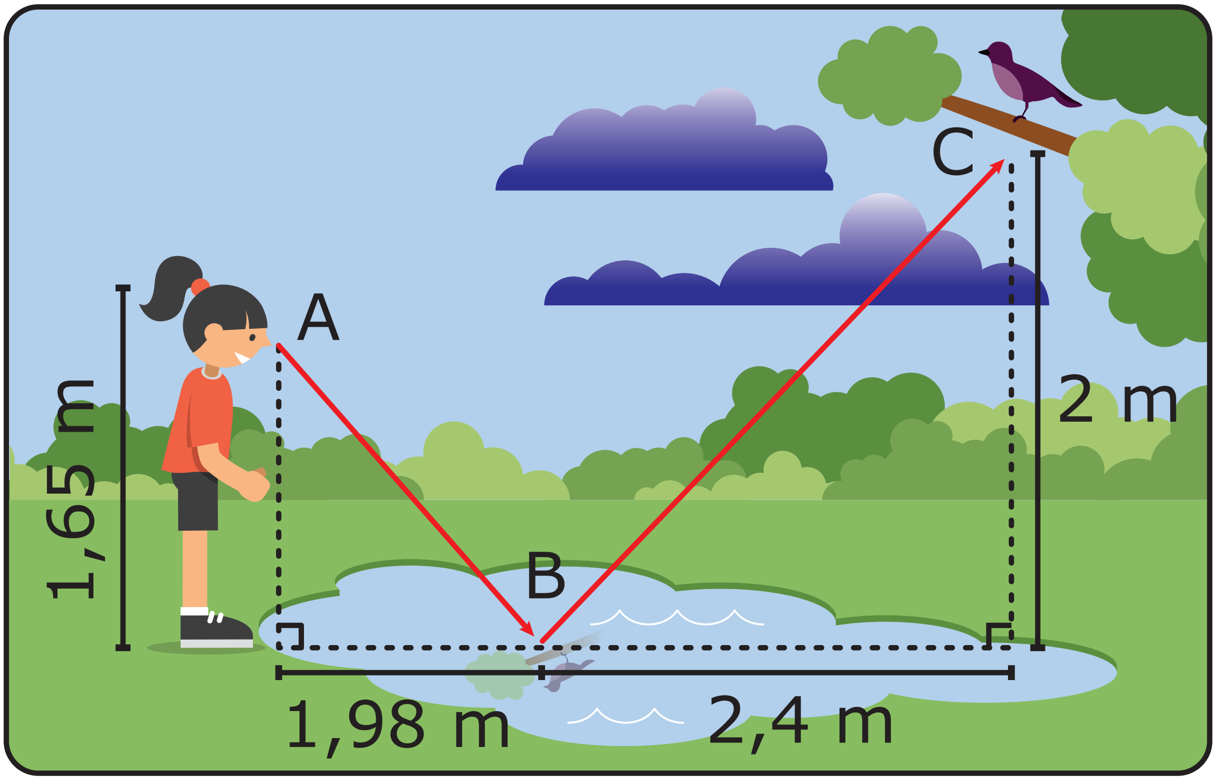
Para conocer más acerca del Partenón, puedes visitar el siguiente sitio: https://n9.cl/ne7j

Cierre

- ¿Qué entiendes por semejanza? Explícalo utilizando tus palabras.

Cuaderno de Actividades
Páginas 1525 a 1548

CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS



Francisca está en un parque y observa en un charco de agua la silueta de un ave, como se muestra a continuación.

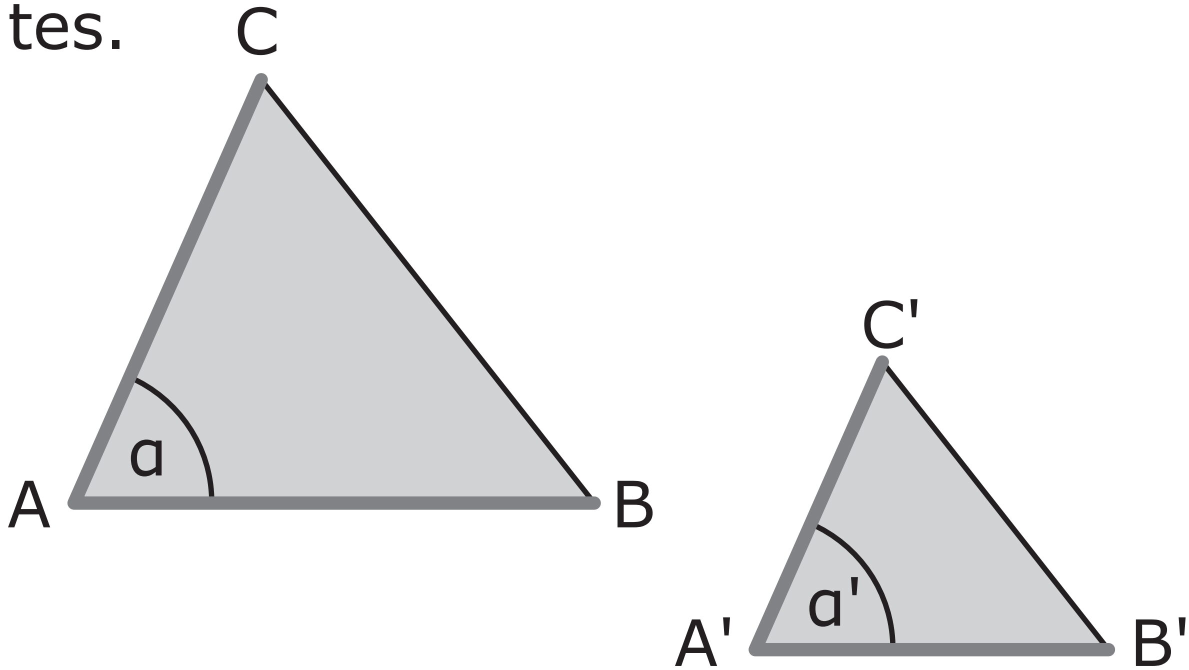
- ¿Son proporcionales las medidas que se muestran en los triángulos que se forman en la imagen? Argumenta.

- Para calcular la distancia entre A y B sin utilizar el teorema de Pitágoras, ¿qué medida necesitas conocer? Explica.

Se puede determinar si dos triángulos son semejantes verificando que se cumplan los criterios de semejanza.

► **Criterio lado, ángulo, lado (LAL)**

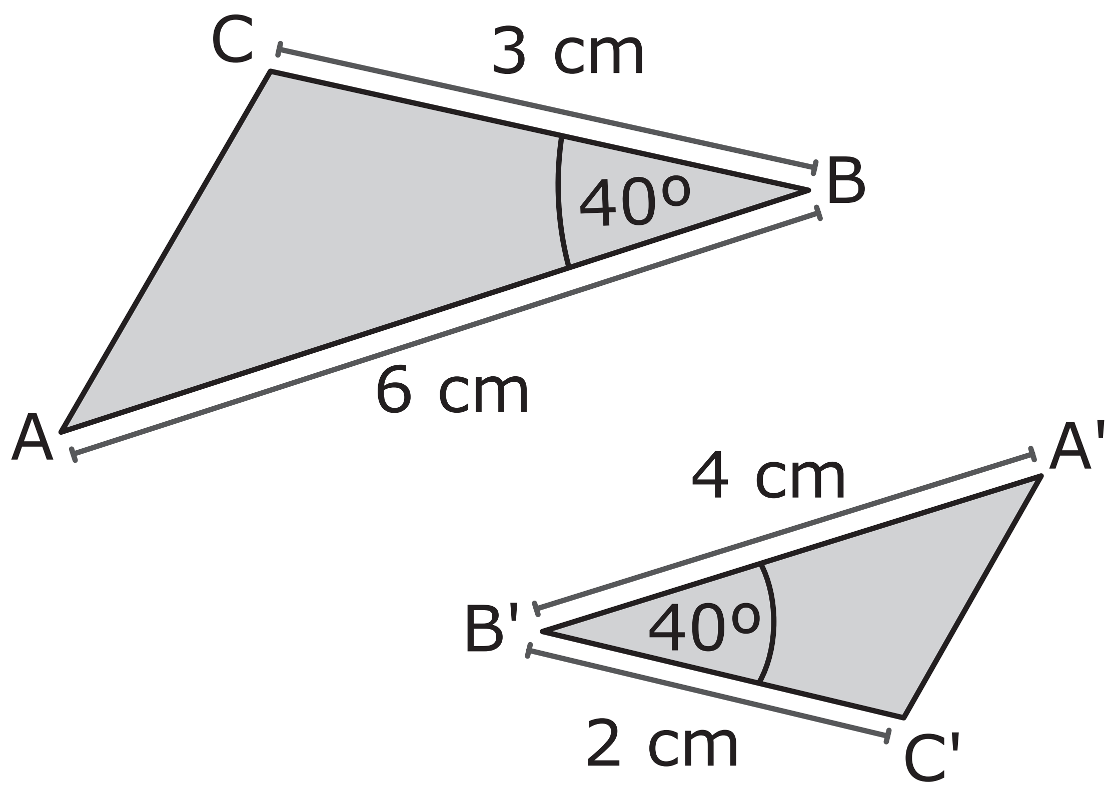
Dos triángulos son semejantes si dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los ángulos comprendidos entre ellos son congruentes.



Si se cumple que $\alpha = \alpha'$ y $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ entonces, $\Delta\, ABC \sim \Delta\, A'B'C'$.

Ejemplo 1

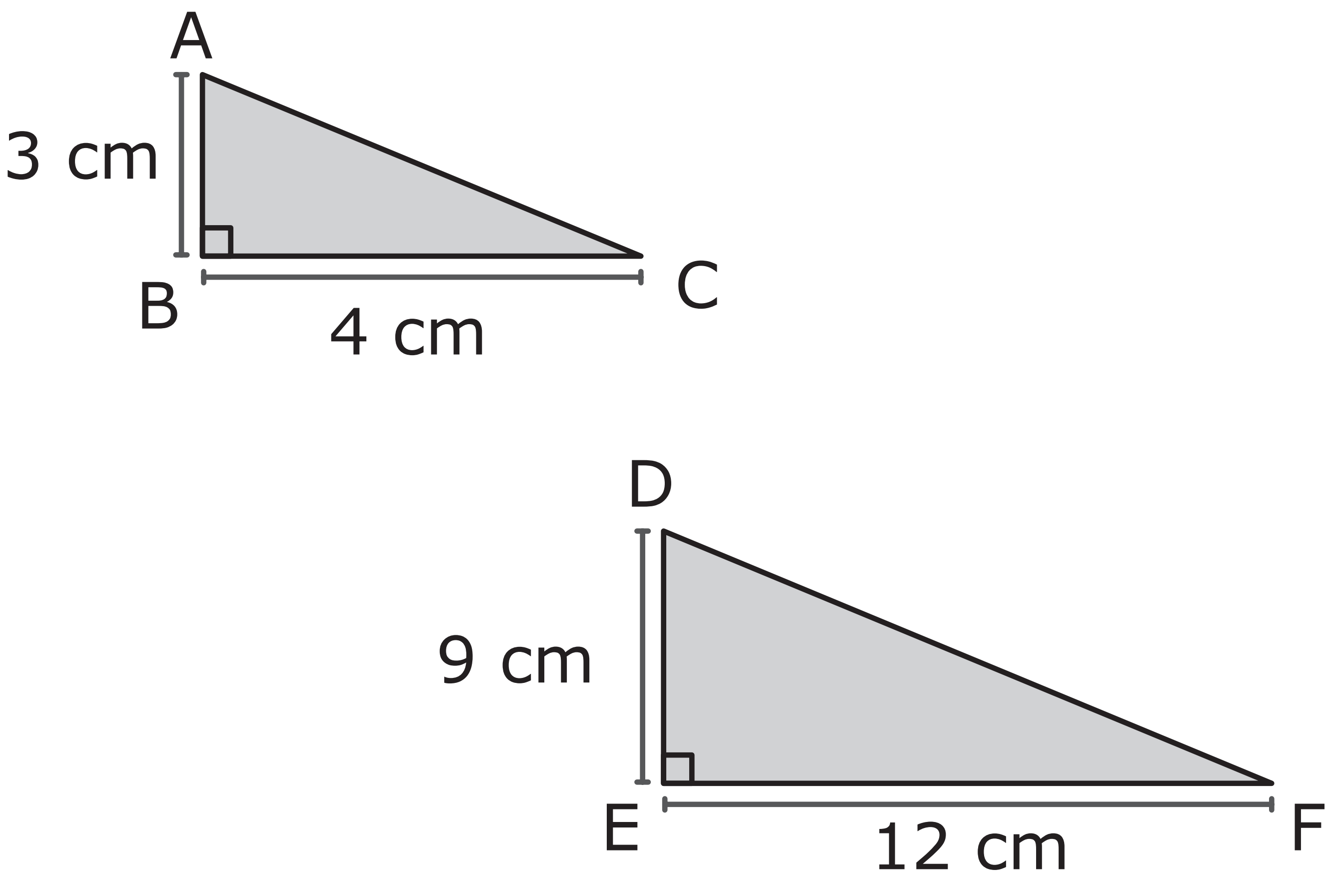
Analiza si el triángulo ABC es semejante al triángulo A’B’C’.



Como $\dfrac{BA}{B'A'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{3}{2}$ y $\beta = \beta' = 40°$ entonces, por el criterio LAL se tiene que $\Delta\ ABC \sim \Delta\ A'B'C'$.

Actividades en tu cuaderno

1. Comprueba que los triángulos ABC y DEF son semejantes. ¿Cómo podrías obtener las medidas de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{DF}$?

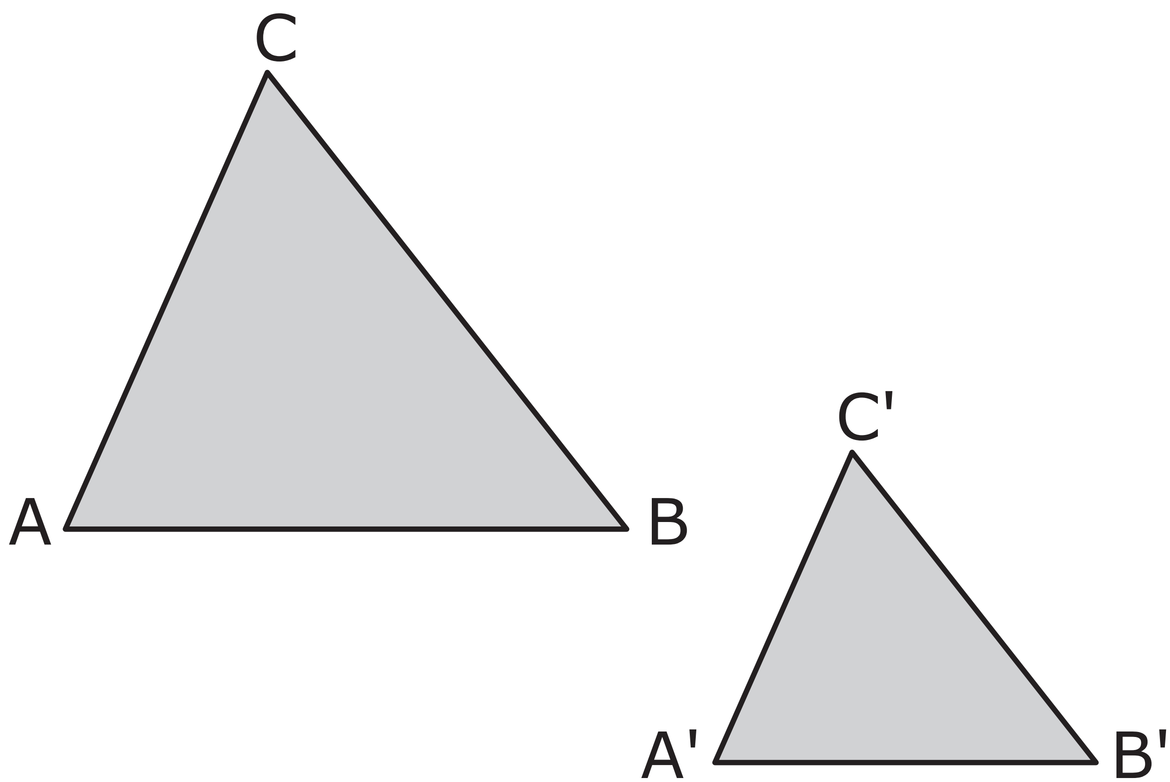


► Criterio lado, lado, lado (LLL)

Dos triángulos son semejantes si los tres pares de lados correspondientes tienen medidas proporcionales.

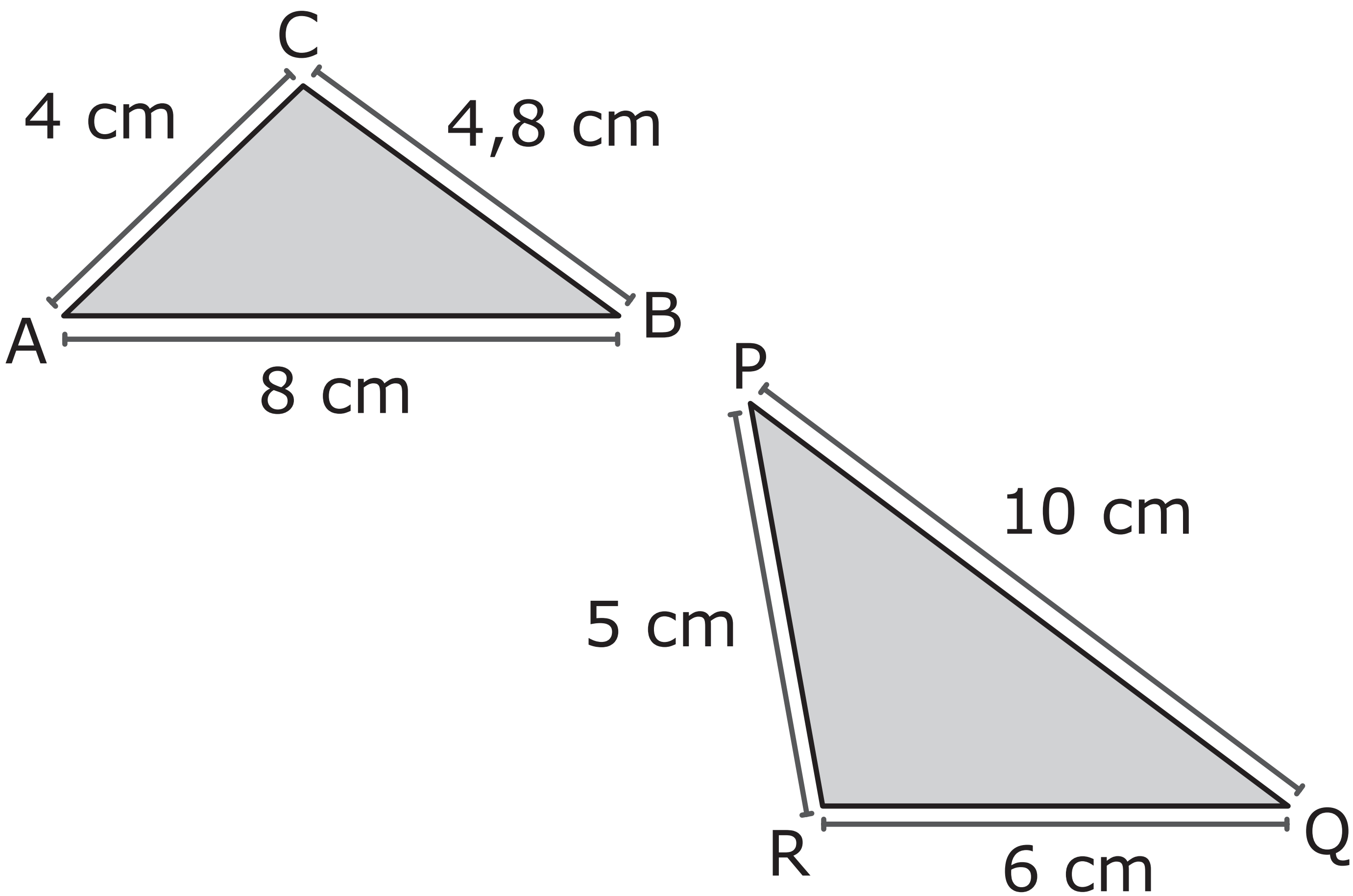
Si se cumple que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$

entonces, $\Delta\ ABC \sim \Delta\ A'B'C'$.



Ejemplo 2

¿Los triángulos que se muestran son semejantes?



Para comprobar si los triángulos son semejantes, se calcula el valor de la razón entre los lados proporcionales, es decir:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

$$\frac{BC}{QR} = \frac{4{,}8}{6} = 0{,}8$$

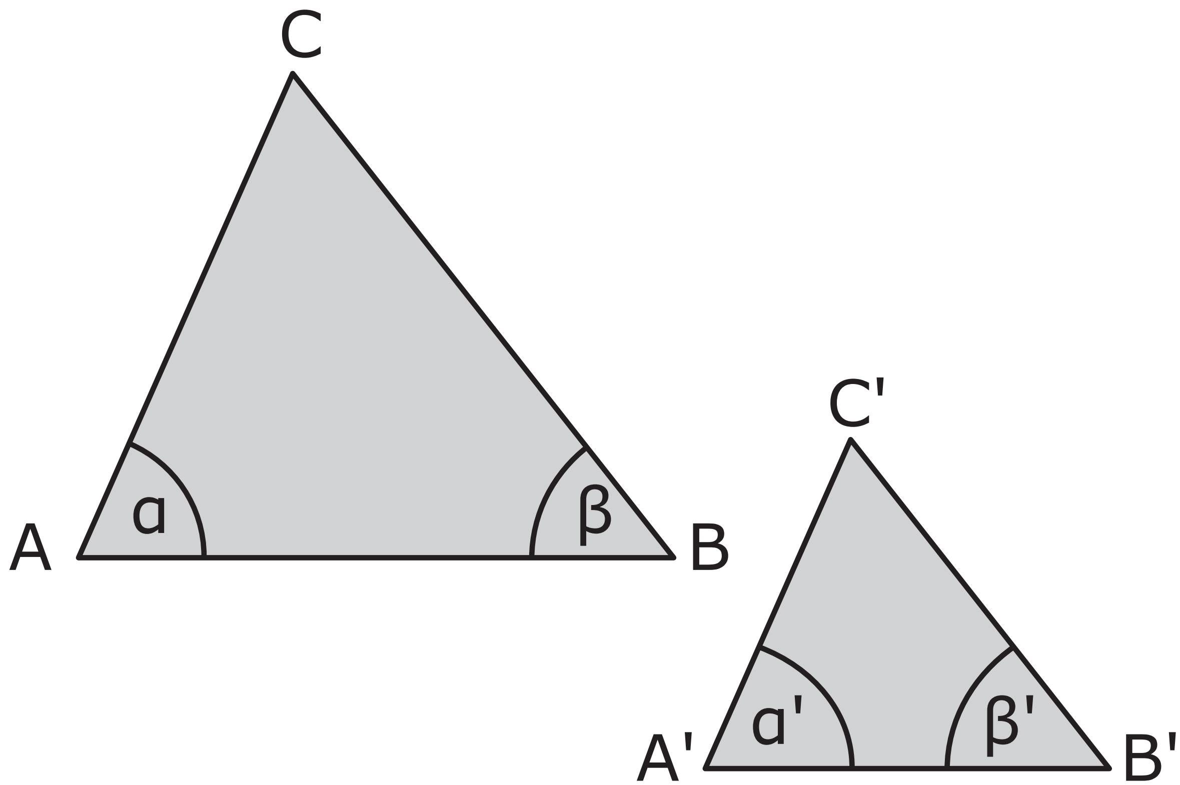
$$\frac{CA}{RP} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Se cumple el criterio lado, lado, lado (LLL), por lo tanto, Δ ABC ~ Δ PQR.

► Criterio ángulo, ángulo (AA)

Dos triángulos son semejantes si dos de sus ángulos interiores correspondientes tienen igual medida.

Si se cumple que $\alpha = \alpha'$ y $\beta = \beta'$ entonces, $\Delta\ ABC \sim \Delta\ A'B'C'$.



Ejemplo 3

¿Dos triángulos equiláteros de lados p cm y q cm, respectivamente, son semejantes?

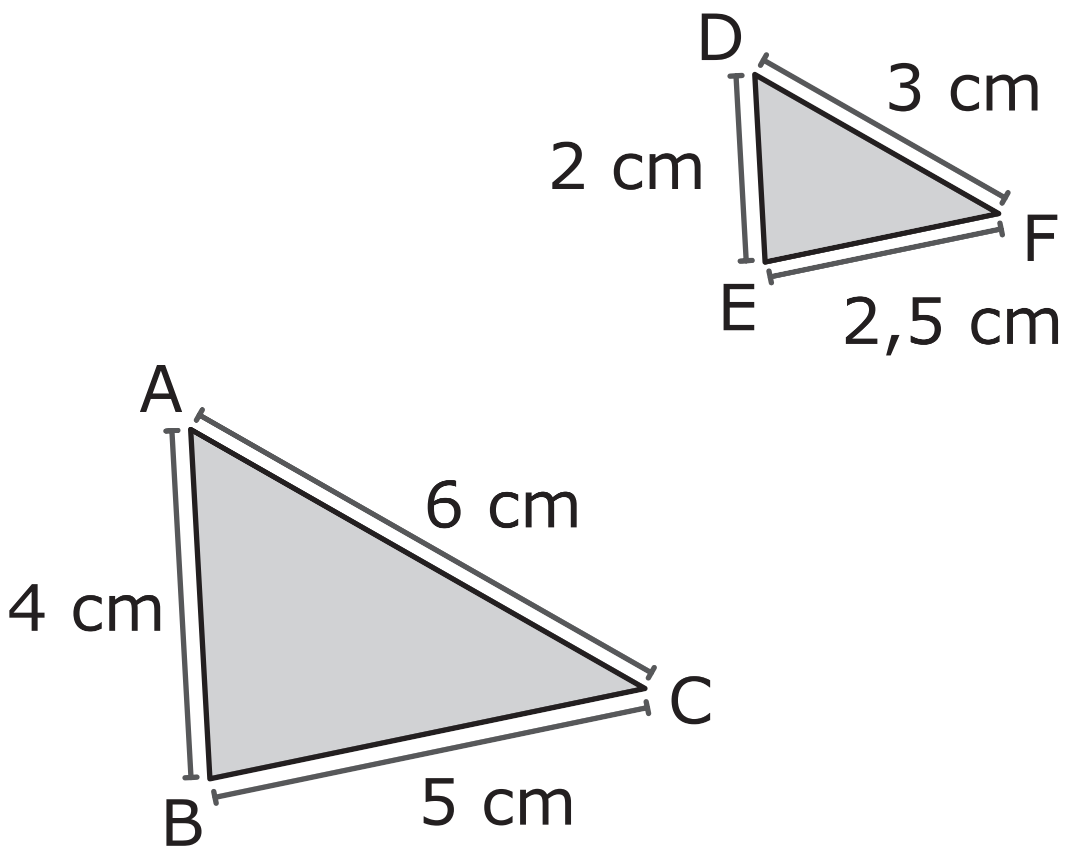
Los triángulos son semejantes, ya que al ser equiláteros, sus ángulos miden 60° cada uno. Luego, por criterio AA, los triángulos son semejantes.

¿Se podría haber considerado otro criterio de semejanza para justificar que los triángulos equiláteros del **Ejemplo 3** son semejantes? Explica.

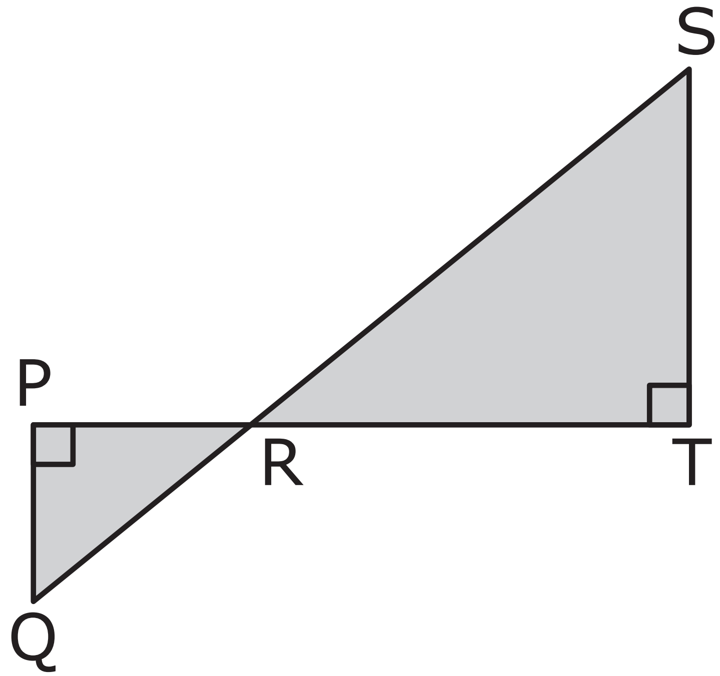
Actividades en tu cuaderno

1. Determina qué criterio permite explicar la semejanza entre cada par de triángulos. **Justifica** tu respuesta.

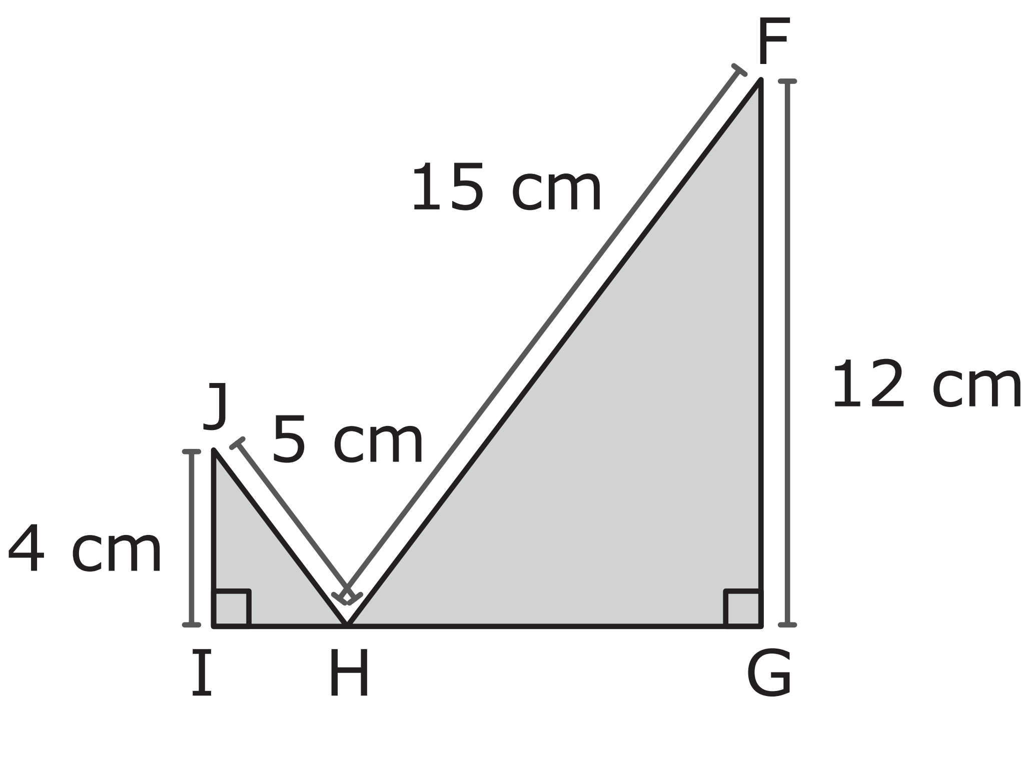
a.



b.



c.



2. Decide si las siguientes aseveraciones son verdaderas o falsas. **Justifica** tu respuesta.

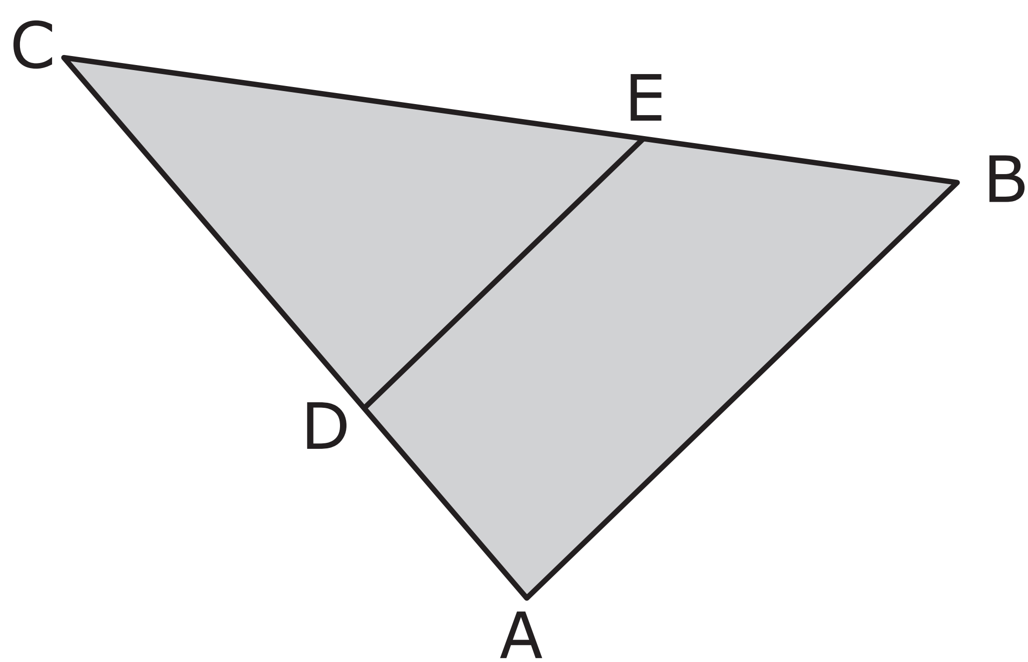
a. Si dos triángulos rectángulos tienen uno de sus ángulos agudos congruentes, entonces son semejantes por criterio AA.

b. Para que dos triángulos sean semejantes según el criterio LLL, sus lados correspondientes deben ser congruentes.

c. Dos triángulos isósceles, cuyos ángulos no basales son congruentes, son semejantes.

3. Analiza la siguiente información, y luego responde justificando tu respuesta. Los lados de un triángulo miden x cm, 2x cm y 3x cm, y los lados correspondientes de otro triángulo miden 2x cm, 4x cm y 6x cm. ¿Son semejantes los triángulos?

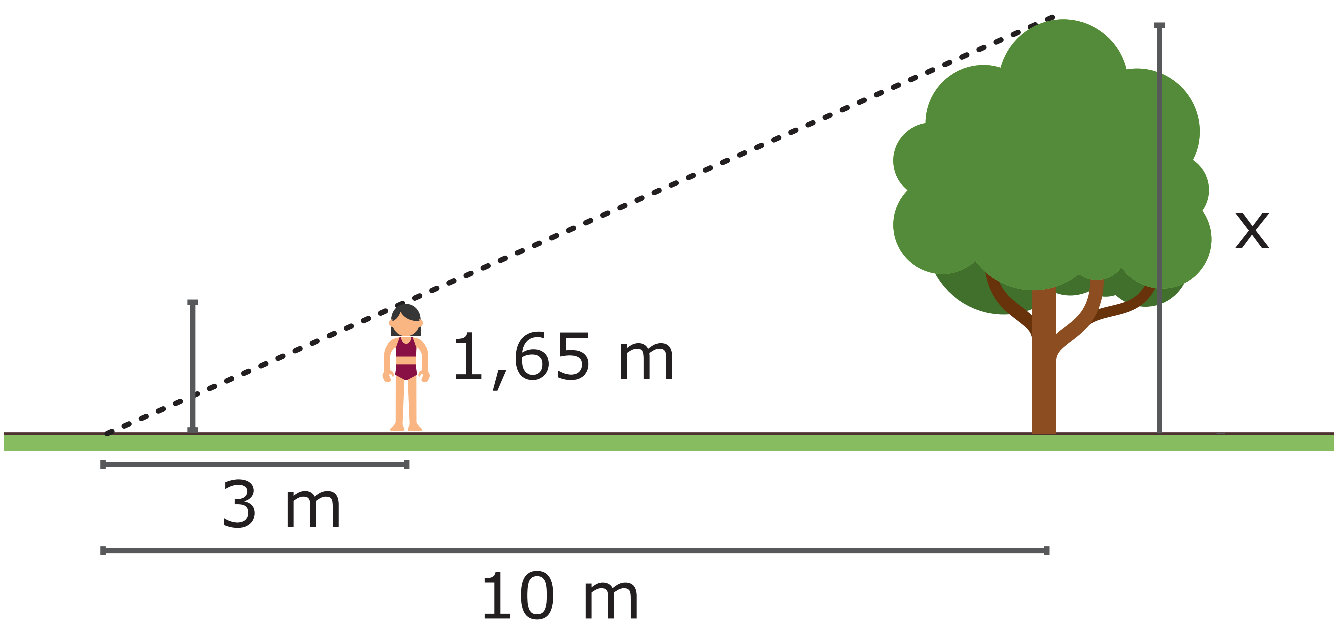
4. Resuelve el siguiente problema utilizando semejanza de triángulos.



a. Si CD = 24 cm, CE = 20 cm y EB = 5 cm, calcular la medida del segmento $\overline{DA}$ sabiendo que $\overline{DE}$ // $\overline{AB}$.

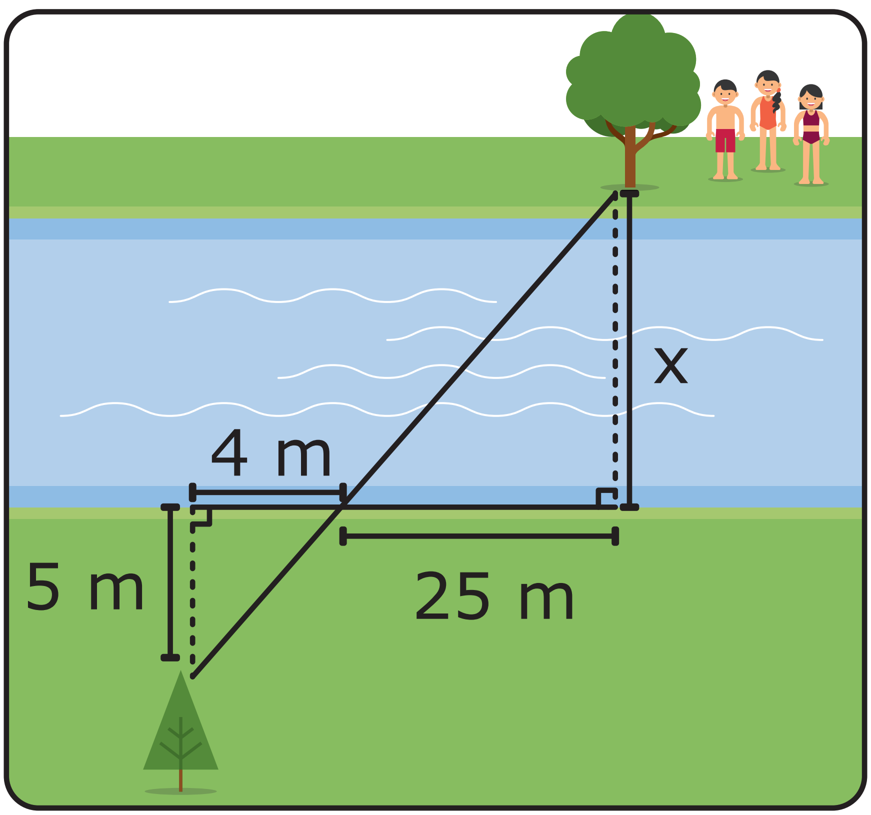
b. Comprueba el resultado del ejercicio anterior utilizando el teorema de Tales.

5. Determina la altura del árbol utilizando semejanza de triángulos y comprueba usando el teorema de Tales.



6. **Argumenta** por qué el criterio AA solamente necesita dos ángulos interiores correspondientes congruentes para establecer que los triángulos son semejantes.

7. Reúnete con un compañero(a) y analicen la siguiente situación. Luego, respondan.



Un grupo de personas quieren cruzar nadando un río de aguas no turbulentas, comenzando desde el árbol y nadando en línea recta hacia la otra orilla, como se muestra en la imagen anterior.

a. ¿Son semejantes los triángulos que se forman en la imagen? ¿Por qué?

b. ¿Cuánto mide el ancho (x) del río? Expliquen cómo lo calcularon.

c. ¿Cómo podrían comprobar su resultado?

8. **Actividad de profundización.** Demuestra utilizando semejanza de triángulos que si a un triángulo ABC se le aplica una homotecia de centro O(O puede estar dentro o fuera de la figura) y razón de homotecia k = 2, entonces, el triángulo imagen A'B'C' es semejante al original.

9. **Actividad de profundización.** Demuestra que si Δ ABC ~ Δ DEF, entonces, el segmento $\overline{AB}$ es equivalente a la siguiente expresión:

$$\frac{BE \bullet DE}{EF} \text{ y } \frac{AC \bullet DE}{DF}$$

Recurso Web

Para reforzar lo que aprendiste, puedes visitar el siguiente link https://n9.cl/2apd, en el que encontrarás videos explicativos.

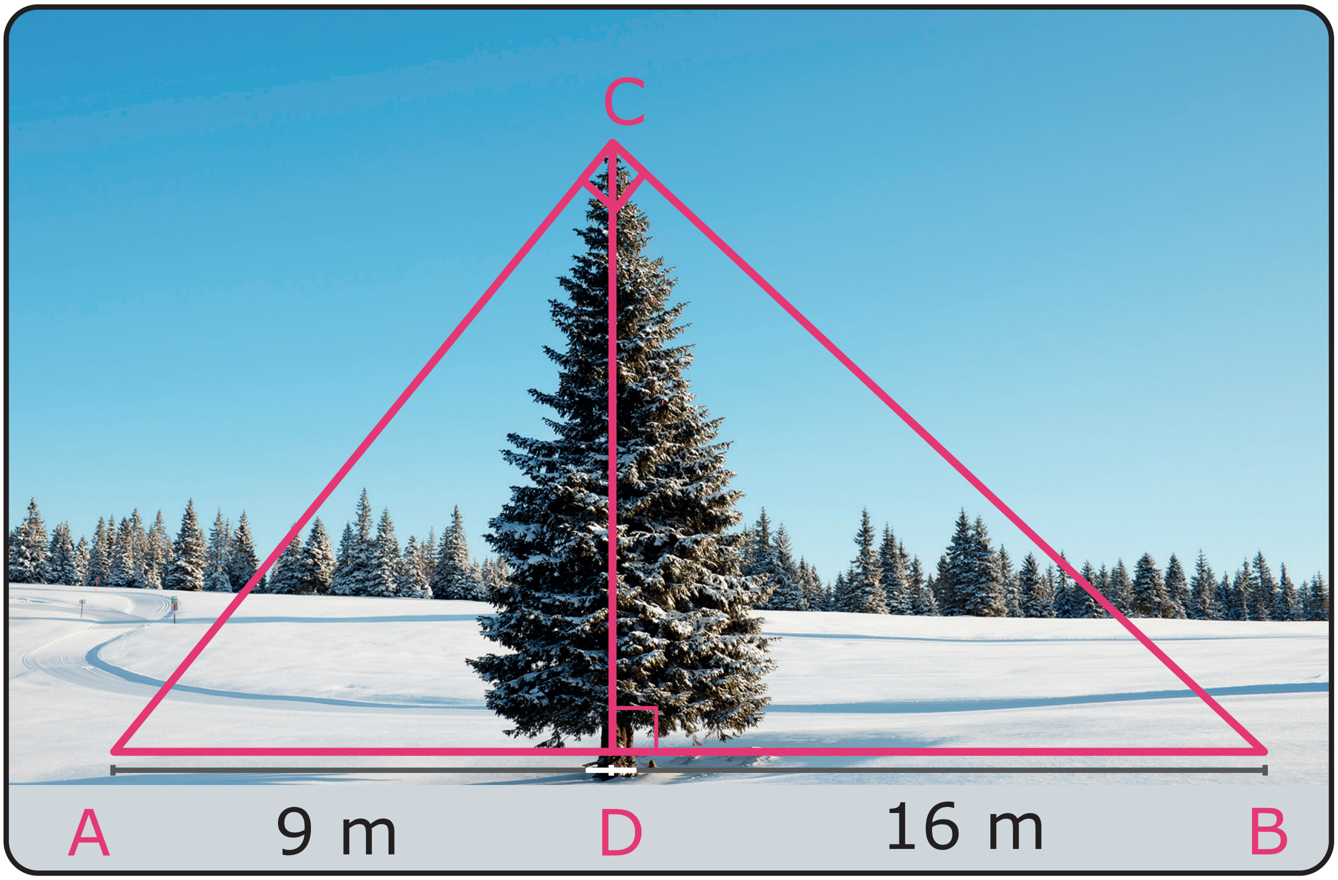
Cuaderno de Actividades
Páginas 1549 a 1568

Cierre

- Explica con un ejemplo uno de los criterios de semejanza de triángulos. ¿Hubo algún criterio que no comprendieras?

- ¿Cómo crees que fue tu trabajo en las actividades grupales? ¿Qué podrías mejorar?

TEOREMA DE EUCLIDES



Un pino de un bosque está un poco inestable y un grupo de personas están pensando en estabilizarlo mediante cables anclados al suelo formando triángulos rectángulos, como se muestra en la figura.

Observa la figura de la imagen anterior y responde:

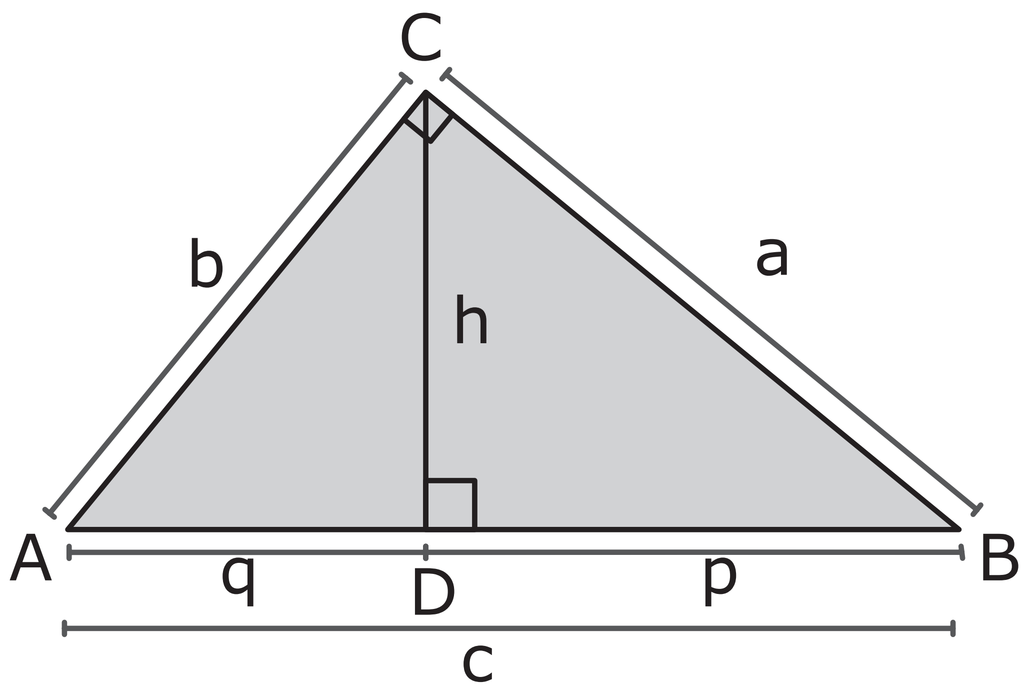
- ¿Son semejantes los triángulos ACD y CBD? Justifica.

- ¿El triángulo ABC es semejante con alguno de los triángulos que se forman? Explica.

- ¿Cómo calcularías la medida de los cables que van desde la cúspide del pino hasta el suelo? ¿Y la altura del pino? Comenta con tus compañeros.

Ejemplo 1

En el Δ ABC de la figura se cumple que Δ ABC ~ Δ CBD. Demuestra que a 2 = c • p.



Como Δ ABC ~ Δ CBD, se tiene la siguiente proporción:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{BC}{BD} = \frac{CA}{DC}$$

Se reemplazan las medidas de los lados en la igualdad:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{BC}{BD} \rightarrow \frac{c}{a} = \frac{a}{p} \rightarrow a^2 = c \bullet p$$

Por lo tanto, en el Δ ABC se cumple que $a^2 = c \bullet p$.

Actividades en tu cuaderno

Considera los datos del **Ejemplo 1** y responde.

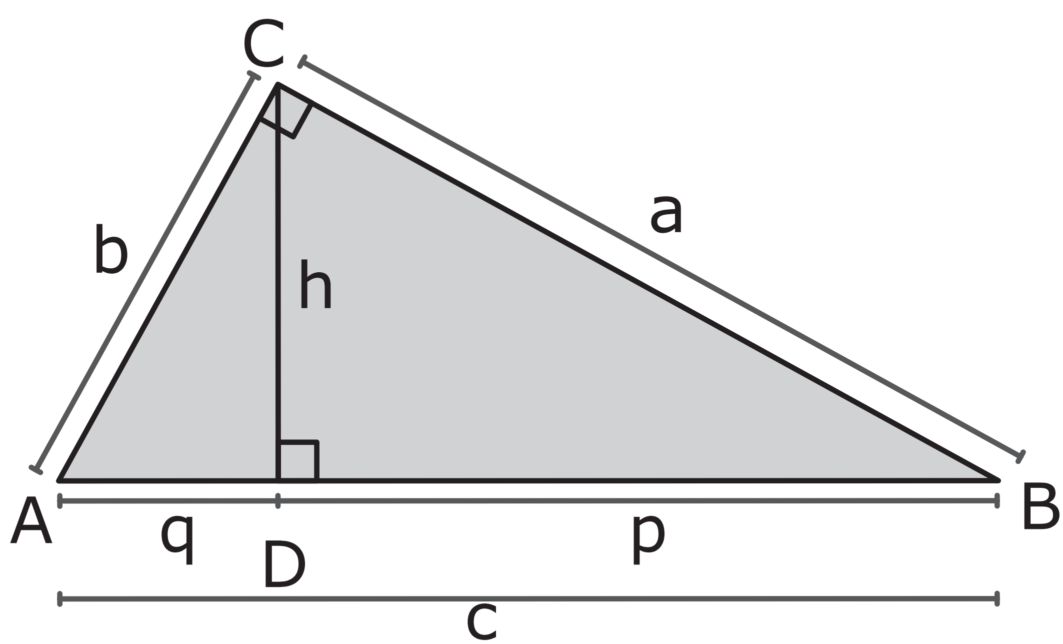
1. ¿Qué criterio de semejanza te permite demostrar que Δ ABC ~ Δ CBD? Justifica.

2. Demuestra que $h^2 = p \bullet q$.

En el Δ ABC, rectángulo en C, la altura h trazada desde el vértice C al lado $\overline{AB}$ determina el punto D, formando dos nuevos triángulos rectángulos: Δ ACD y Δ CBD. Por criterios de semejanza, se establece la siguiente relación:

$$\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$$

A partir de lo anterior, es posible expresar los teoremas de Euclides:



- Referentes a los catetos

$$a^2 = c \bullet p$$

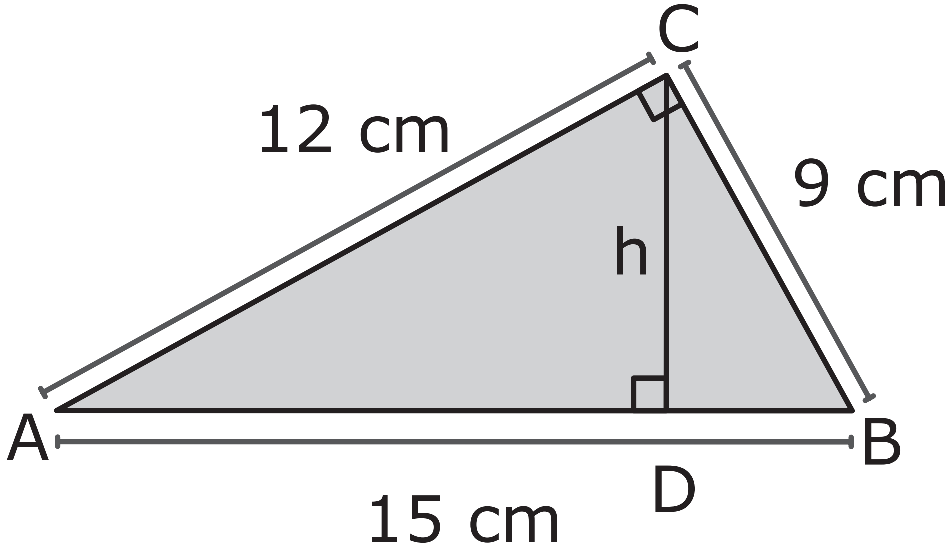
$$b^2 = c \bullet q$$

- Referente a la altura

$$h^2 = p \bullet q$$

Ejemplo 2

Calcula las medidas de p, q y h del Δ ABC de la figura.



Para calcular p y q se puede utilizar el teorema de Euclides referente a los **catetos**:

$9^2 = 15 \cdot p$ $\qquad$ $12^2 = 15 \cdot q$

$81 = 15 \cdot p$ $\qquad$ $144 = 15 \cdot q$

$5{,}4 = p$ $\qquad$ $9{,}6 = q$

Como ya se conocen p y q, se utiliza el teorema de Euclides referente a la **altura** para calcular h:

$$h^2 = p \cdot q$$
$$h^2 = 5{,}4 \cdot 9{,}6$$
$$h^2 = 51{,}84$$

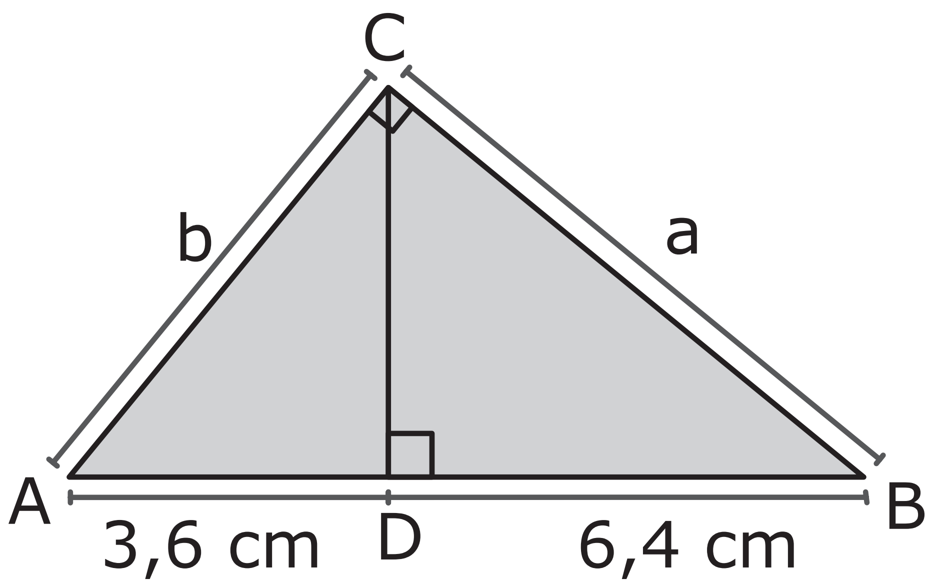
Se calcula la raíz cuadrada de 51,84.

$$h = 7{,}2$$

Las medidas de p, q y h son 5,4 cm, 9,6 cm y 7,2 cm, respectivamente.

Ejemplo 3

Calcula las medidas de a y b del Δ ABC de la figura.



Para calcular a y b se puede utilizar el teorema de Euclides referente a los **catetos**:

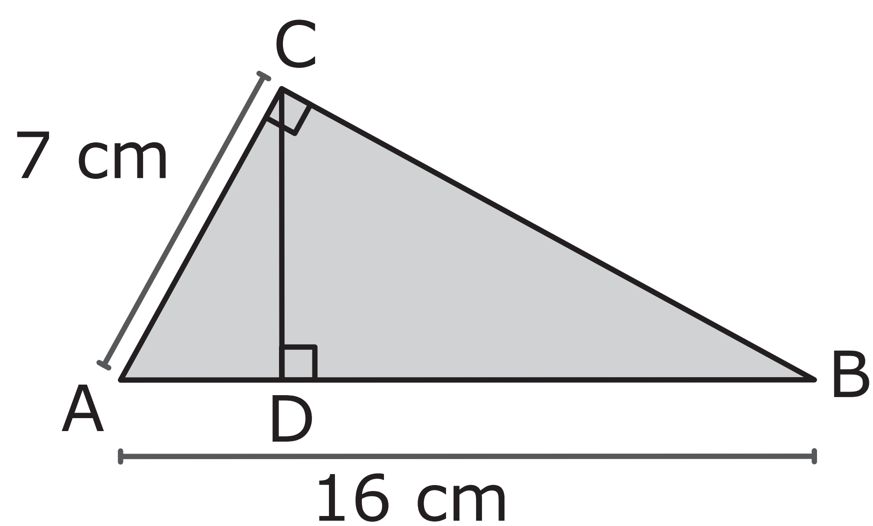
$$a^2 = 10 \bullet 6{,}4 \qquad b^2 = 10 \bullet 3{,}6$$
$$a^2 = 64 \qquad b^2 = 36$$
$$a = 8 \qquad b = 6$$

Luego, las medidas de a y b son 8 cm y 6 cm, respectivamente.

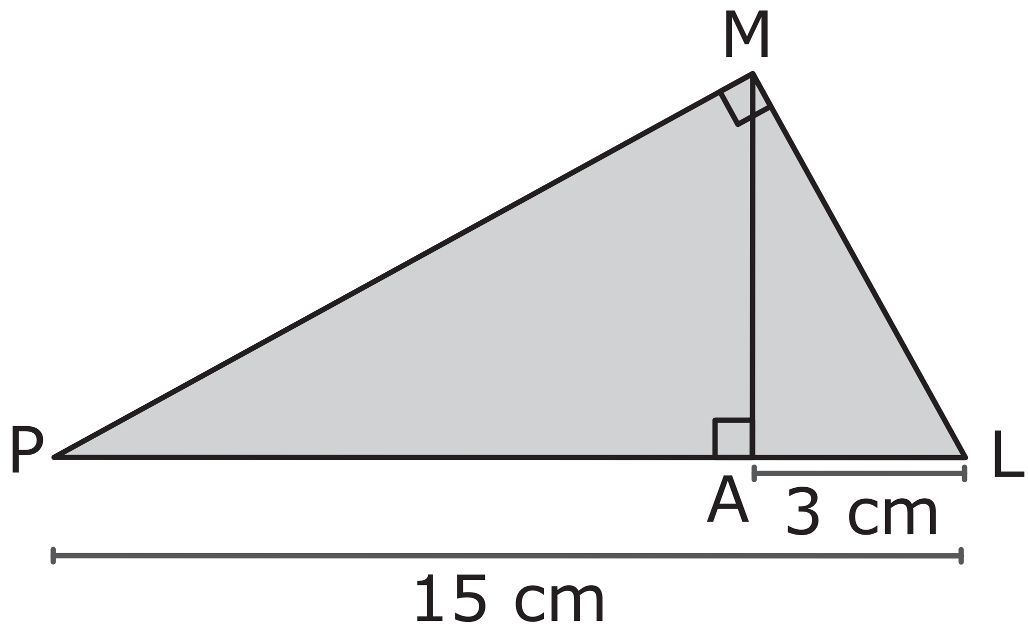
Actividades en tu cuaderno

1. Calcula las medidas pedidas utilizando los teoremas de Euclides.

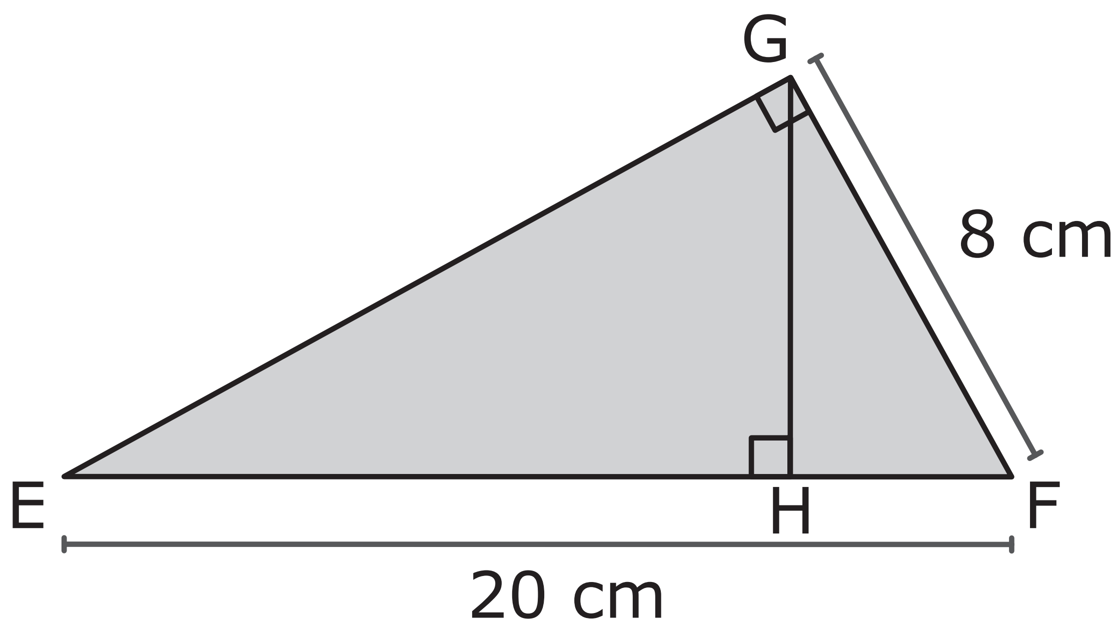
a. $\overline{AD}$



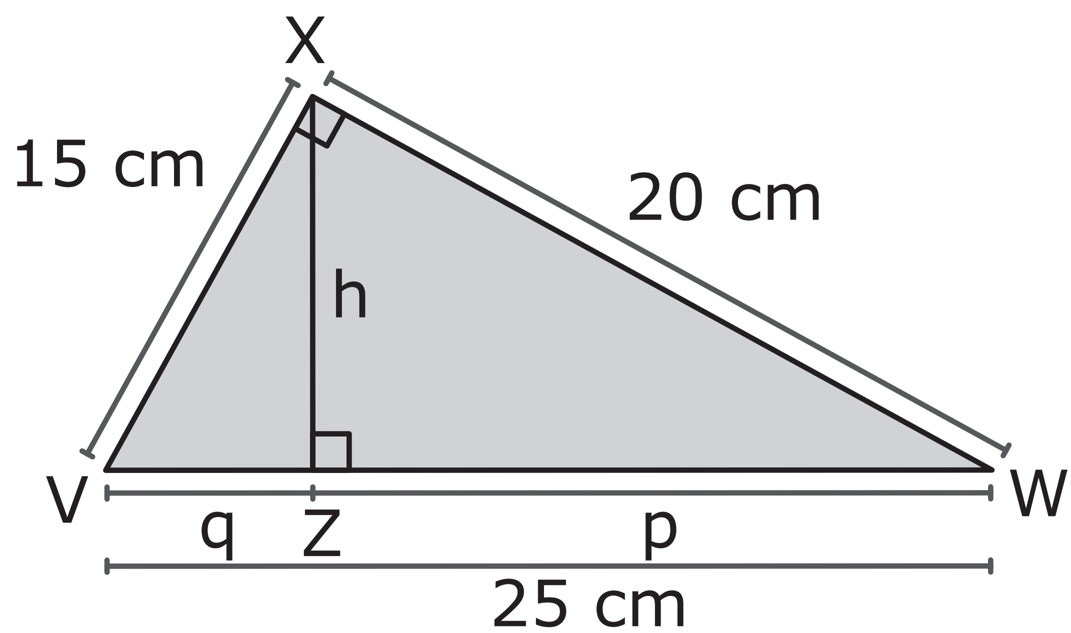
b. $\overline{AM}$



c. $\overline{HF}$



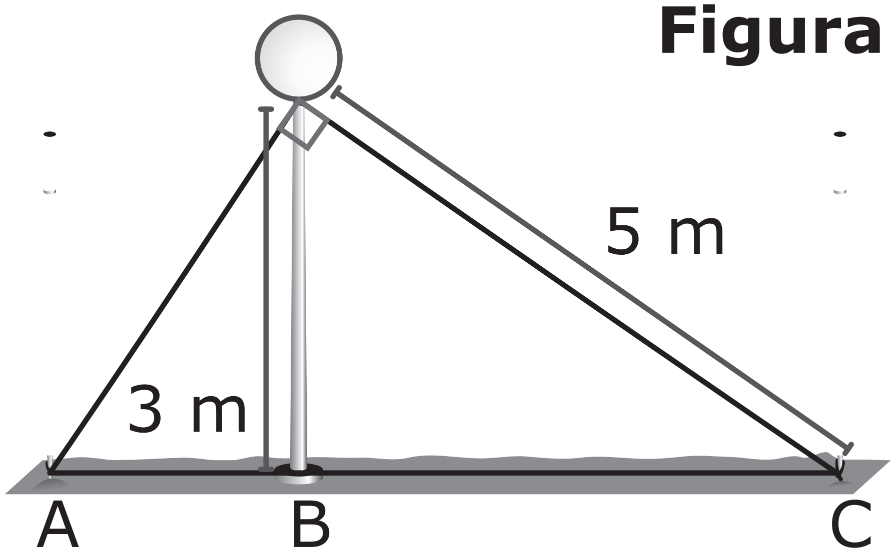
d. p, q y h



2. Resuelve los siguientes problemas.

a. Un poste se encuentra anclado mediante dos cables que forman un ángulo recto, como se muestra en la **Figura 1**. ¿Cuáles son las medidas de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$?

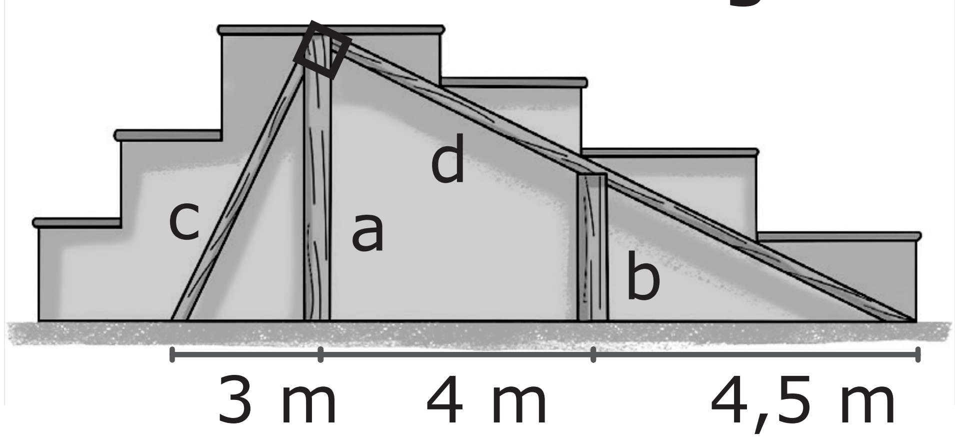
Figura 1



b. Si en un triángulo rectángulo uno de sus catetos mide 8 cm y la proyección del otro cateto sobre la hipotenusa mide 12 cm, ¿es cierto que la medida de la proyección del primer cateto es de 6 cm? Justifica tu respuesta.

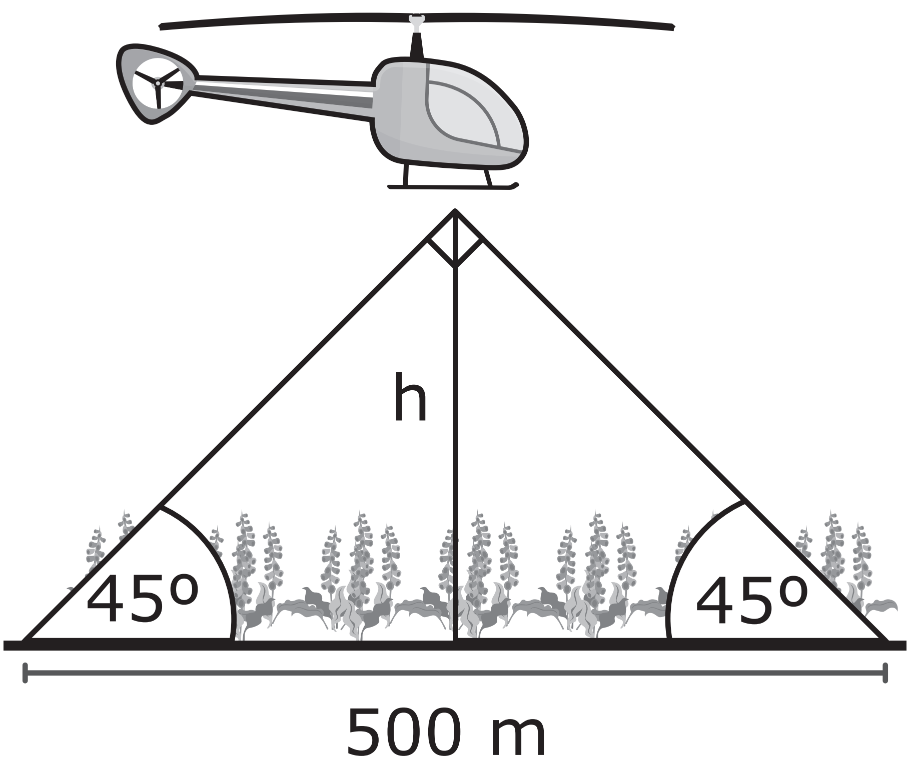
c. Para sostener los asientos de una tribuna, se han puesto por debajo las columnas a y b, y las vigas c y d, como se muestra en la **Figura 2**. Si las vigas forman entre sí un ángulo recto, ¿cuál será la altura de cada columna?

Figura 2

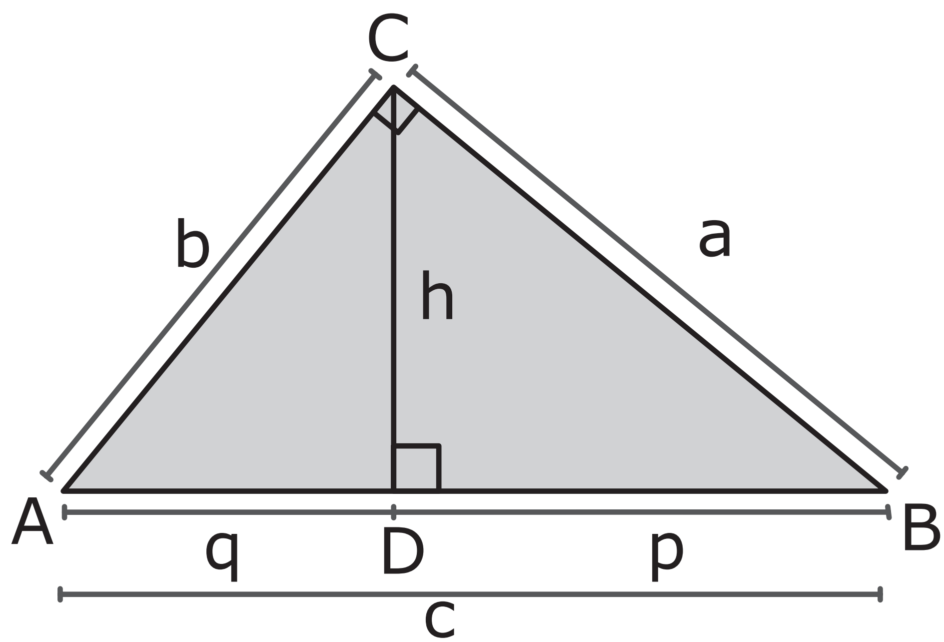


3. **Agricultura.** Resuelve el siguiente problema.

Un agricultor contrata un helicóptero para regar un cultivo que abarca una distancia horizontal de 500 m, como se muestra en la imagen. ¿Cuál es la altura h a la que vuela el helicóptero?



4. Actividad de profundización. Demuestra que en el Δ ABC se cumple que:



a. $b^2 = c \cdot q$

b. $a \cdot b = c \cdot h$

c. $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$

Cuaderno de Actividades

Páginas 1569 a 1589

Cierre

- ¿Qué condiciones se deben cumplir para poder aplicar los teoremas de Euclides?
- ¿Te interesaste por resolver las actividades que consideraste más desafiantes? Explica.

Síntesis

En las páginas tratadas anteriormente has estudiado:

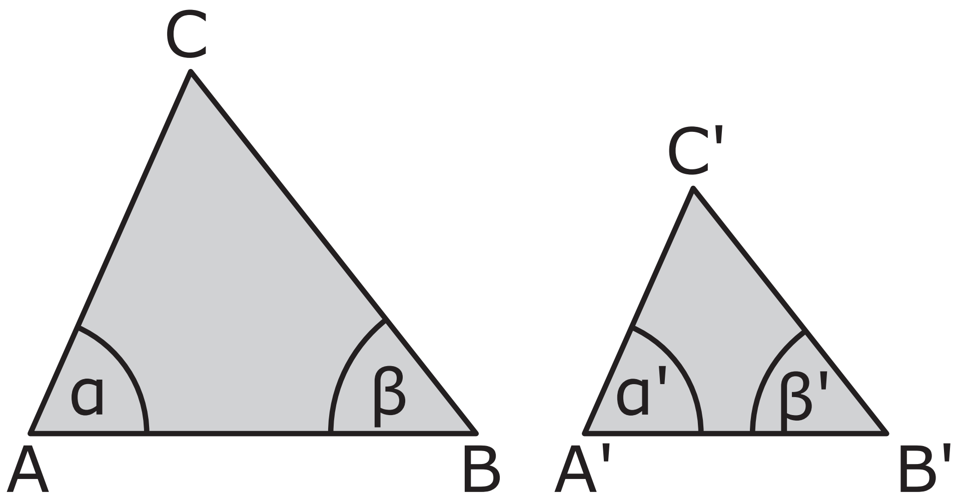
► **Semejanza de figuras**

- Dos figuras son semejantes (~) cuando tienen la misma forma.

- Dos polígonos son semejantes si sus ángulos interiores correspondientes son congruentes y la razón entre las medidas de sus lados correspondientes es constante.

► Criterios de semejanza de triángulos

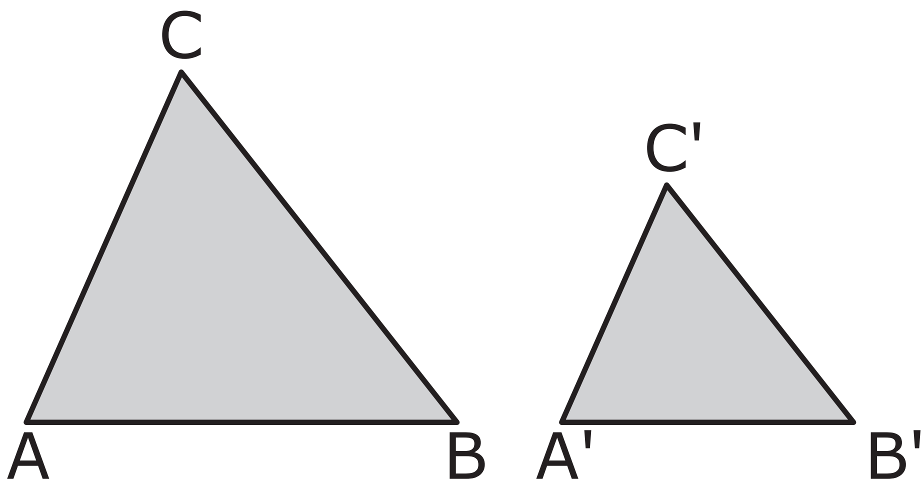
- Ángulo, ángulo (AA)



$$\alpha = \alpha' \quad \beta = \beta'$$

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

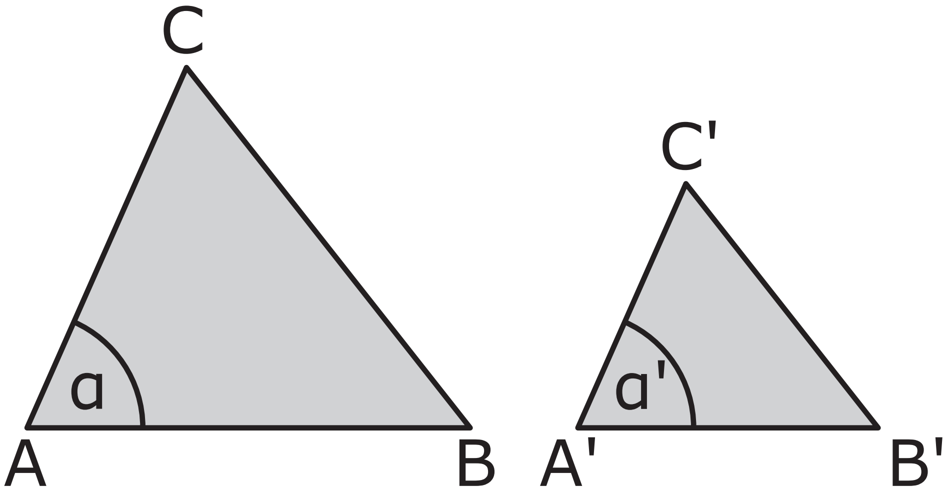
- Lado, lado, lado (LLL)



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

$$\Delta\, ABC \sim \Delta\, A'B'C'$$

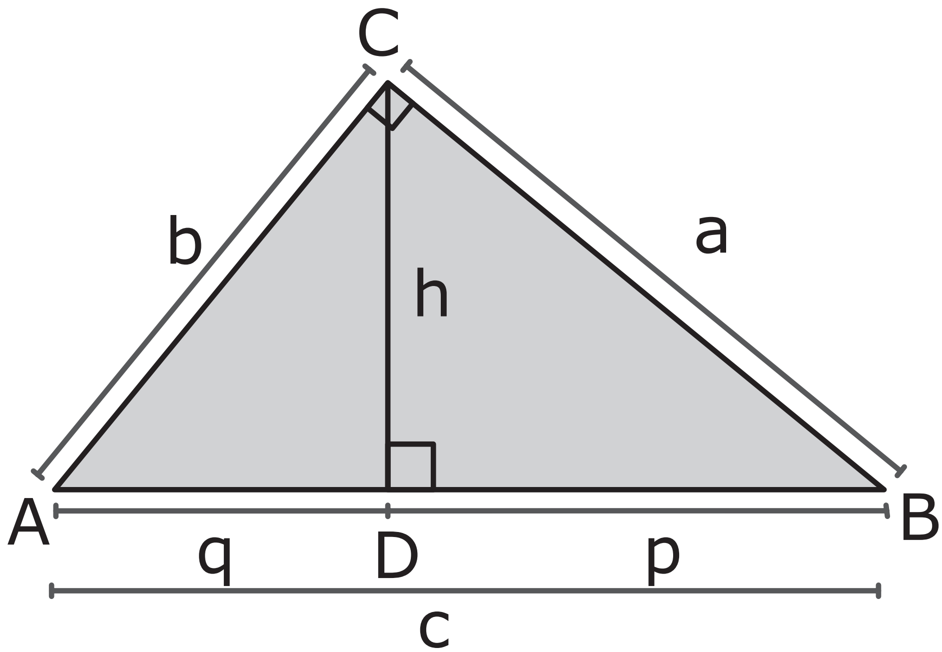
- Lado, ángulo, lado (LAL)



$$\alpha = \alpha' \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{CA}{C'A'}$$

$$\Delta\, ABC \sim \Delta\, A'B'C'$$

► Teorema de Euclides



- Referentes a los catetos

$$a^2 = c \bullet p$$
$$b^2 = c \bullet p$$

- Referentes a los catetos

$$h^2 = p \bullet q$$

Responde:

¿Qué aplicación práctica conociste de la semejanza entre triángulos? Comenta con tu curso y averigüen acerca de la importancia de este tema en áreas como ingeniería, ciencias y arquitectura.

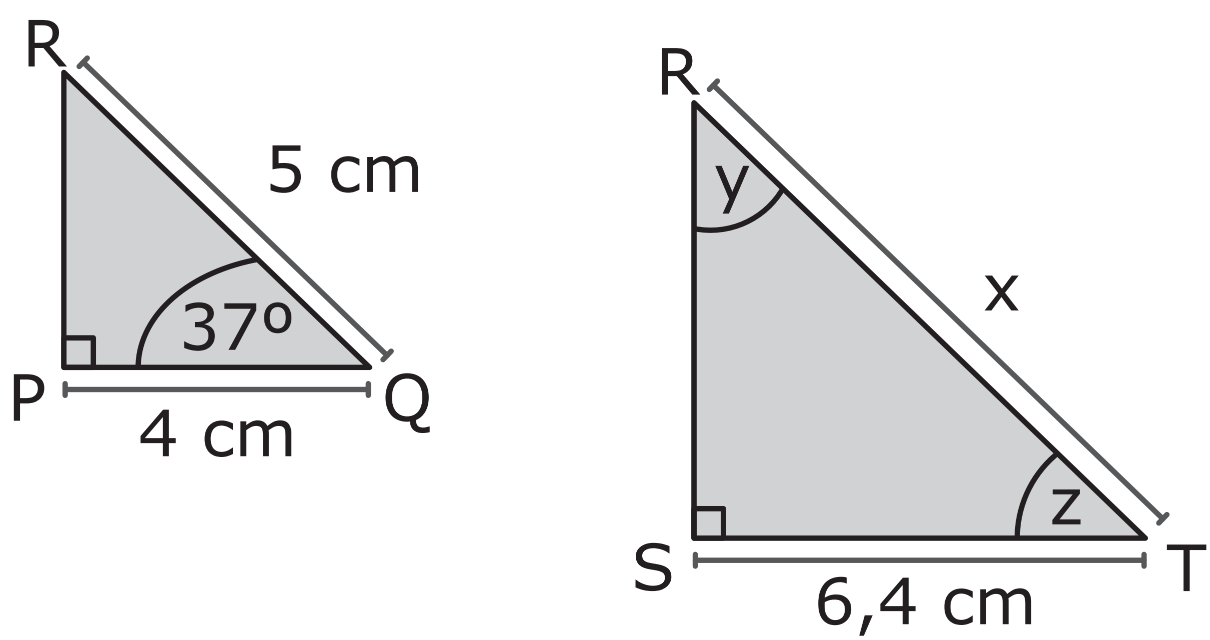
¿Cómo vas?

Evaluación Lección 9

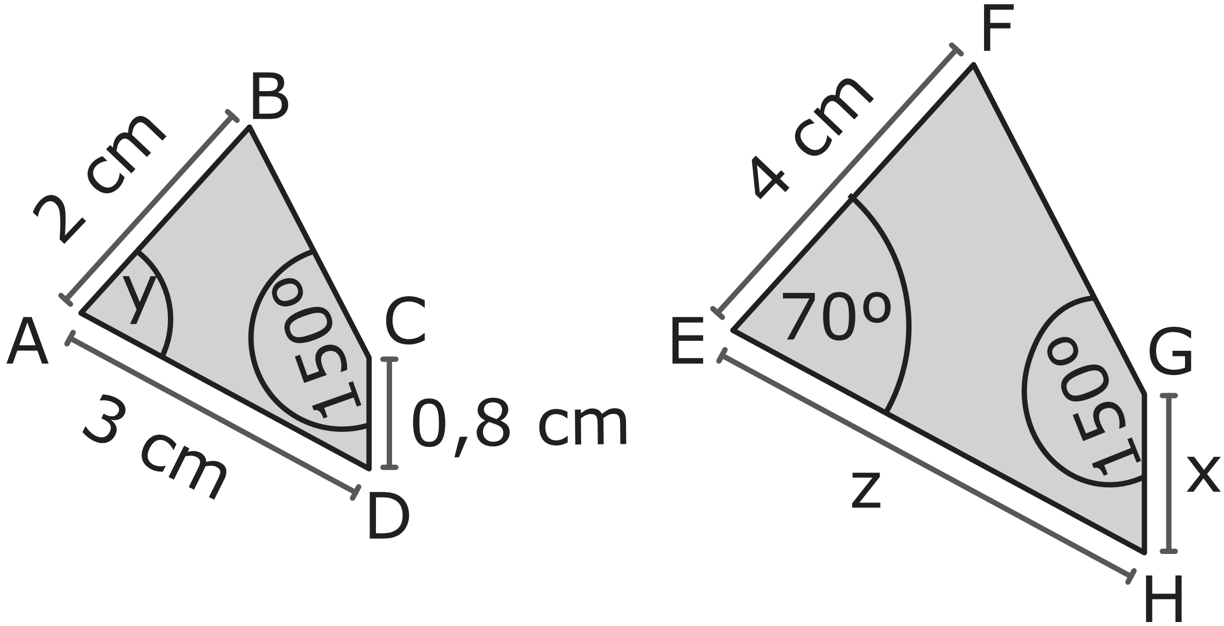
Desarrolla las siguientes actividades en tu cuaderno.

1. Observa los siguientes pares de polígonos semejantes y calcula las medidas de x, y, z.

a.



b.



2. Resuelve el siguiente problema.

Un fotógrafo quiere ampliar las siguientes imágenes utilizando distintas escalas. ¿Qué dimensiones tendrán las fotografías si se quieren ampliar con una escala de 1 **:** 5?

a.

10 cm

8 cm

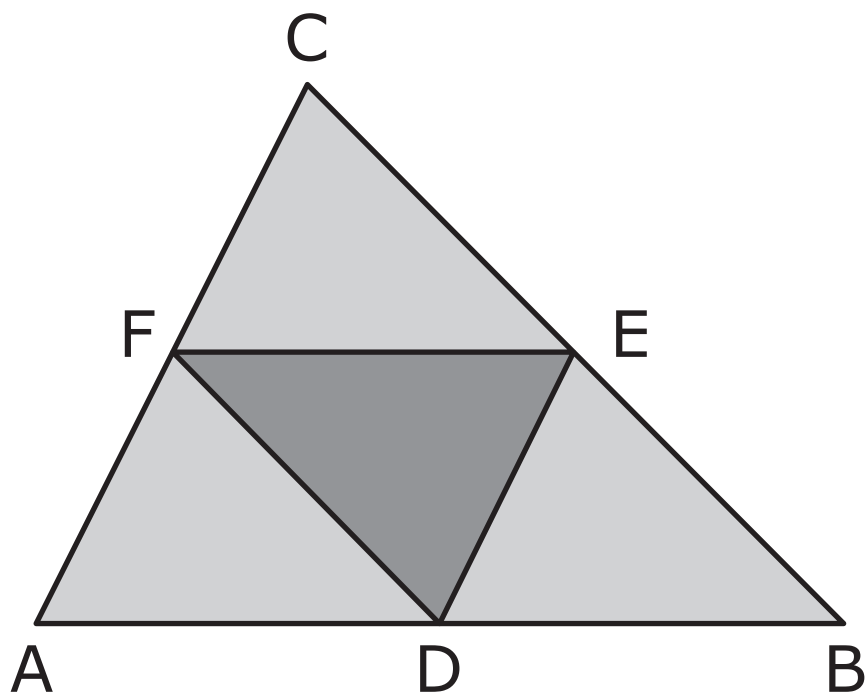
b.

15 cm

15 cm

3. Analiza la siguiente figura y responde.

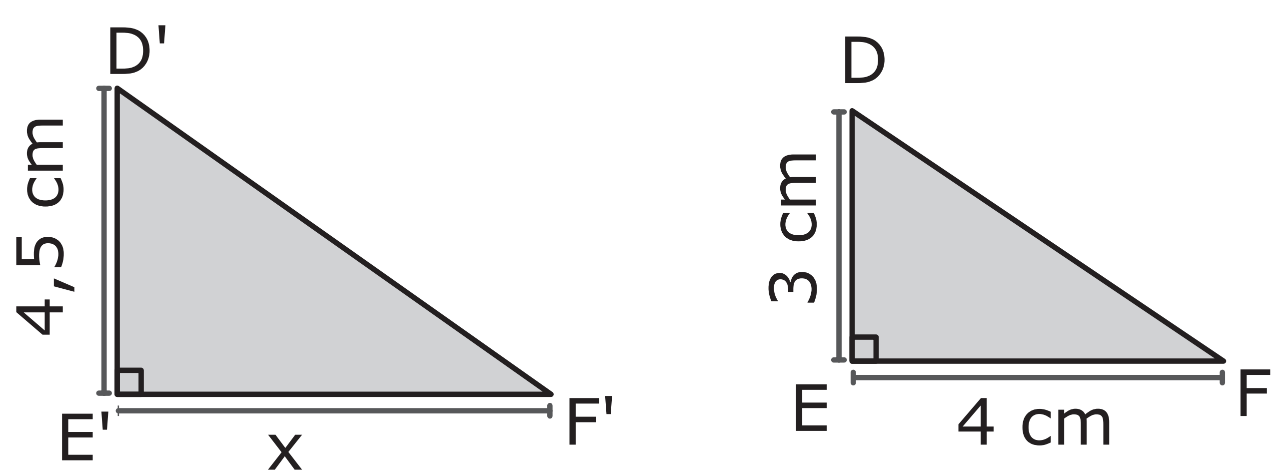
En el triángulo ABC de la figura, D, E y F son puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{CA}$, respectivamente. **Demuestra** que el triángulo ABC es semejante con el triángulo EFD.



4. Indica si la siguiente aseveración es verdadera o falsa. **Justifica** tu respuesta.

Un triángulo ABC tiene lados de longitudes 12 cm, 18 cm y 22,5 cm. Las longitudes de otro triángulo A’B’C’ son 8 cm, 12 cm y 15 cm. Entonces, ambos triángulos son semejantes por el criterio lado, lado, lado (LLL).

5. Analiza las siguientes figuras y responde.



a. Demuestra que los triángulos DEF y D’E’F’ son semejantes.

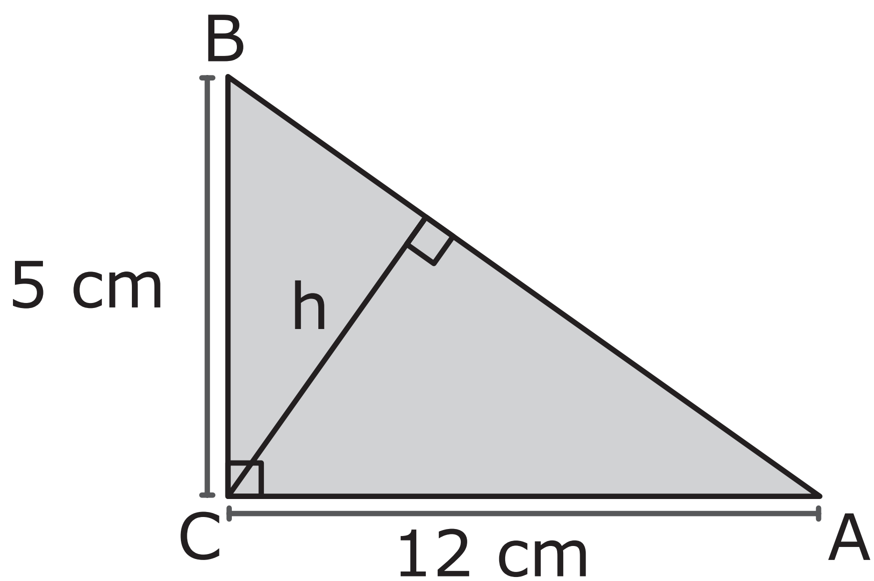
b. Utilizando lo anterior, determina el valor del segmento $\overline{E'F'}$

c. Calcula el área de los triángulos. ¿Cuál es la razón entre sus áreas?

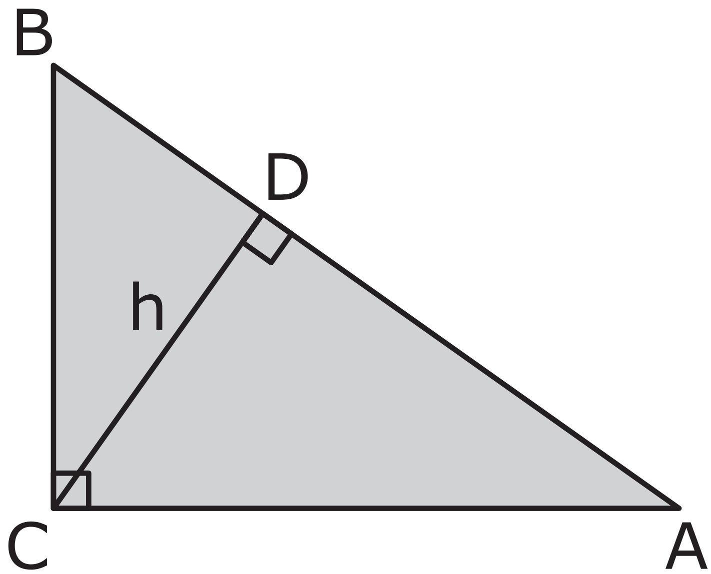
d. Calcula el perímetro de cada uno de los triángulos. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros?

6. Resuelve los siguientes problemas.

a. El triángulo ABC de la figura es rectángulo en C. ¿Cuál es la medida de la altura h?



b. El triángulo ABC de la figura es rectángulo en C, y h es altura. Si BD = 1 cm y AB = 9 cm, ¿cuál es la medida del segmento $\overline{CA}$?



Cuaderno de Actividades

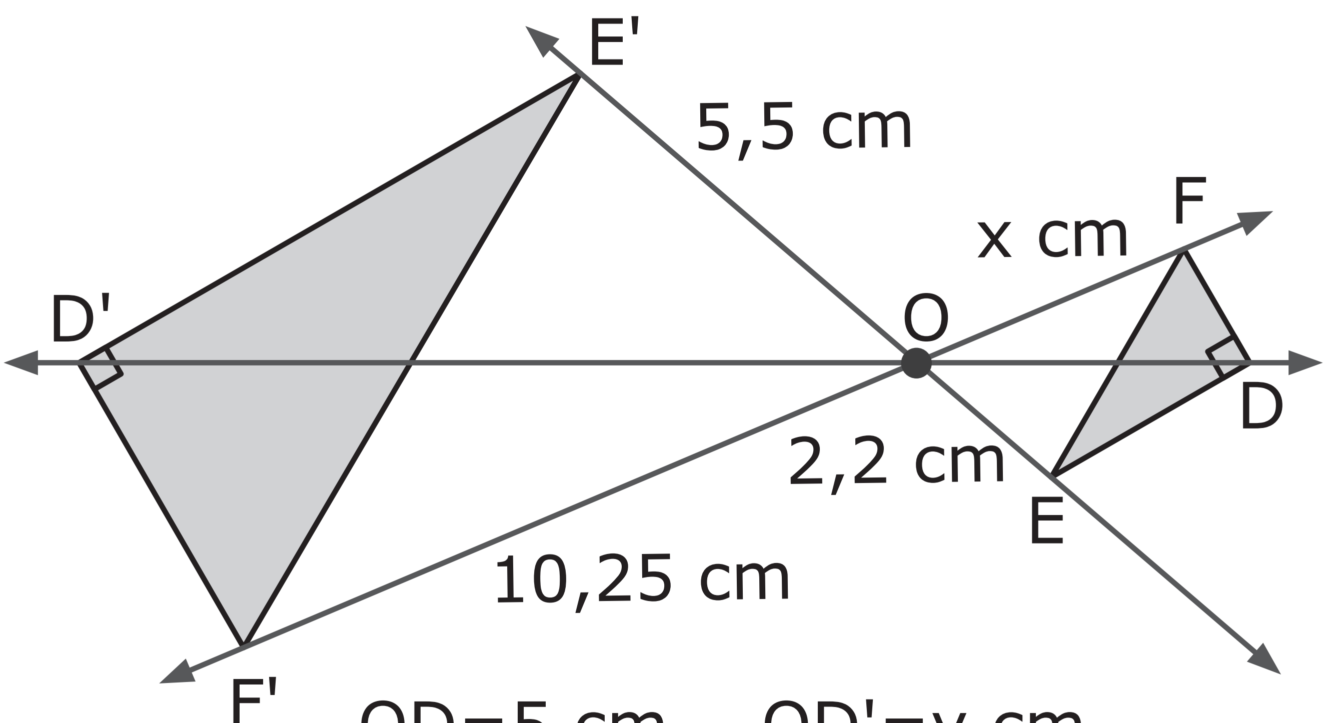
Páginas 1590 a 1597

¿Qué aprendiste?

Evaluación Unidad 3

Desarrolla las siguientes actividades en tu cuaderno.

1. **Observa** la siguiente homotecia y luego responde.



OD=5 cm OD'=y cm

a. ¿Cuál es el valor de la razón de homotecia?

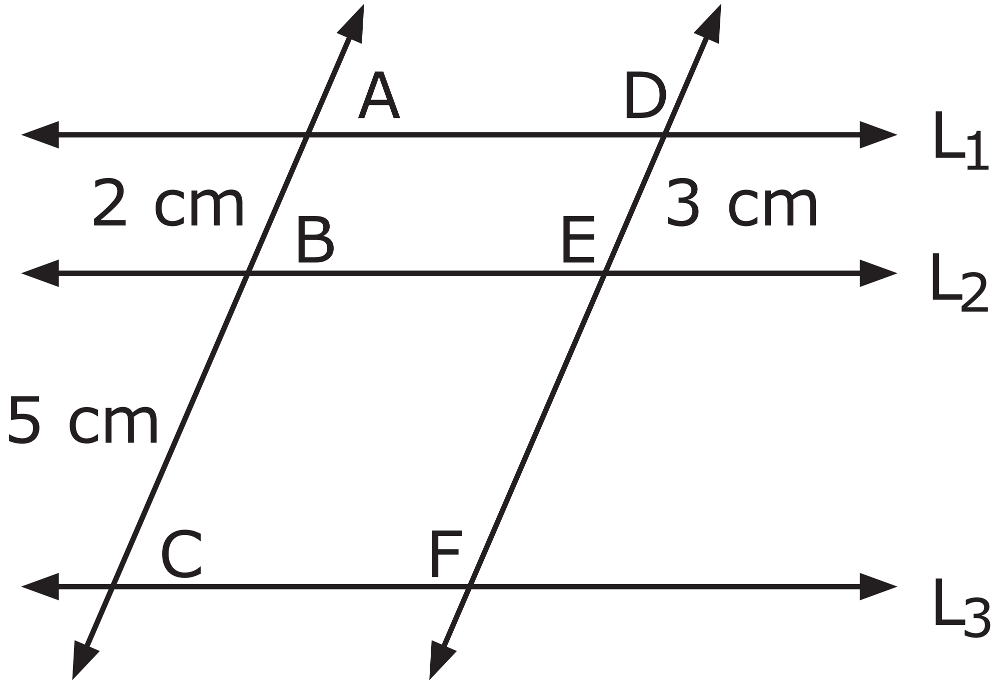
b. ¿Cuánto es x + y?

c. Si FE = 2,5 cm, ED = 2 cm y DF = 1,5 cm, ¿cuál es el perímetro del Δ E′D′F′?

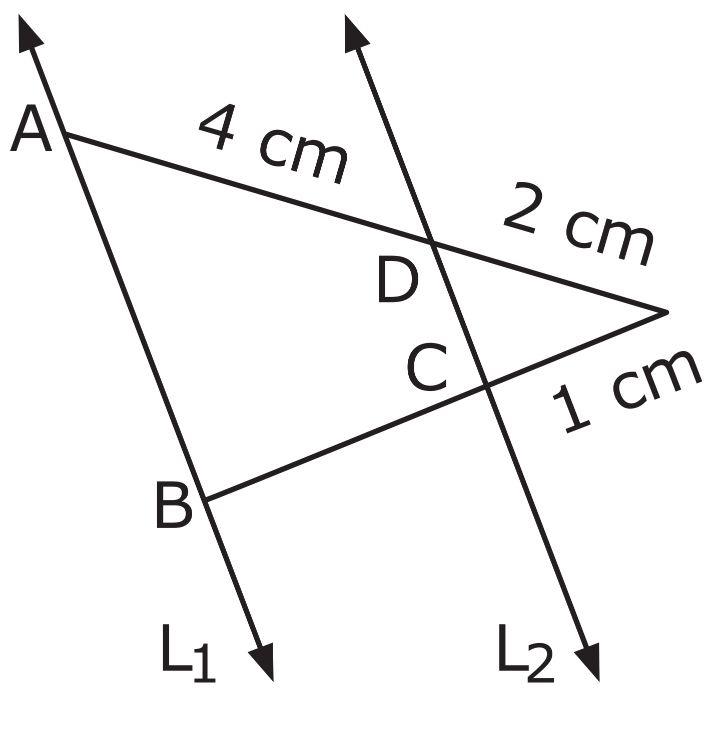
d. Si m(∡D′E′F′) = 20°, ¿cuál es la m (∡EFD)?

2. Calcula lo pedido en cada caso.

a. Si L 1 // L 2 // L 3, calcula la medida de $\overline{DF}$.



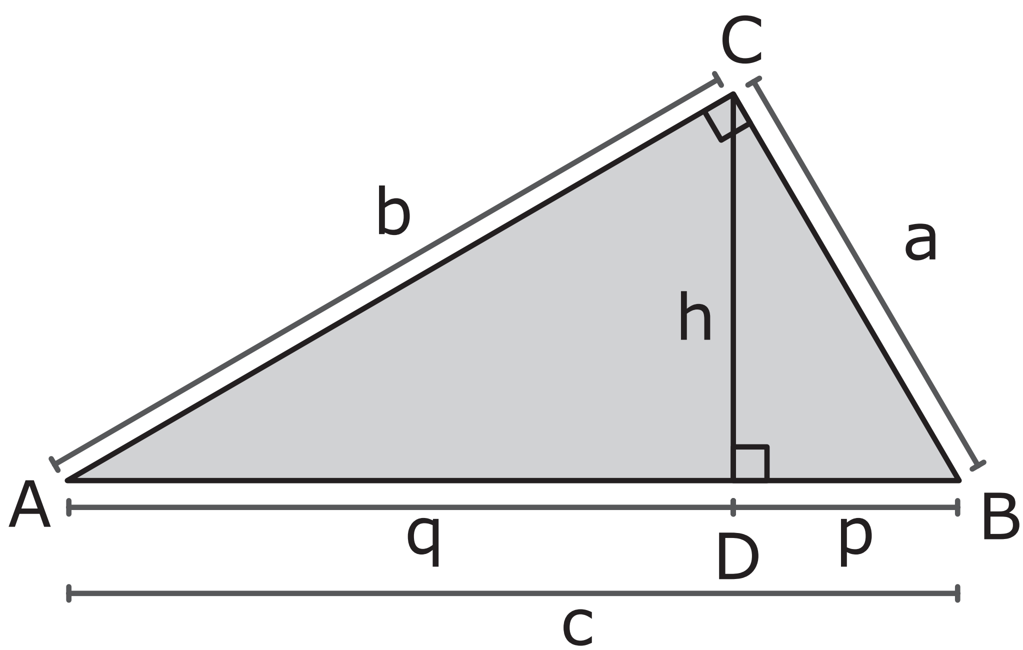
b. Si L 1 // L 2, calcula la medida de $\overline{BC}$.



3. Calcula lo pedido en cada caso. Para ello, considera el triángulo que se muestra.

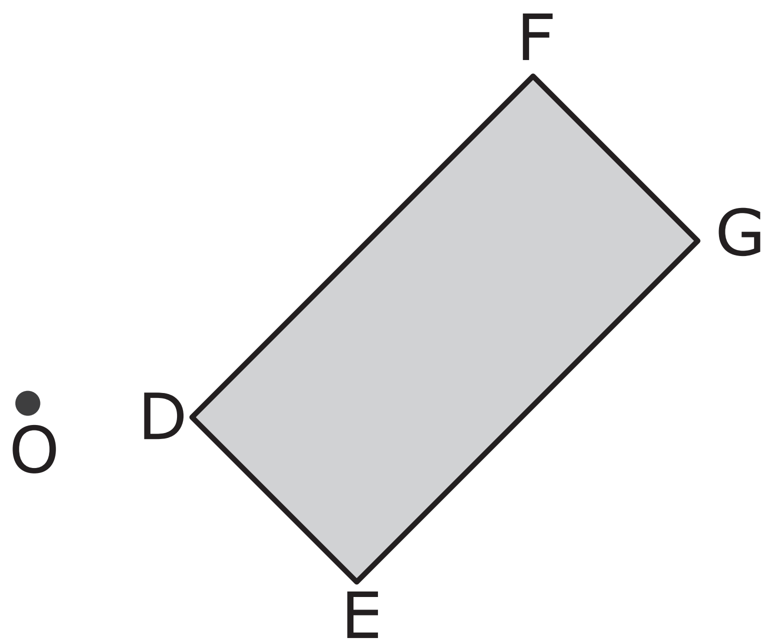
a. Si $a = 8$ cm, $b = 6$ cm y $c = 10$ cm, determina las medidas de p, q y h.

b. Si $a = 9$ cm y $p = 4$ cm, determina las medidas de c, b y h.

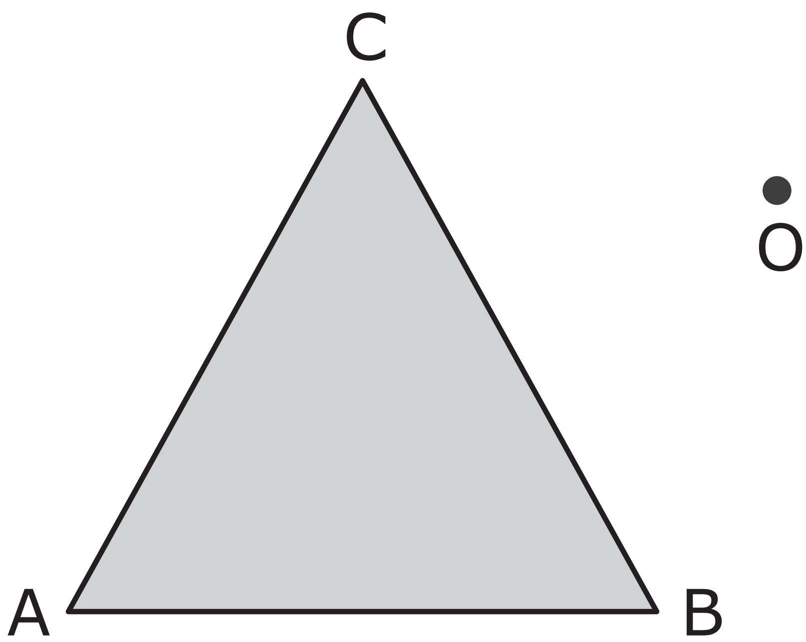


4. Construye cada homotecia de centro O y valor de razón k utilizando regla y compás.

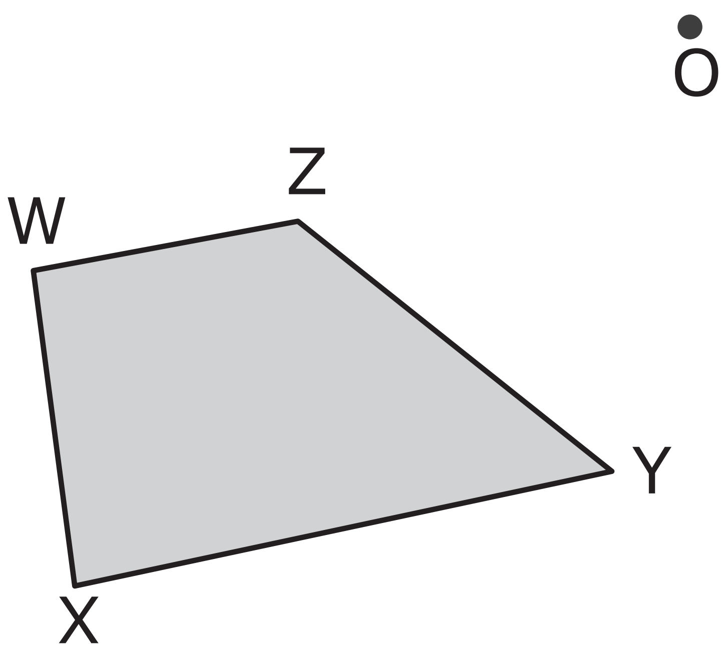
a. $k = -1$



b. k = 2

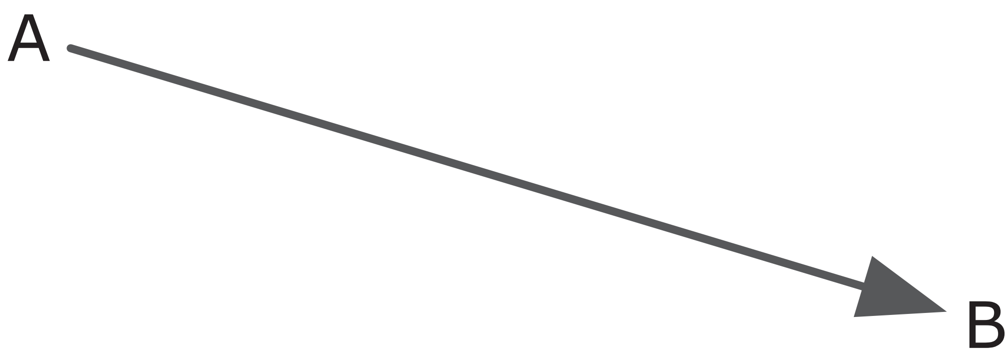


c. k = 0,5



5. Construye cada vector utilizando regla y compás.

a. Construir $-3\overrightarrow{AB}$ a partir de $\overrightarrow{AB}$.



b. Construir $0,5\overrightarrow{CD}$ a partir de $\overrightarrow{CD}$.

6. Evalúa si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. **Justifica**.

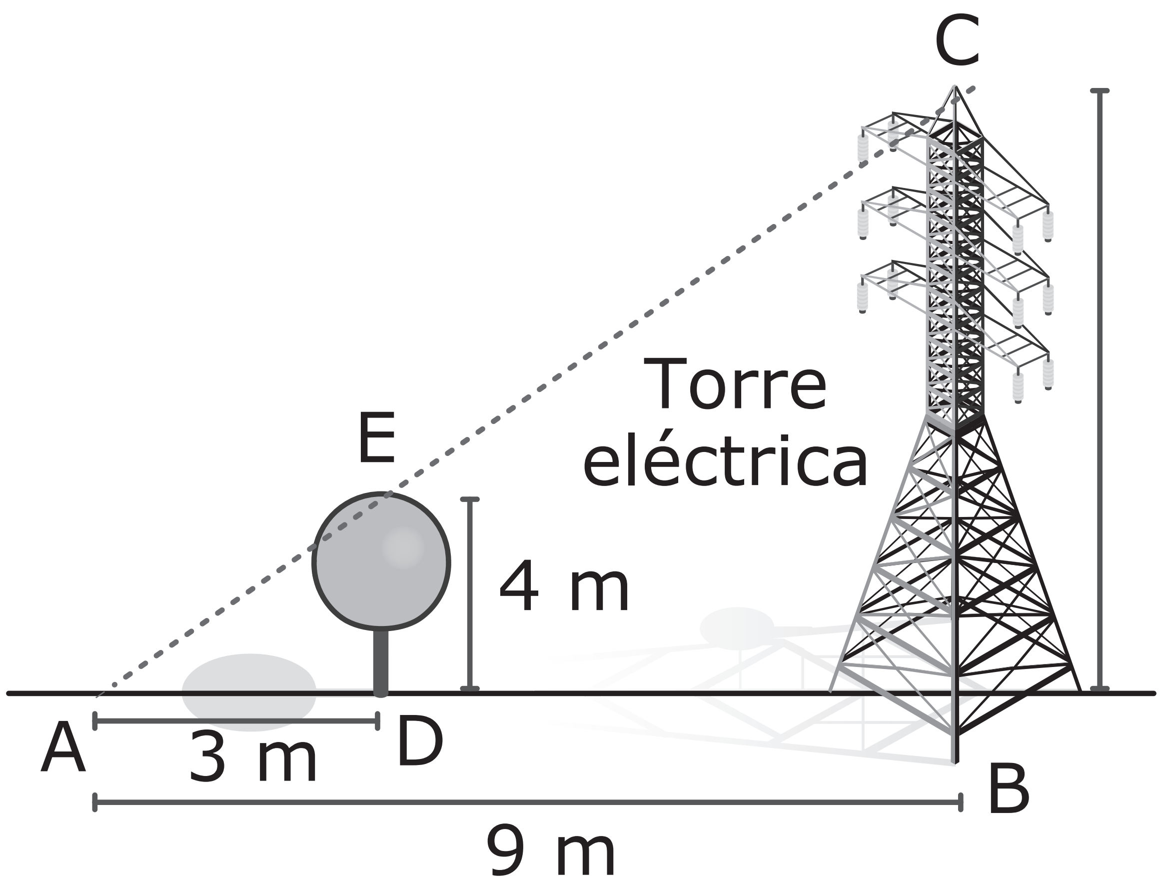
a. Todos los triángulos rectángulos son semejantes.

b. Si dos triángulos rectángulos tienen uno de sus ángulos agudos congruentes, entonces, son semejantes por criterio AA.

c. Para que dos triángulos sean semejantes según el criterio LLL, debe cumplirse que sus lados correspondientes sean congruentes.

7. Resuelve los siguientes problemas.

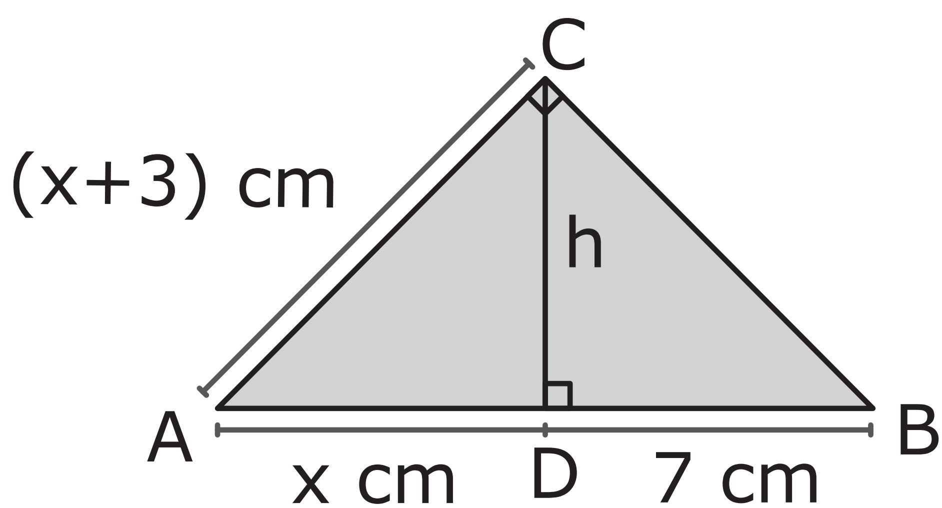
a. Una torre de alta tensión da una sombra, y a la misma hora, un árbol proyecta una sombra, formándose dos triángulos semejantes (Δ ABC ~ Δ ADE), como se muestra en la imagen. ¿Cuál es la altura de la torre?



b. Una araucaria proyecta una sombra de 24 m y un árbol de 1,6 m de altura proyecta una sombra de 3,2 m. ¿Cuál es la altura de la araucaria?

c. ¿Son semejantes dos triángulos cuyos lados miden a = 3 cm, b = 4 cm, c = 5 cm y a′ = 12 cm, b′ = 16 cm, c′ = 21 cm, respectivamente? Justifica tu respuesta.

d. Actividad de profundización. En el triángulo que se muestra, ¿cuál es la medida de la altura h?



Cuaderno de Actividades
Páginas 1598 a 1610

Cierre

- ¿Crees que las actividades grupales durante la unidad fueron enriquecedoras para tu aprendizaje?, ¿por qué?

- ¿Cómo consideras que fue tu trabajo personal durante esta unidad? ¿Lo podrías mejorar?, ¿cómo?

UNIDAD 4
LOS DEPORTES

La Matemática está presente en todas las disciplinas deportivas, por ejemplo: la elección o fichaje de un jugador depende de sus asistencias, goles, porcentaje de posesión, pases, frecuencia de acciones, y técnica, entre otros.

Piensa en lo siguiente y responde.

- ¿Cuál es la probabilidad de marcar un gol en los últimos dos minutos de un partido?
- ¿Has escuchado hablar de estadísticas en deporte? ¿En qué contextos?

- ¿Qué situación o tema de tu interés crees que se pueda relacionar con estadística o probabilidad y con lo que estudiarás en esta unidad? ¿Por qué?

¿Qué sabes?

Evaluación diagnóstica

Desarrolla las siguientes actividades en tu cuaderno.

1. Resuelve las siguientes operaciones.

a. $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$

b. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

c. $\frac{2}{5} \bullet \frac{1}{5} + \frac{3}{8} \bullet \frac{1}{8}$

d. $\frac{4}{5} : \frac{10}{15}$

e. $\frac{8}{15} + \frac{1}{2} \bullet \frac{6}{18}$

f. $\frac{5}{12} \bullet \frac{9}{20} : 10$

g. $\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{4}\right) \bullet \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$

h. $\frac{6}{7} \bullet \frac{14}{15} + \frac{1}{5} : 10$

2. Los siguientes son los segundos que demoraron un grupo de estudiantes en ejecutar un ejercicio:

42	26	22	30	44	22	30
26	38	22	30	22	22	22
26	30	20	44	36	26	

a. Calcula la media (promedio), la mediana y la moda de los datos.

b. Determina el valor de los cuartiles e interpreta.

3. De una bolsa que contiene tres bolitas rojas, dos bolitas amarillas y cuatro verdes se extrae una bolita al azar. Calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

a. Obtener una bolita roja.

b. Obtener una bolita verde.

4. Se lanza cuatro veces una moneda. Responde:

a. Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio.

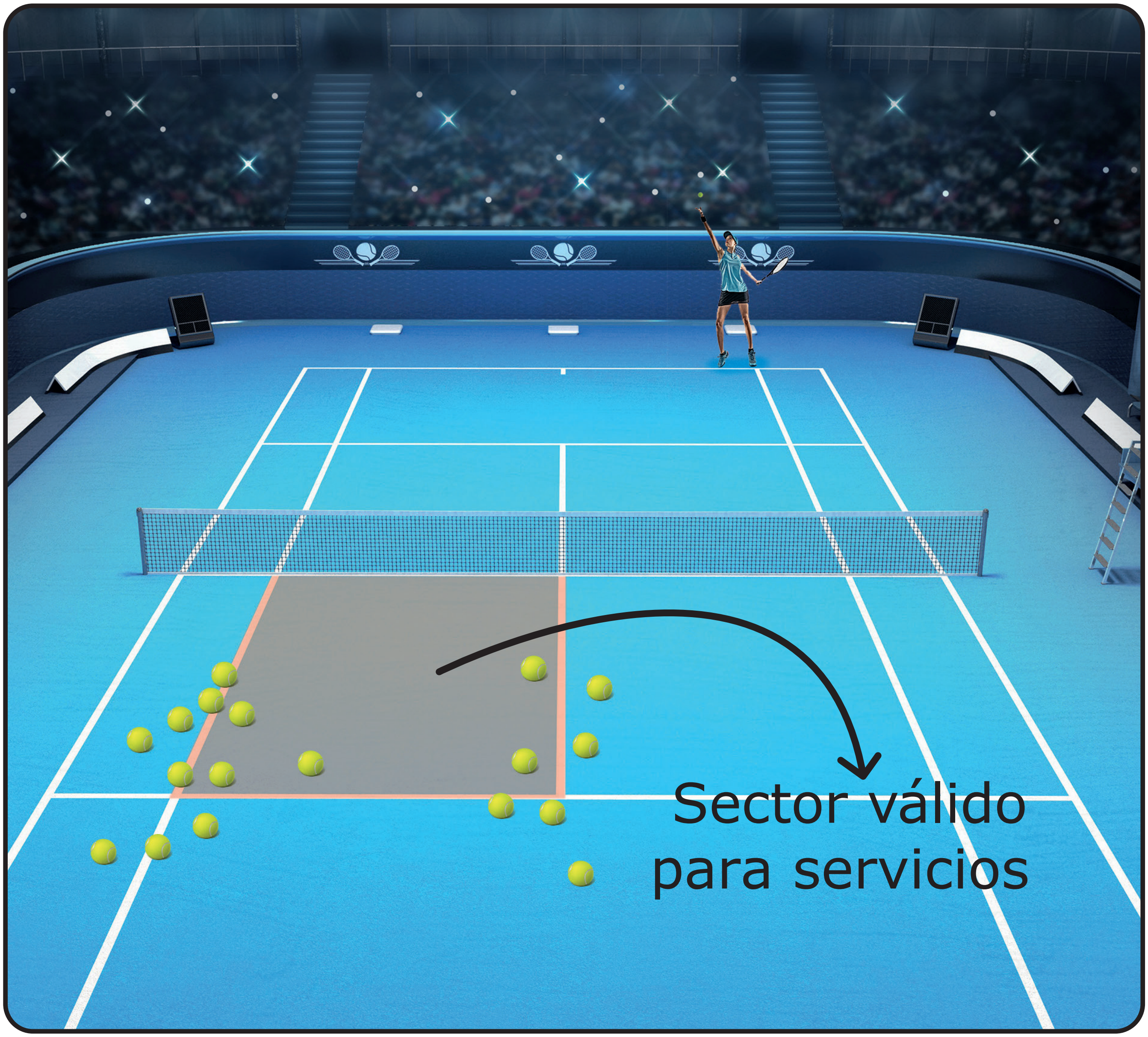
b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cuatro caras?

c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un sello?

- La **media** se obtiene con el promedio de los datos y la moda corresponde al valor con mayor frecuencia.
- La **mediana** divide la distribución de los datos en dos partes iguales y los cuartiles la dividen en cuatro partes iguales.

Lección 10

Análisis de poblaciones



¿Qué situaciones se pueden expresar con gráficos de nubes de puntos?

Analiza la siguiente información, y luego responde.

En el tenis, para que el servicio sea válido, la pelota debe rebotar en el rectángulo del lado contrario, incluyendo la línea blanca.

En la imagen anterior, se muestran los lugares donde rebotó la pelota en los servicios de uno de los jugadores durante el primer set.

1. ¿Cuántas pelotas golpearon fuera del sector de donde es válido el servicio?

2. ¿En qué lugar de la cancha observas una mayor frecuencia de rebotes de la pelota en el piso?

3. ¿Qué conclusión puedes establecer a partir de la información que se presenta en la imagen?

Reflexiona

- ¿En qué otras situaciones se podrían utilizar este tipo de representaciones?

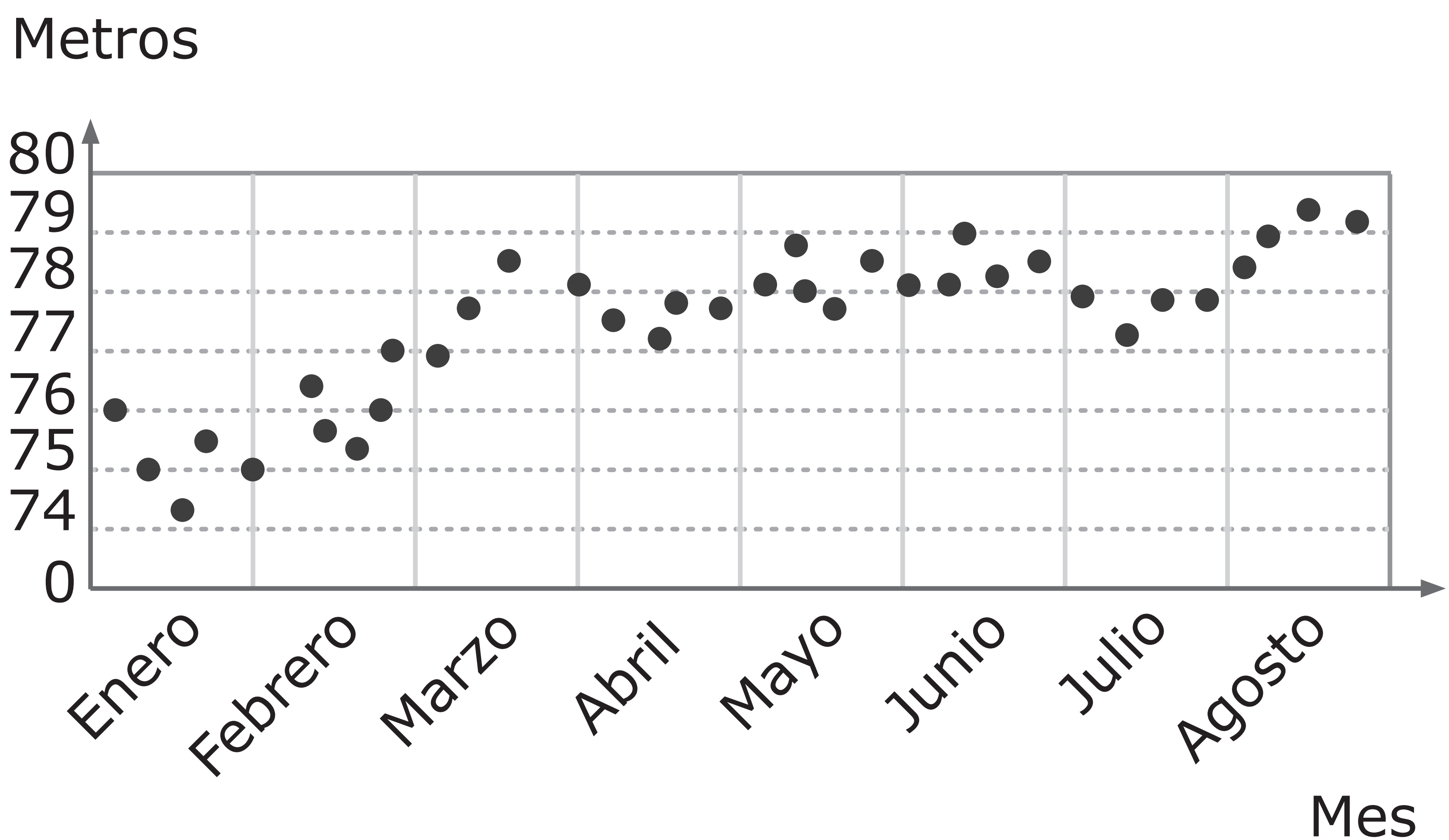
- ¿Estas nubes de puntos podrían determinar un patrón? Comenta con un compañero(a).

- ¿Piensas que este tipo de información permitiría tomar decisiones en cuanto a los contextos que abordan?

REGISTRO DE DISTRIBUCIONES

El lanzamiento del martillo es una disciplina del atletismo que consiste en lanzar una bola de metal unida a una empuñadura a través de un cable de acero. El vencedor será quien, bajo ciertas reglas de ejecución, envíe el implemento a una mayor distancia. En el gráfico se muestran las marcas logradas por una atleta.

Longitud alcanzada en lanzamiento de un martillo



- ¿Cuál es la mayor longitud conseguida por la atleta?

- ¿Qué conclusiones puedes establecer?

- ¿Qué podría justificar la tendencia que se observa en la longitud alcanzada y el tiempo transcurrido?

En muchas ocasiones diremos que hay una **tendencia lineal** cuando se puede trazar una línea recta aproximada entre los puntos.

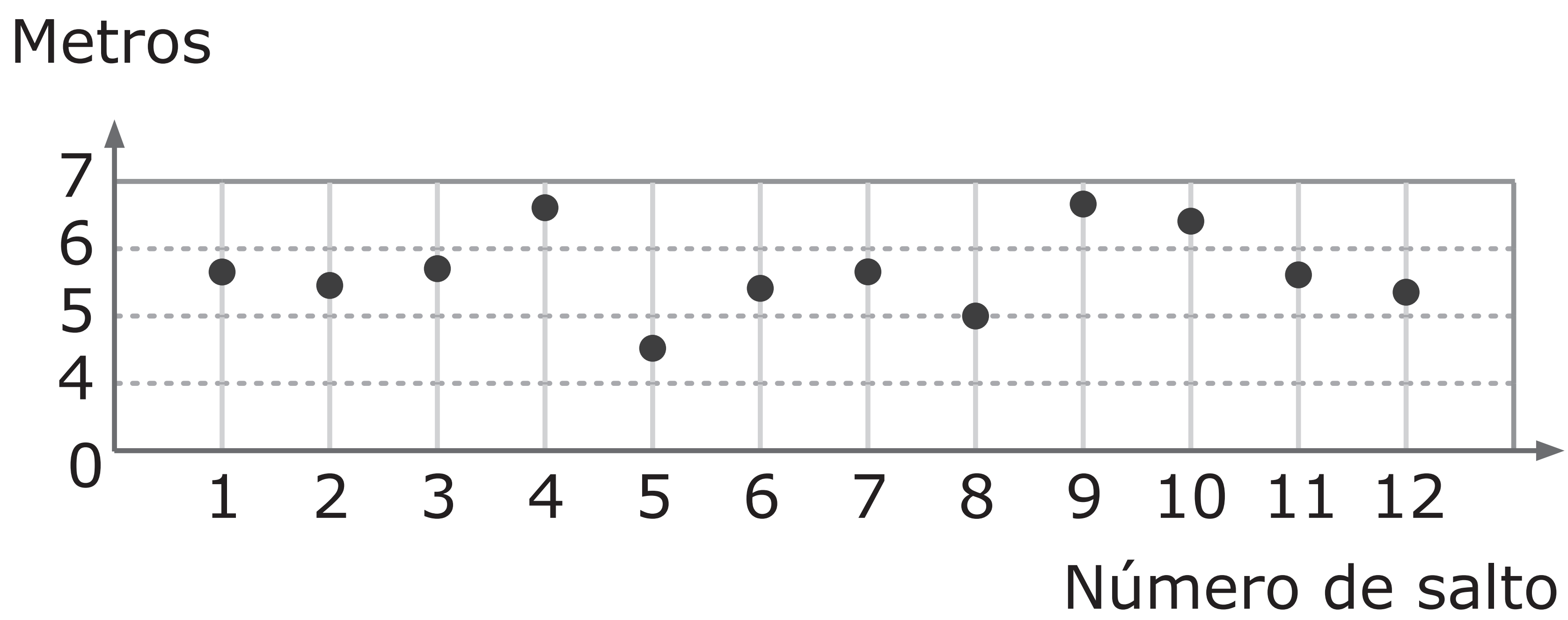
Ejemplo 1

Para analizar el desempeño de un atleta que practica salto largo se representan en un gráfico las longitudes en metros que alcanza en doce saltos diferentes:

5,8	5,7	5,9	6,7	4,7	5,5
5,6	5,0	6,6	6,5	5,5	5,4

Registra los datos con un punto en las longitudes alcanzadas.

Longitud alcanzada en salto largo



De la gráfica se concluye que la dispersión de sus saltos es amplia y que la mayoría de ellos alcanzan entre los 5 y 6 metros.

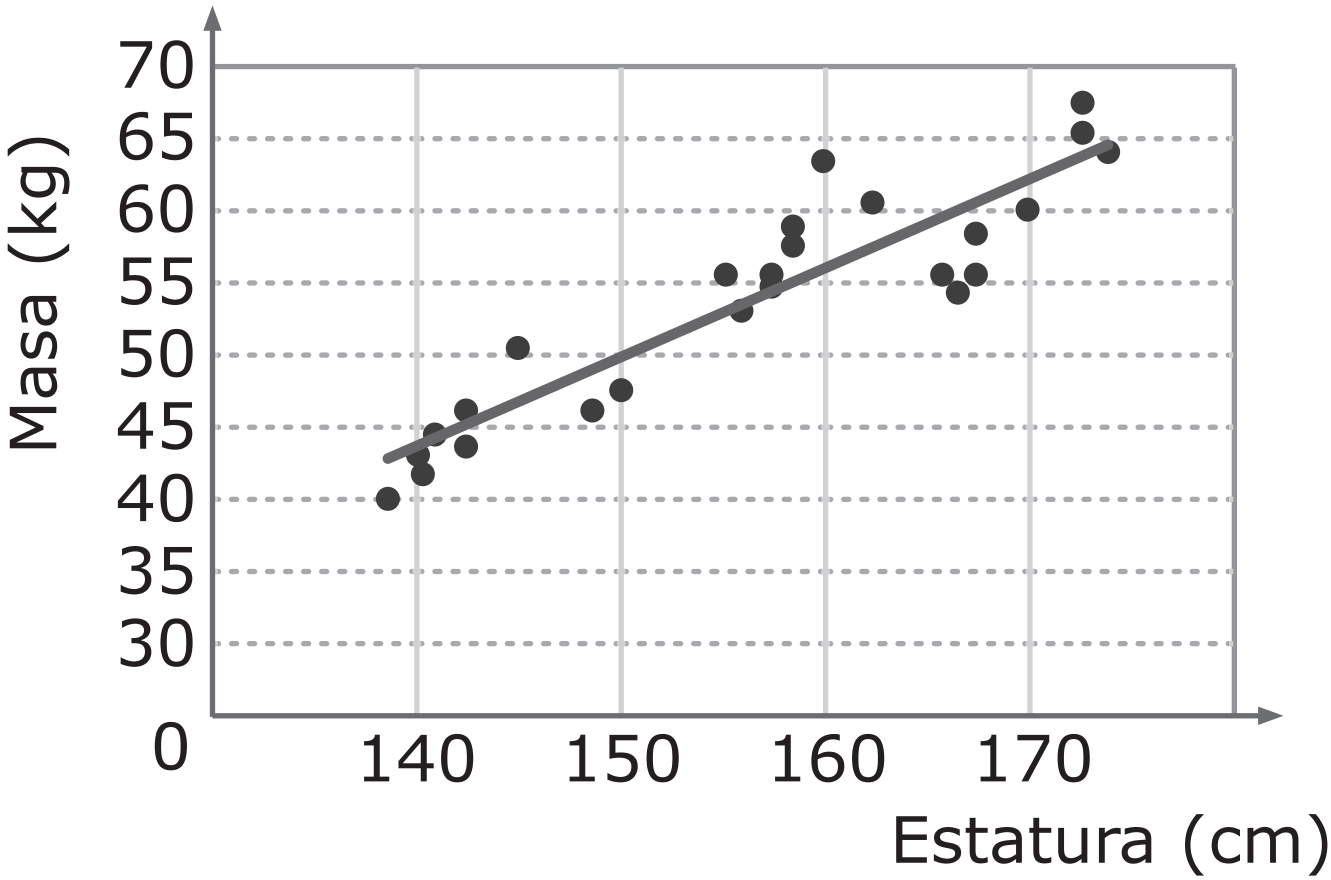
Una **nube de puntos** corresponde a la gráfica de dispersión de un conjunto de pares ordenados en el plano cartesiano, en la que las coordenadas de cada punto corresponden a una variable cuantitativa en estudio.

Ejemplo 2

Un grupo de estudiantes quieren determinar de qué manera se relacionan las variables estatura y masa. Para analizar la relación que existe entre ellas, toman los datos de 24 mujeres que se atienden en un centro médico.

Al representar los datos en un gráfico, resulta lo siguiente:

Masa de mujeres según su estatura



Al trazar una línea recta, se puede observar una tendencia lineal, es decir, que las variables se relacionan, aproximadamente, de manera proporcional.

Una variable puede ser cuantitativa o cualitativa.

- Es **cuantitativa** cuando sus valores son numéricos, por ejemplo, la estatura o la masa corporal. Considera que en esta lección se trabajarán valores racionales.

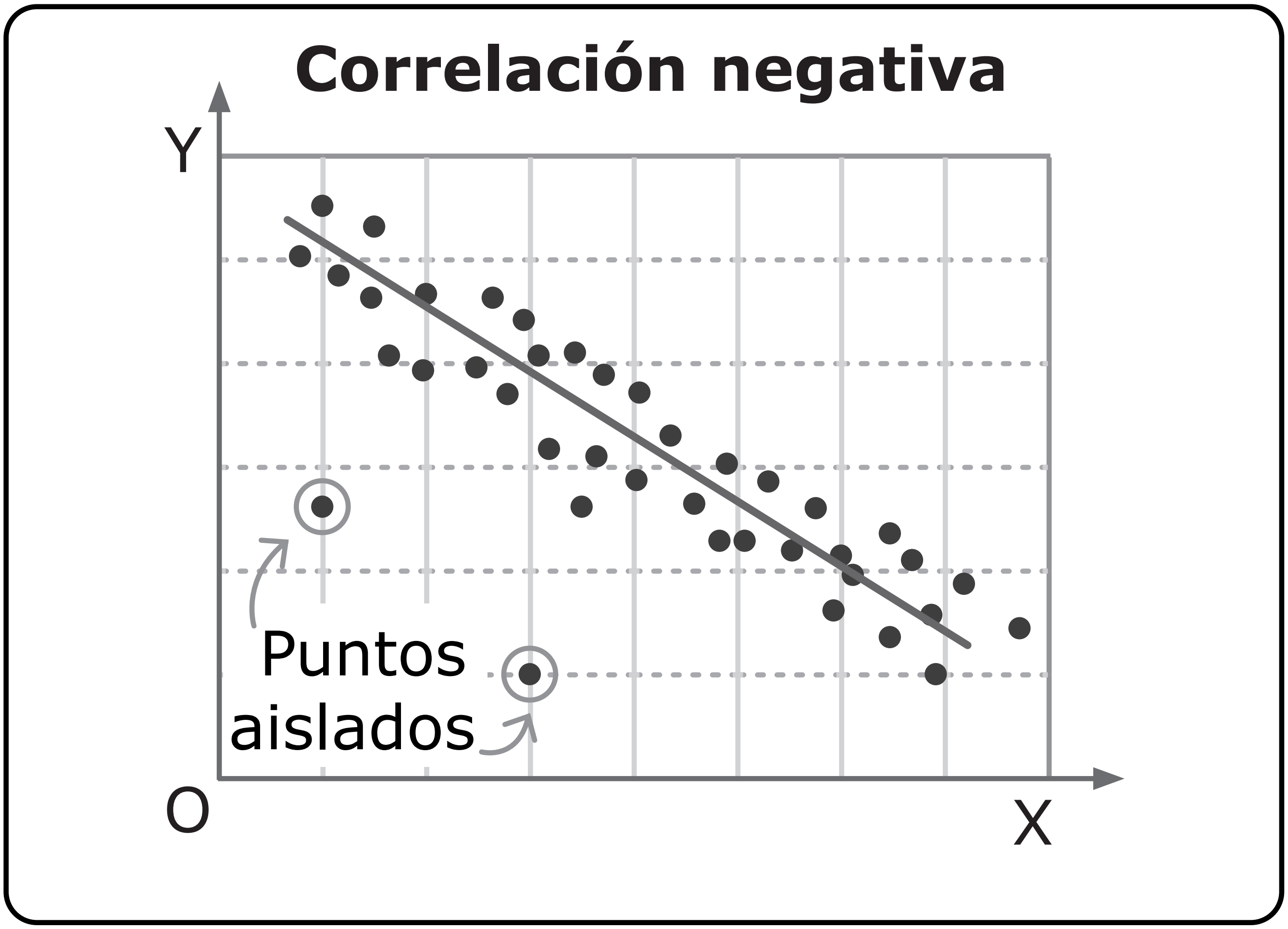
- Es **cualitativa** si sus valores son categorías no numéricas, como el color de ojos o de pelo.

- Cuando una nube de puntos tiene una tendencia semejante a una recta o están en torno a una recta, se dice que las variables están **correlacionadas linealmente**.

- Dos variables se **correlacionan de manera positiva** si los valores de ambas aumentan o disminuyen simultáneamente.
- Dos variables se **correlacionan de manera negativa** cuando los valores de una variable aumentan y los de la otra disminuyen.

- Si en el gráfico se muestran algunos puntos con un comportamiento muy distinto al de los demás, se dice que son **puntos aislados o puntos atípicos.**

Correlación positiva

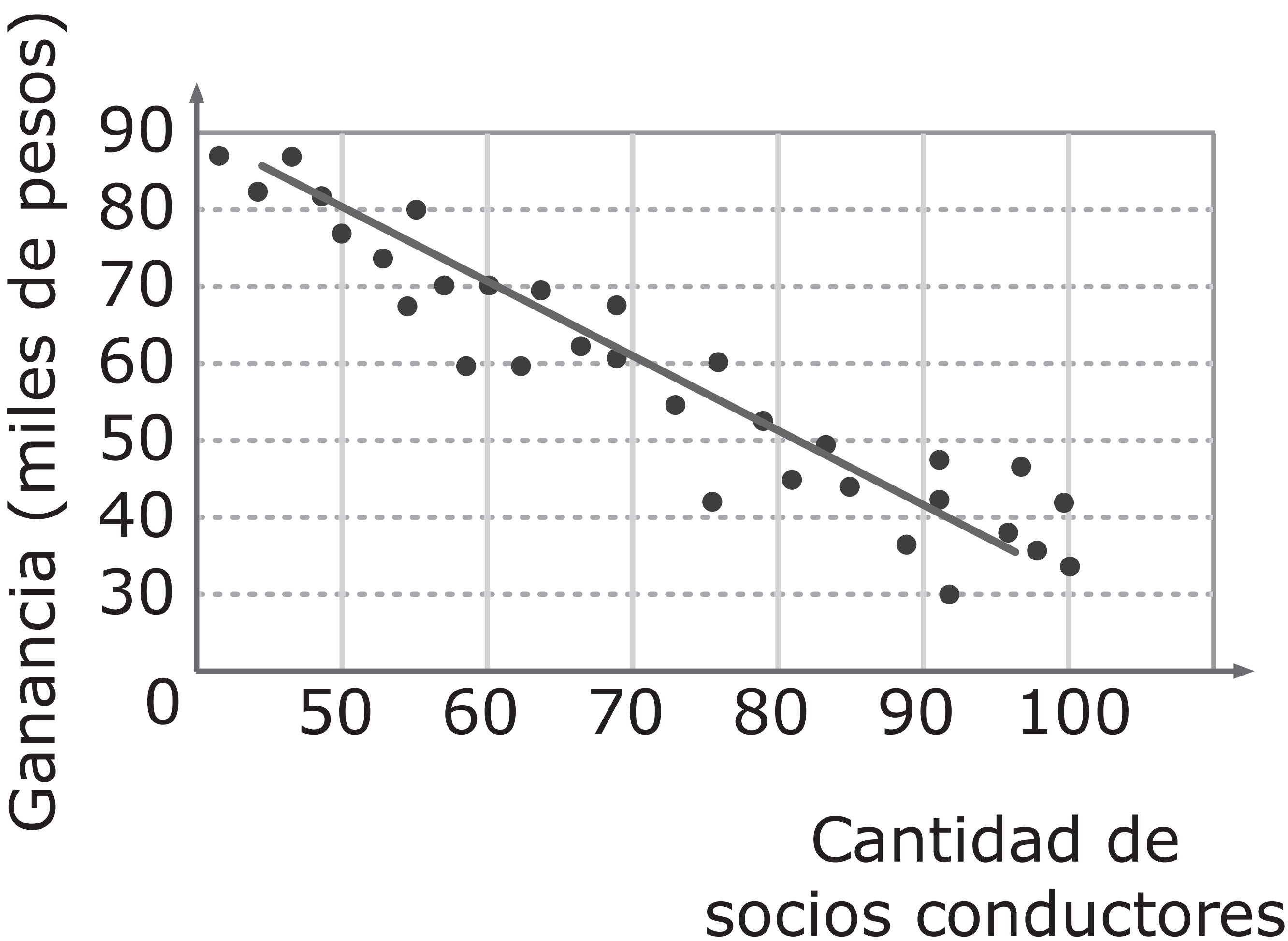


Ejemplo 3

Una empresa de transporte formada por socios conductores realiza un estudio sobre las ganancias que alcanzan en promedio al ir aumentando la cantidad de socios en el tiempo.

Al representar los datos en un gráfico, se obtiene lo siguiente:

Ganancia promedio diaria de socios conductores

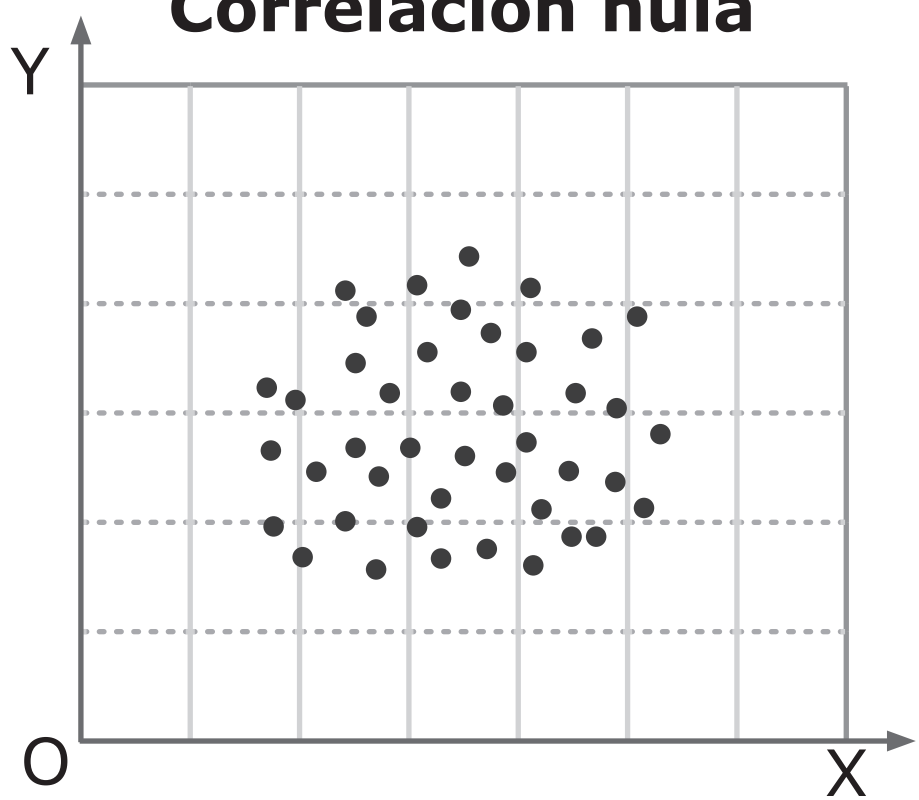


A partir de la gráfica, se concluye que al aumentar la cantidad de socios conductores, la ganancia disminuye.

En la situación del **Ejemplo 3**, la empresa propone dos acciones a partir de los resultados: realizar una campaña publicitaria para tener más clientes y ser más rigurosos a la hora de aceptar nuevos socios conductores. ¿Qué opinas acerca de estas medidas? ¿Propondrías otra? Comenta con un compañero(a).

Dos variables tendrán una **correlación nula** si no es clara la relación entre las variables, es decir, no presentan una correlación positiva o negativa. En estos casos la nube de puntos que corresponde a la relación entre las variables no se puede representar con una línea recta.

Correlación nula

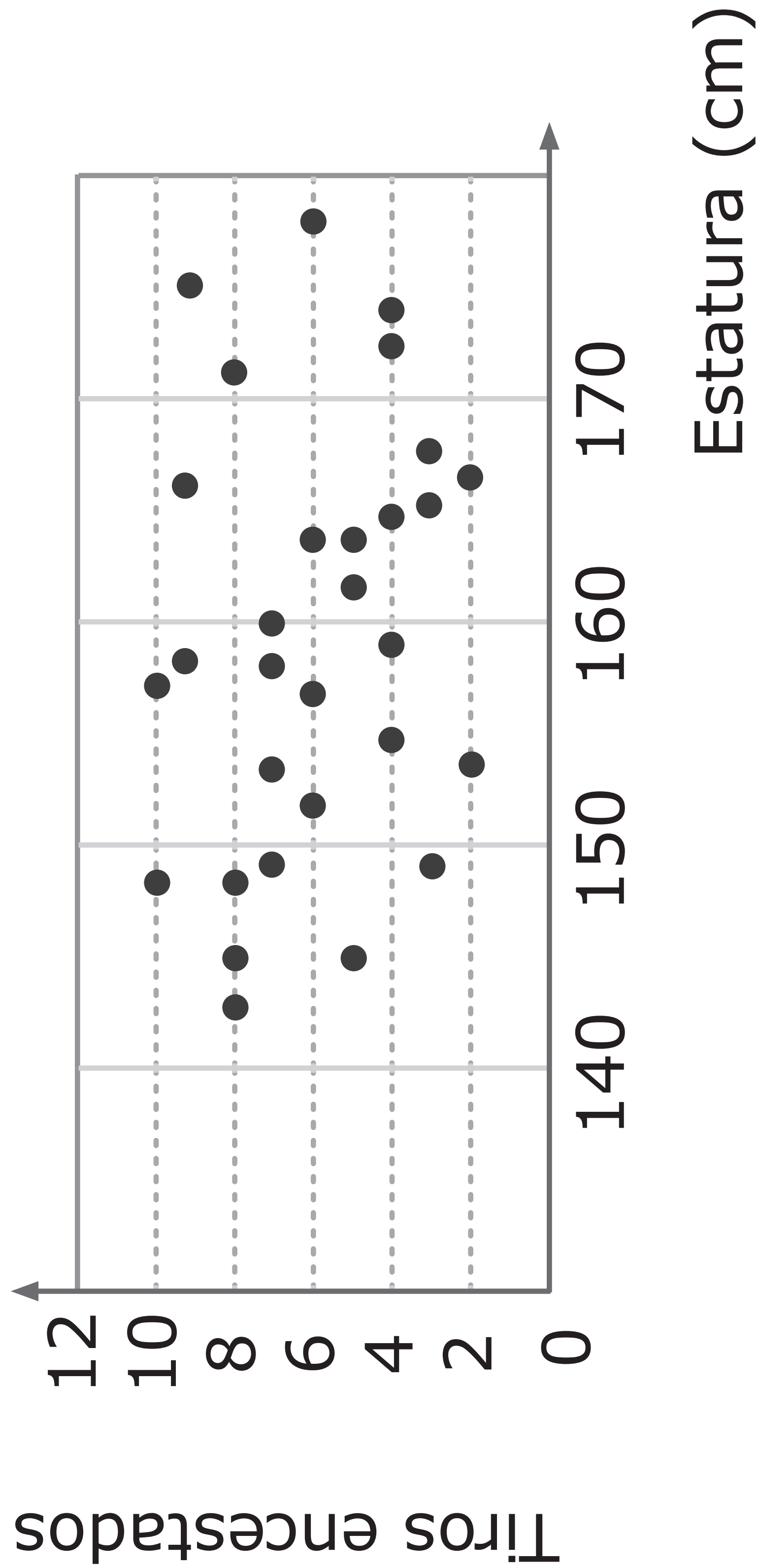


Ejemplo 4

Un grupo de estudiantes aseguran que una mayor estatura no garantiza un mejor desempeño en la ejecución de un tiro libre en el básquetbol. Para demostrarlo, sugirieron realizar un estudio considerando una muestra de 30 estudiantes, de diferentes estaturas, y les propusieron lanzar diez tiros libres a cada uno.

Registraron los resultados en el siguiente gráfico:

Tiros encestados en basquetbol por 30 estudiantes



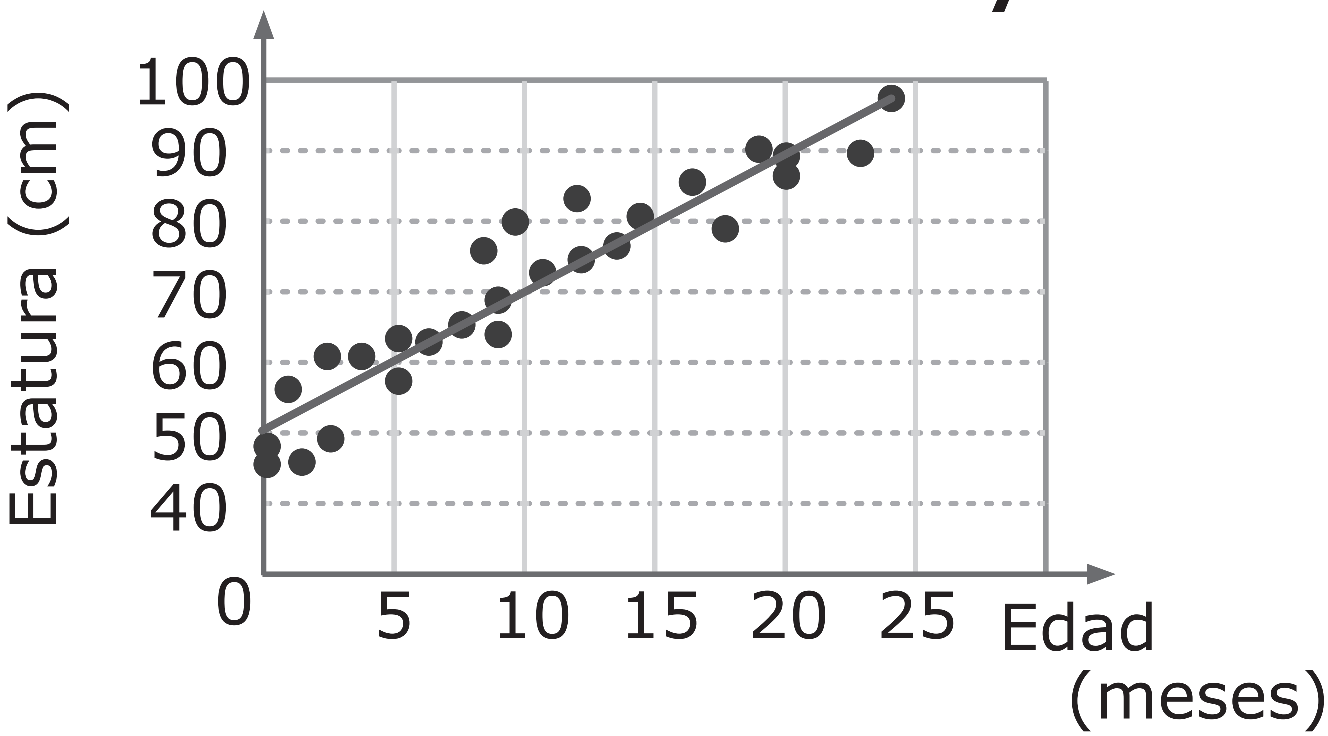
Los estudiantes señalan que como no existe correlación positiva ni negativa, se confirma que una mayor estatura no garantiza un mejor desempeño en la ejecución de tiro libre.

¿Qué opinas respecto de la conclusión de los estudiantes? Comenta con un compañero(a).

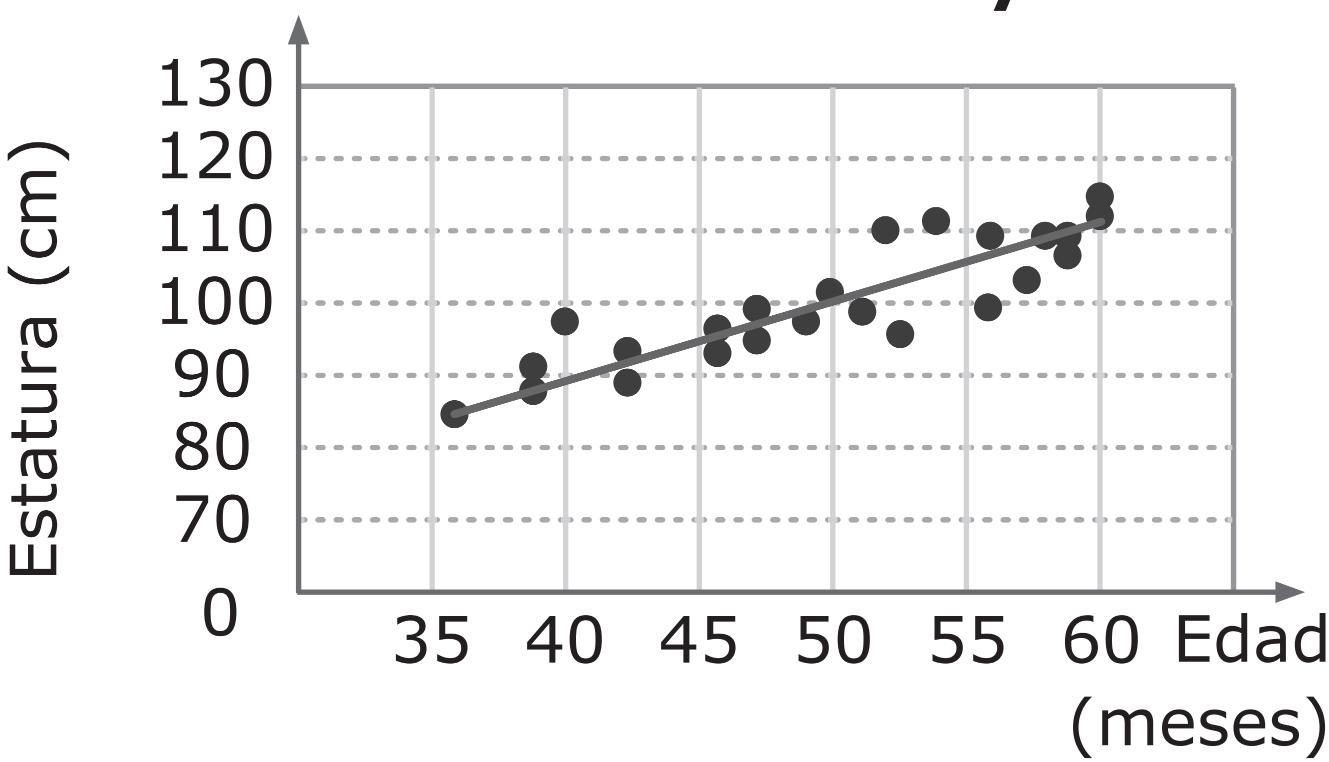
Ejemplo 5

Los siguientes gráficos presentan la relación entre la edad y la estatura de dos grupos de niños. Escribe algunas conclusiones a partir de los datos.

Estatura de niños entre 0 y 2 años



Estatura de niños entre 3 y 5 años



En ambos grupos se presenta una correlación positiva, ya que las dos rectas son crecientes. Además, en el caso de los niños entre 0 y 2 años, la estatura aumenta de manera más rápida.

Ejemplo 6

En la siguiente tabla se muestra la cantidad de personas inscritas en un concurso de baile regional.

Participante	Frecuencia
Hombre en zona rural	12
Hombre en zona urbana	54
Mujer en zona rural	16
Mujer en zona urbana	48

Representa la tabla de frecuencias en una tabla de doble entrada y determina conclusiones a partir de ella.

Para representar la tabla de frecuencias en una tabla de doble entrada puedes seguir estos pasos:

1º Identifica las características o variables que se deben relacionar. En este ejemplo, las características son el género y la zona donde se habita.

2º Construye la tabla con las variables y los datos correspondientes.

	Rural	**Urbana**
Hombre	12	54
Mujer	16	48

3º Escribe conclusiones a partir de la tabla.

En el estudio se consideró a 64 mujeres y 66 hombres. La cantidad de personas inscritas de la zona rural es 28, mientras que los participantes de la zona urbana es 102. Tanto en hombres como en mujeres hay más concentración de personas inscritas de la zona urbana.

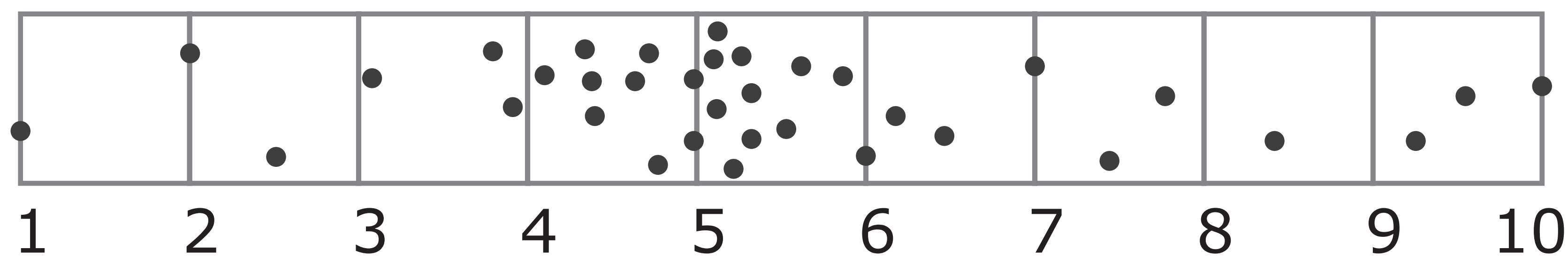
¿La información presente en una tabla de doble entrada se puede representar con una nube de puntos? Comenta con un compañero(a).

Una **tabla de doble entrada** o **tabla de contingencia** es aquella que sirve para contar la cantidad de individuos u objetos con dos tipos de características o variables cualitativas.

Una tabla de doble entrada está conformada por filas y columnas. Las filas están formadas por las categorías de una variable, y las columnas, por las de la otra variable. En cada una de las casillas formadas se ubica la cantidad de datos que tienen ambas características simultáneamente.

Actividades en tu cuaderno

1. Un grupo de 35 estudiantes marcan en la pizarra un punto de acuerdo con la cantidad de horas utilizadas para el estudio de una prueba de matemática. ¿Qué conclusiones podrías plantear? Justifica.



2. Representa los siguientes datos como nube de puntos.

a. {(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8), (9, 9), (12, 3), (1, 3)}

b. $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7)\}$

c. $\{(1, 0), (10, 3), (3, 10), (4, 4), (8, 7), (9, 1), (2, 10)\}$

d. $\{(0, 1), (2, 6), (3, 2), (5, 6), (2, 2), (3, 1), (6, 2)\}$

3. Observa la información de la tabla en la que se muestran las preferencias de dos deportes de 40 estudiantes de un colegio. Luego, establece dos conclusiones.

	Fútbol	**Balonmano**	**Básquetbol**
Natación	2	5	3
Tenis	6	7	8
Atletismo	1	2	6

4. Propón en un gráfico la relación entre los datos de las variables presentadas en los siguientes casos. Además, determina qué tipo de correlación tienen. Justifica tu respuesta.

a. Se realizó un estudio con 12 personas, a las cuales se les pidió saltar la cuerda durante un minuto con el propósito de contar el número de repeticiones de saltos en ese tiempo y la frecuencia cardíaca alcanzada por la persona.

Número de repeticiones: 63
Frecuencia cardíaca: 80

Número de repeticiones: 50
Frecuencia cardíaca: 75

Número de repeticiones: 53
Frecuencia cardíaca: 81

Número de repeticiones: 49
Frecuencia cardíaca: 74

Número de repeticiones: 55
Frecuencia cardíaca: 85

Número de repeticiones: 74
Frecuencia cardíaca: 89

Número de repeticiones: 52
Frecuencia cardíaca: 70

Número de repeticiones: 72
Frecuencia cardíaca: 103

Número de repeticiones: 40
Frecuencia cardíaca: 70

Número de repeticiones: 45
Frecuencia cardíaca: 80

Número de repeticiones: 76
Frecuencia cardíaca: 90

Número de repeticiones: 84
Frecuencia cardíaca: 110

b. En la siguiente tabla se relaciona el lugar de clasificación obtenido por los equipos de fútbol con los goles convertidos durante el campeonato.

Cantidad de goles: 34
Lugar obtenido: 1

Cantidad de goles: 36
Lugar obtenido: 2

Cantidad de goles: 31
Lugar obtenido: 3

Cantidad de goles: 30
Lugar obtenido: 4

Cantidad de goles: 32
Lugar obtenido: 5

Cantidad de goles: 28
Lugar obtenido: 6

Cantidad de goles: 28
Lugar obtenido: 7

Cantidad de goles: 25
Lugar obtenido: 8

Cantidad de goles: 23
Lugar obtenido: 9

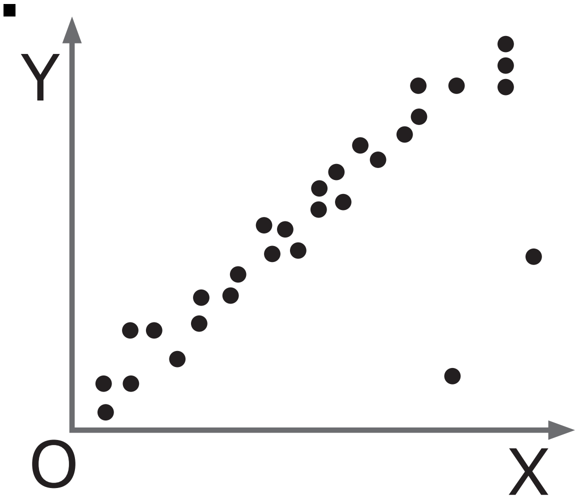
Cantidad de goles: 24
Lugar obtenido: 10

Cantidad de goles: 18
Lugar obtenido: 11

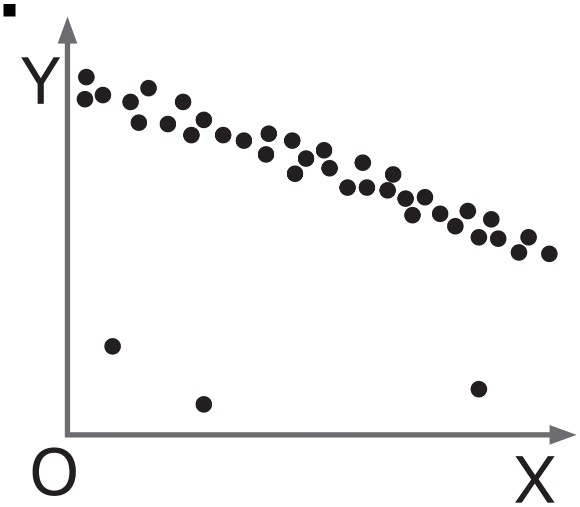
Cantidad de goles: 17
Lugar obtenido: 12

5. Analiza las siguientes nubes de puntos y decide si se puede establecer alguna relación entre las variables. En el caso de que tu respuesta sea afirmativa, determina si la relación es lineal y si existen puntos atípicos. Justifica tu respuesta.

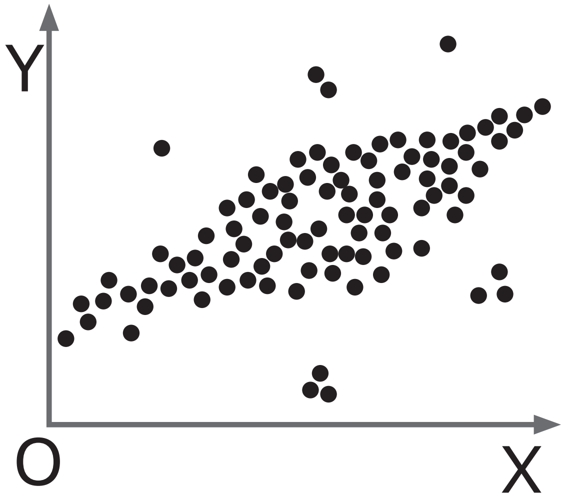
a.



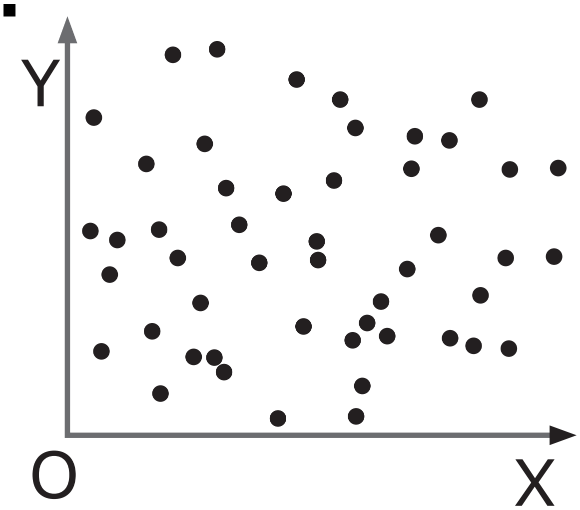
b.



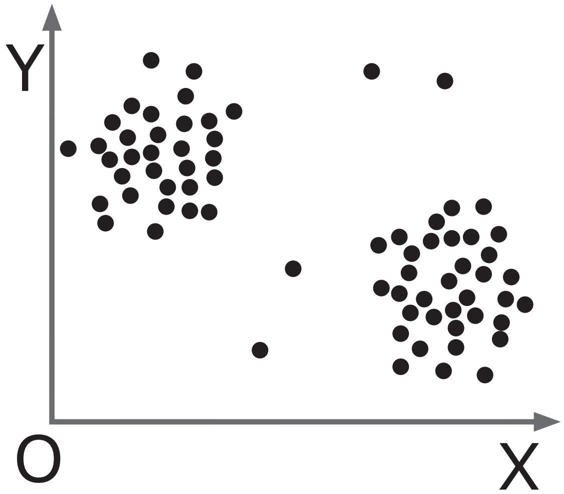
c.



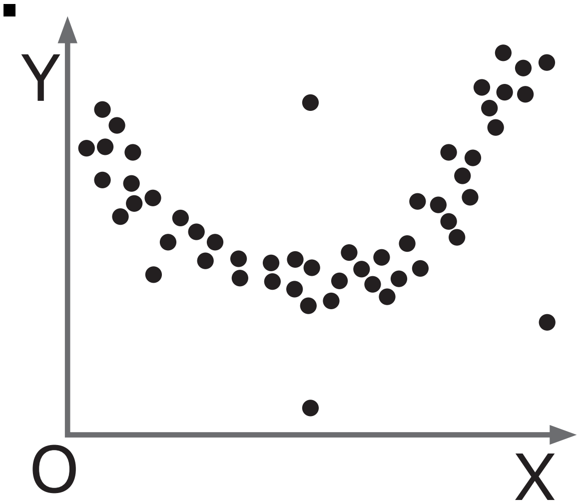
d.



e.



f.



Proyecto. ¿Cómo se relacionan las dos variables?

6. Realicen una investigación. Para ello, consideren los siguientes pasos:

a. Organicen el equipo de trabajo compuesto por cuatro estudiantes.

b. Propongan un estudio que les permita reconocer la relación entre dos variables que sean de su interés y que puedan ser representadas con una nube de puntos. Por ejemplo:

- Estatura de personas adultas - Edad de dichas personas.

- El rendimiento en una prueba - La cantidad de horas de preparación previa.

- Goles anotados por cada jugador - Cantidad de minutos jugados.

- Velocidad para correr 50 m - Masa corporal de los corredores.

c. Planteen una hipótesis en cuanto a los resultados que pudieran obtener, en la que pueden utilizar los conceptos de correlación fuerte, débil, positiva, negativa o nula.

d. A partir de encuestas, mediciones u otro mecanismo, recopilen los datos que les permitan relacionarlos en una nube de puntos.

e. Construyan la tabla y el gráfico de dispersión correspondiente.

Cuaderno de Actividades

Páginas 1611 a 1641

Cierre

- ¿Qué conceptos nuevos aprendiste al trabajar este tema?

- Cuando se realiza una investigación con una muestra, ¿crees que se pueden generalizar los resultados a toda la población?

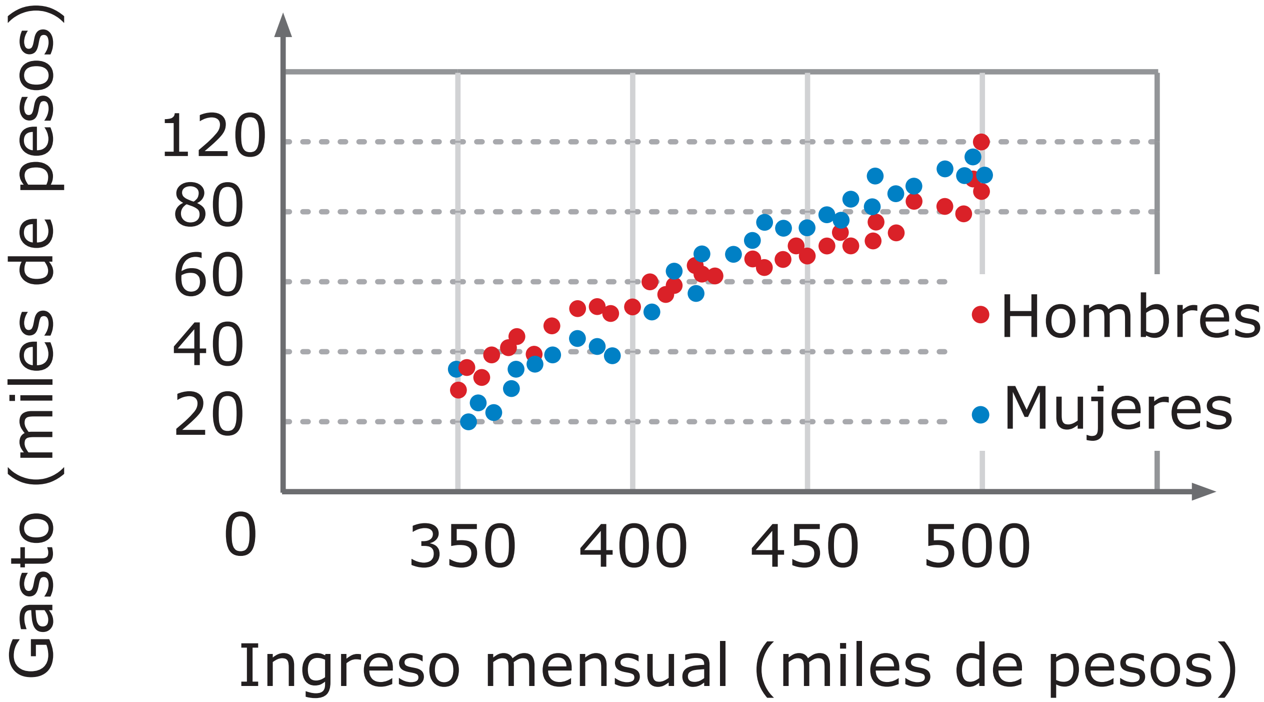
- Con respecto al trabajo en grupo, ¿qué recomendaciones puedes darles a tus compañeros para que tengan un mejor desempeño como equipo?

COMPARACIÓN DE DOS POBLACIONES

Una institución realizó un estudio para determinar el gasto por concepto de diversión de un grupo de hombres y mujeres que reciben un sueldo líquido de entre \$350.000 y \$500.000.

Los resultados obtenidos se presentan en el gráfico de la página a continuación.

Gasto en diversión según sueldo



- ¿Qué diferencias observas entre los gastos de los hombres y de las mujeres?

- ¿Quién gasta más dinero en el concepto diversión? ¿En qué tramos de sueldo ocurre esto?

- ¿Para qué tramos de sueldo se observa un gasto similar en diversión entre hombres y mujeres?

Ejemplo 1

De una población se extrae una muestra de 12 hombres y 12 mujeres, a los cuales se les preguntó su edad y se les midió el IMC (índice de masa corporal). Los datos se registraron en las siguientes tablas.

Mujeres.

Edad: 34
IMC: 29

Edad: 45
IMC: 31

Edad: 18
IMC: 27

Edad: 23
IMC: 28

Edad: 29
IMC: 30

Edad: 36
IMC: 29

Edad: 57
IMC: 34

Edad: 20
IMC: 30

Edad: 45
IMC: 27

Edad: 31
IMC: 29

Edad: 54
IMC: 31

Edad: 41
IMC: 25

Hombres.

Edad: 22
IMC: 19

Edad: 25
IMC: 22

Edad: 28
IMC: 20

Edad: 51
IMC: 24

Edad: 44
IMC: 21

Edad: 58
IMC: 26

Edad: 39
IMC: 25

Edad: 40
IMC: 21

Edad: 32
IMC: 31

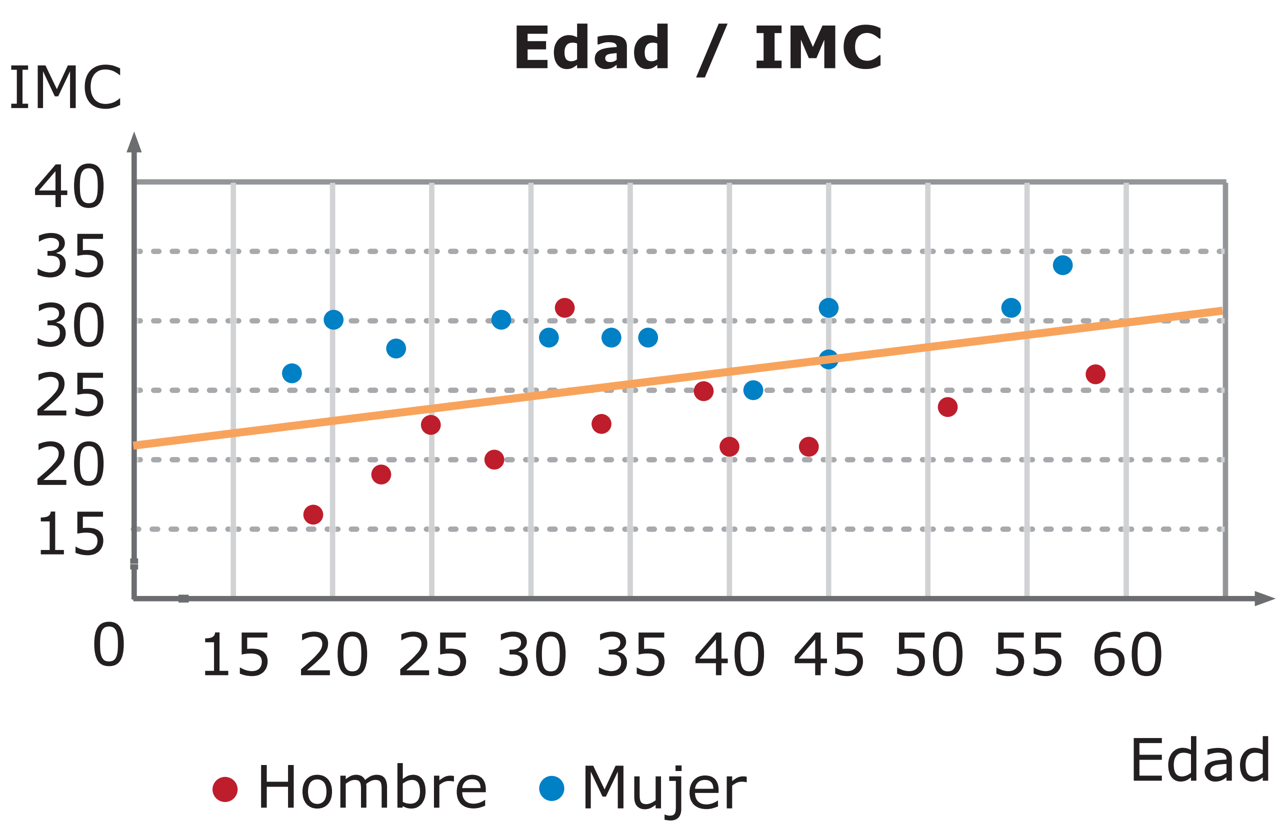
Edad: 33
IMC: 22

Edad: 19
IMC: 16

Edad: 51
IMC: 24

Construye la nube de puntos con los datos y luego determina si existe correlación.

La nube de puntos queda como se muestra a continuación. Puedes trazar una recta de forma intuitiva que separe ambas nubes de puntos para compararlas.



En este caso, se observa que el IMC de las mujeres de la muestra es, en general, mayor que el de los hombres para las mismas edades. Se concluye que existe correlación lineal.

Ejemplo 2

Una cadena de supermercados quiere conocer la conformidad de los clientes en relación con la cantidad de personas que están en la tienda al momento de su compra. Para ello, realiza un estudio en dos sucursales con las mismas características.

En ambas sucursales se eligen clientes al azar para pedirles que califiquen, entre 1 y 7, su conformidad con respecto a la atención recibida durante su compra.

Los resultados se registran en las siguientes tablas:

Personas en la tienda (Cantidad): Cantidad.
Calificación (Promedio): Promedio.

Sucursal 1

Cantidad: 75
Promedio: 7,0

Cantidad: 86
Promedio: 6,8

Cantidad: 120
Promedio: 6,5

Cantidad: 145
Promedio: 5,5

Cantidad: 138
Promedio: 5,7

Cantidad: 142
Promedio: 5,2

Cantidad: 185
Promedio: 4,6

Cantidad: 215
Promedio: 4,8

Cantidad: 230
Promedio: 5,0

Cantidad: 312
Promedio: 4,5

Cantidad: 315
Promedio: 4,4

Cantidad: 330
Promedio: 4,0

Sucursal 2.

Cantidad: 50
Promedio: 6,3

Cantidad: 60
Promedio: 6,5

Cantidad: 85
Promedio: 7,0

Cantidad: 75
Promedio: 5,9

Cantidad: 90
Promedio: 6,1

Cantidad: 125
Promedio: 5,9

Cantidad: 148
Promedio: 5,3

Cantidad: 175
Promedio: 4,6

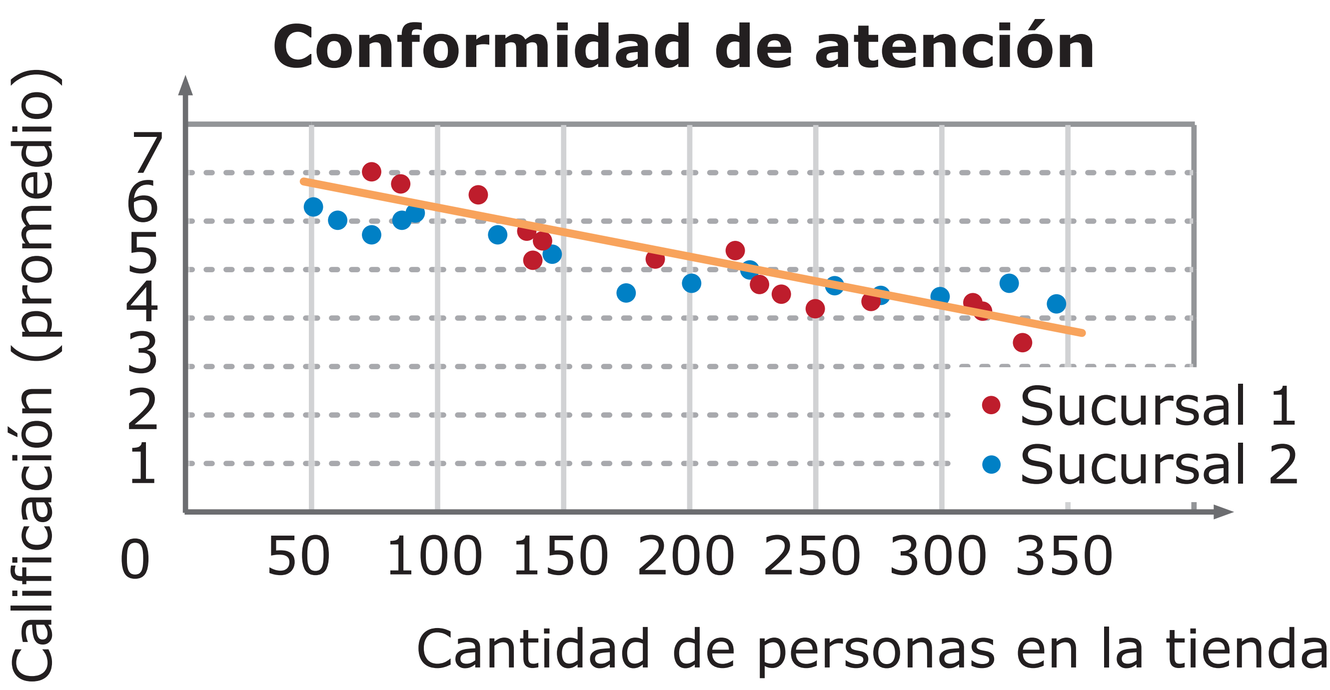
Cantidad: 210
Promedio: 4,7

Cantidad: 300
Promedio: 4,5

Cantidad: 321
Promedio: 4,7

Cantidad: 345
Promedio: 5,1

Construye un gráfico con los datos y determina algunas conclusiones.



Conclusiones:

- En ambos casos la correlación es negativa, pues en las dos sucursales disminuye la conformidad de sus clientes cuando aumenta la cantidad de personas en la tienda.

- Al incrementarse la cantidad de clientes, la sucursal 2 tiene un desempeño más estable en cuanto a la atención que la sucursal 1, ya que la inclinación de la línea es menor.

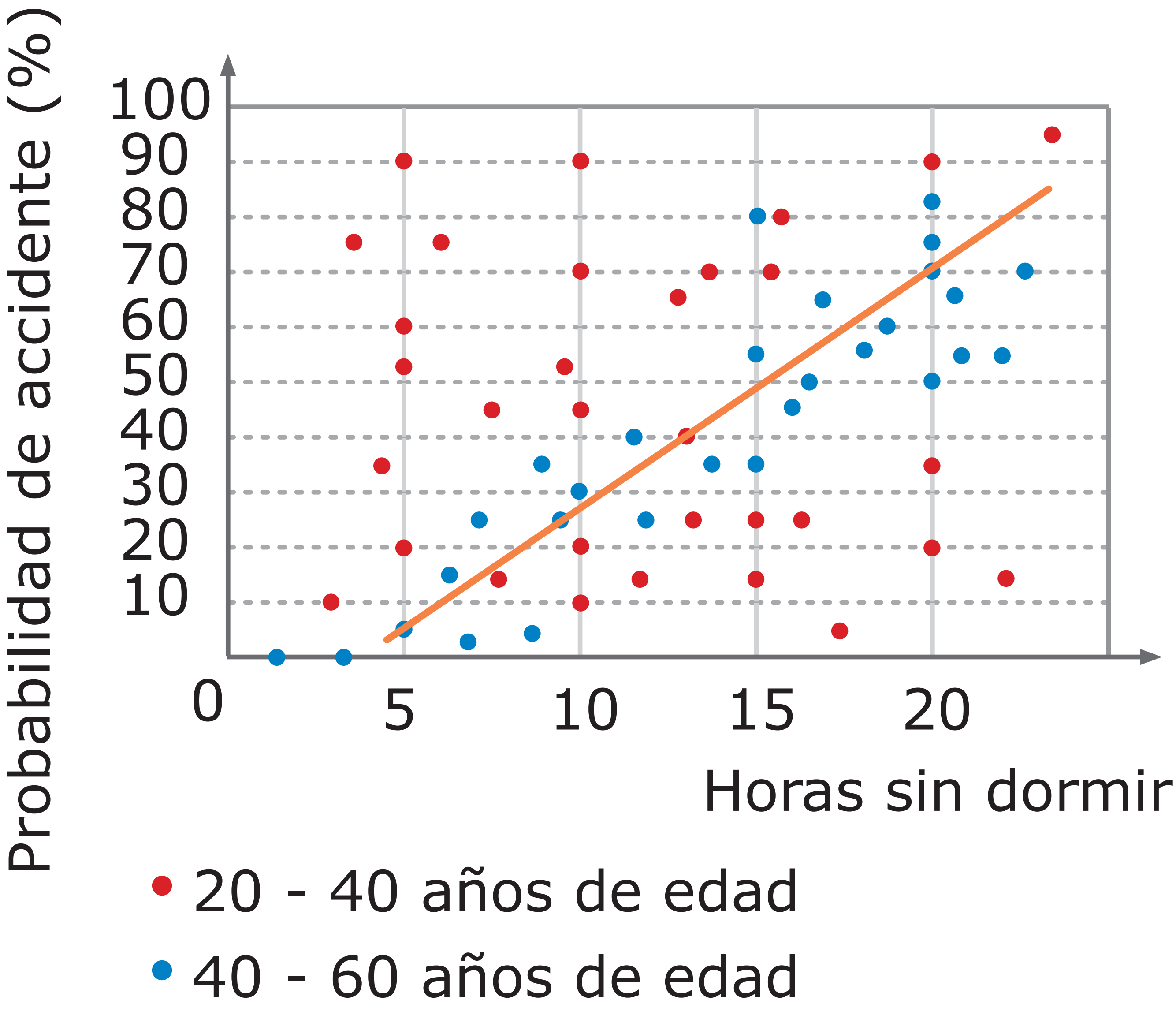
Una **nube de puntos** permite efectuar comparaciones entre dos poblaciones cuando se relacionan dos **variables cuantitativas**. Para esto, basta con representar los datos de ambas poblaciones en el mismo gráfico, con distintos colores para diferenciarlas, y con la misma escala.

Ejemplo 3

Una empresa que realiza diferentes estudios sobre seguridad vial pretende medir la capacidad de reacción de un grupo de conductores. Para ello, conforma dos grupos: uno de entre 20 y 40 años y el otro de entre 40 y 60 años. El experimento consiste en simular la conducción en una pantalla después que han pasado algunas horas sin dormir, y en cierto momento exponerlos a una situación límite de riesgo y analizar la reacción del conductor.

Analiza los resultados que se presentan en el gráfico y establece algunas conclusiones.

Probabilidad de accidente grave según horas sin dormir



Conclusiones:

- El grupo de entre 40 y 60 años revela un desempeño lineal, y la correspondencia entre las variables se correlaciona de forma positiva.

- En el grupo de entre 20 y 40 años no se observa una tendencia lineal, por lo cual la nube de puntos presenta una correlación nula.

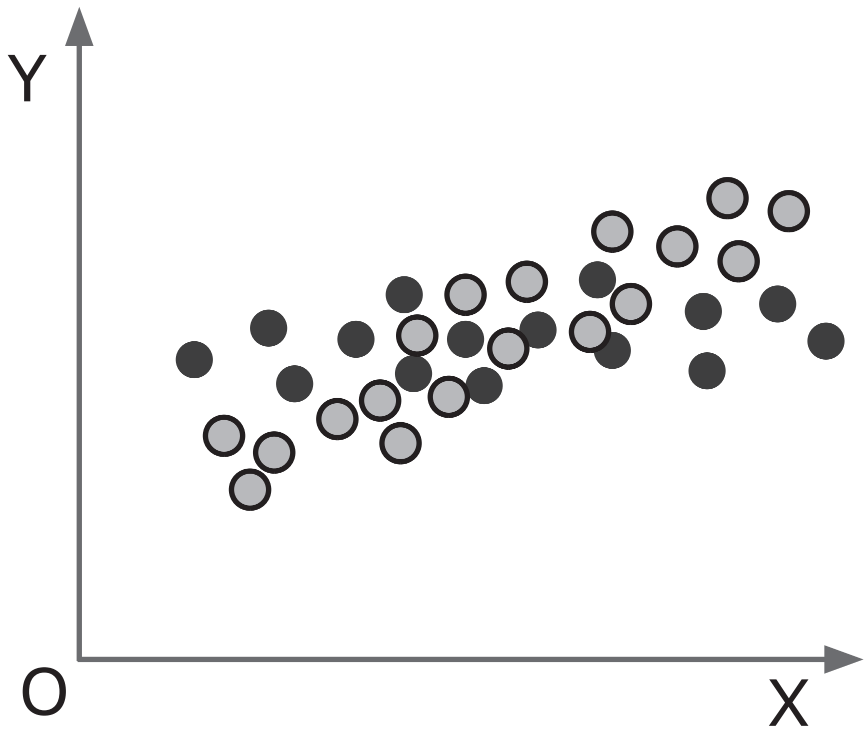
- Al grupo de entre 20 y 40 años le afectan más las horas sin dormir, por tanto, deben procurar conducir descansados. El buen desempeño de este grupo cuando están descansados se puede deber a la experiencia en la conducción y a la prudencia que suelen tener.

¿Compartes lo descrito en las conclusiones? ¿Qué otras conclusiones podrías establecer? Comenta con un compañero(a).

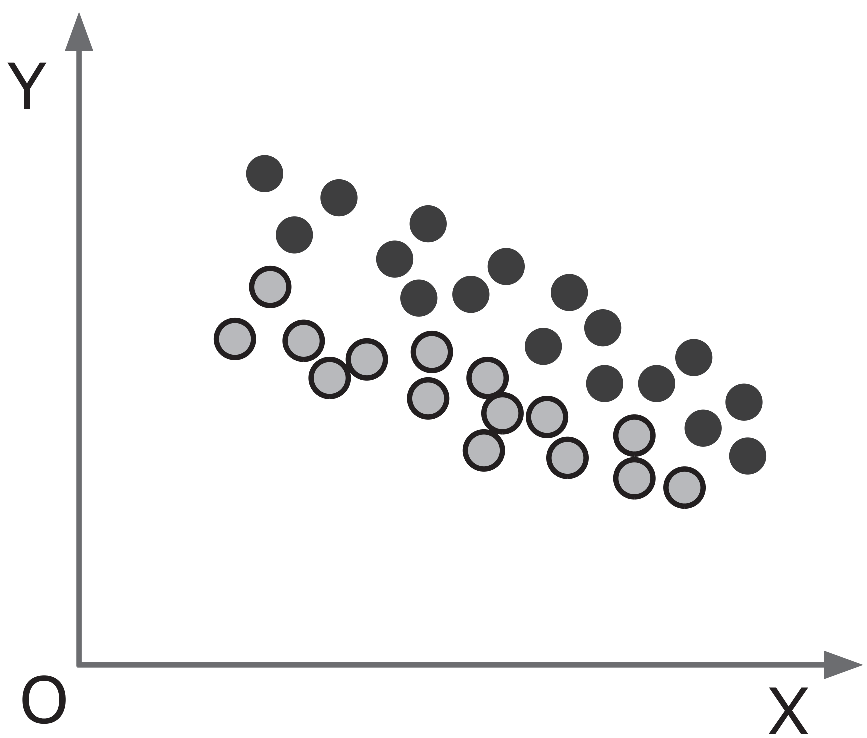
Actividades en tu cuaderno

1. Propón una situación que pueda representarse con cada uno de los siguientes gráficos.

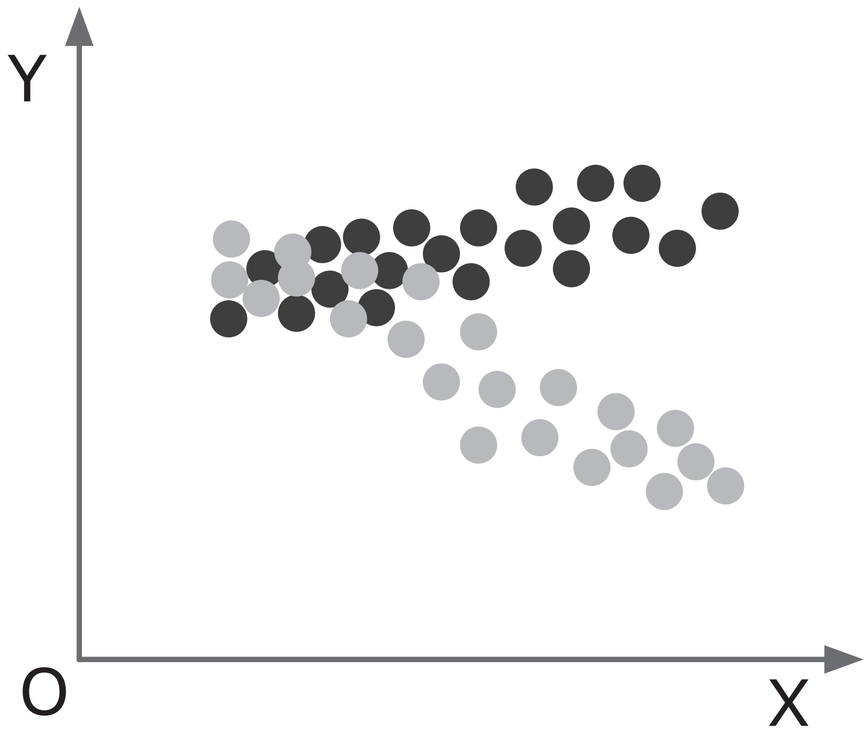
a.



b.



c.



2. Analiza la situación, y luego responde.

En la tabla se muestra el registro de la masa y porcentaje de grasa corporal de una muestra de 20 personas (10 hombres y 10 mujeres). Todas las mujeres tienen la misma talla, al igual que los hombres.

Mujeres	
Masa corporal (Kg)	**Porcentaje de grasa corporal**
54	20%
56	25%
60	30%
60	24%
57	27%
65	35%
55	21%
57	24%
56	23%
71	10%

Hombres	
Masa corporal (Kg)	**Porcentaje de grasa corporal**
70	17%
72	20%
70	12%
74	18%
74	22%
92	34%
117	4%
67	15%
72	22%
75	23%

a. Representa en una nube de puntos la relación entre la masa corporal y el porcentaje de grasa de las mujeres y de los hombres utilizando distintos colores.

b. La información mostrada, ¿se puede representar en una tabla de doble entrada? Explica tu respuesta.

c. ¿Qué puedes deducir a partir de lo que se observa en el gráfico en términos de correlación entre las variables? Explica tu respuesta.

d. Traza una línea (para cada uno de los grupos de puntos) que mejor represente la relación entre las variables masa corporal y porcentaje de grasa.

e. ¿Existen puntos aislados en los gráficos obtenidos? Márcalos y da una posible explicación sobre la presencia de ellos.

f. ¿Se puede trazar una línea que separa los dos grupos de puntos? En caso afirmativo, dibújala en el gráfico, de lo contrario explica por qué no es posible.

g. Establece dos conclusiones a partir de tus respuestas.

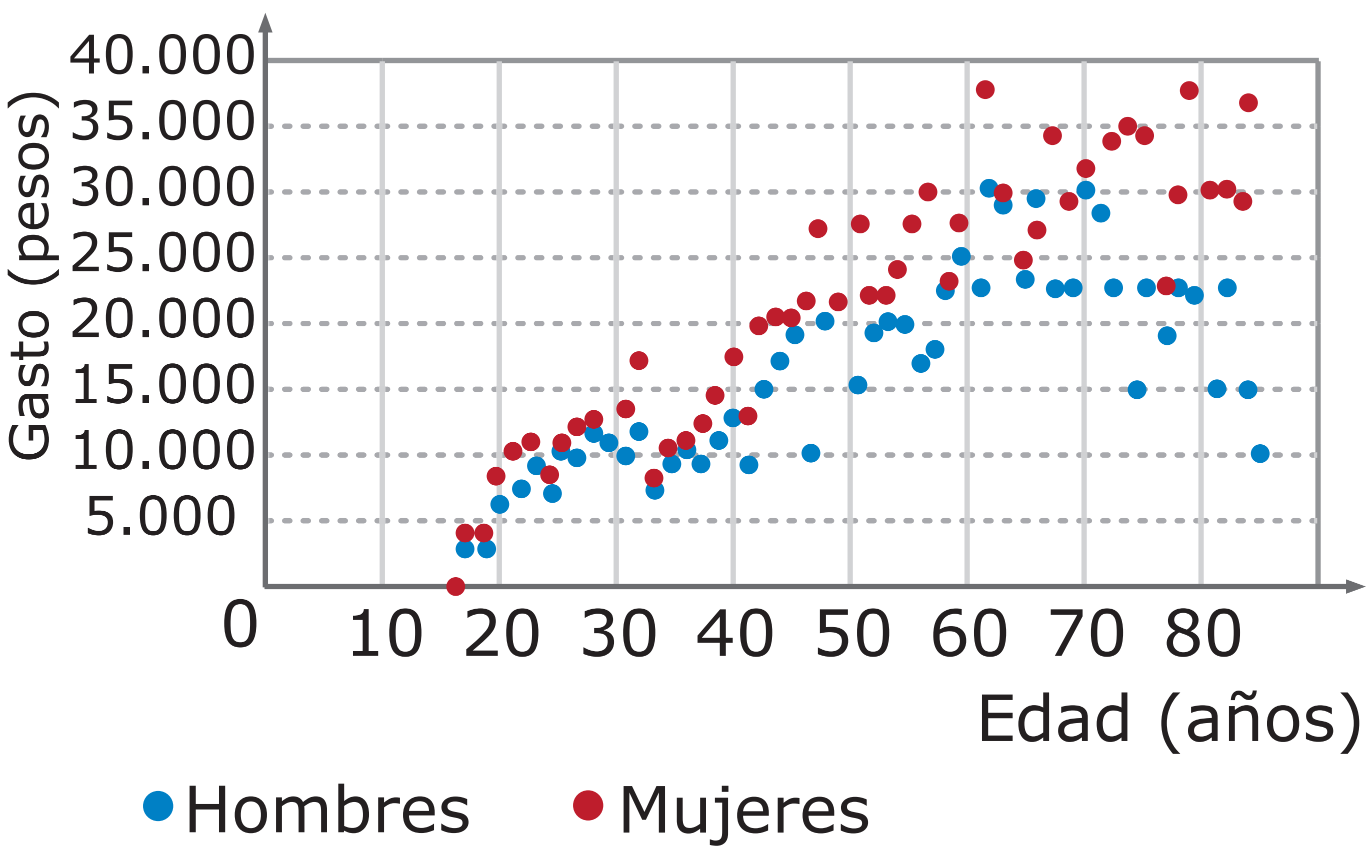
h. Averigua acerca de la relación entre el porcentaje de grasa corporal y la masa en hombres y en mujeres. Luego, comparte la información con tu curso y comenten acerca de la importancia de hacer deporte y tener una alimentación saludable.

Recurso Web

Para saber más acerca de cómo mantenerte saludable, puedes visitar el siguiente sitio: https://n9.cl/jfnu

3. Analicen la información presentada en el siguiente gráfico, el cual muestra el gasto mensual promedio de hombres y mujeres en artículos de perfumería según su edad.

Gasto mensual promedio en perfumería según edad



a. Elaboren una conclusión sobre la relación de las variables medidas en los hombres.

b. Elaboren una conclusión sobre la relación de las variables medidas en las mujeres.

c. Caractericen el comportamiento de los individuos en general.

d. ¿Existen puntos aislados? Establezcan una o más conclusiones que expliquen ese comportamiento.

4. Representa en un gráfico la relación entre las variables presentadas en la siguiente situación.

Al separar a un grupo de caballos entre hembras y machos y comparar el tiempo de reacción que tarda en hacer efecto un medicamento veterinario según su edad, se obtuvieron los siguientes resultados:

Hembras			
Edad (años)	Tiempo (Minutos)	Edad (años)	Tiempo (Minutos)
1	60	10	85
8	82	10	83
9	84	1	58
3	68	10	86
5	71	2	60
5	68	8	80
10	85	6	75
6	78	7	75
7	76	12	90
2	55	14	100
8	81	10	84

Machos			
Edad (años)	**Tiempo (Minutos)**	**Edad (años)**	**Tiempo (Minutos)**
1	82	11	110
9	102	12	108
7	93	5	79
4	75	9	99
4	77	7	93
6	100	8	97
9	106	5	92
8	99	9	96
3	68	12	118
4	74	14	124
8	104	9	103

5. Actividad de profundización. Analiza el gráfico que realizaste en la actividad 4, y responde:

a. Escribe una conclusión sobre la relación de las variables en las hembras.

b. Escribe una conclusión sobre la relación de las variables en los machos.

c. ¿Cuál de los dos grupos presenta una correlación lineal más débil? ¿Cómo lo sabes?

d. ¿Existen diferencias entre los resultados obtenidos para machos y hembras? ¿Cuáles?

e. ¿Qué correlación presentan los datos en general? Justifica tu respuesta.

f. ¿Existe algún punto aislado? ¿Cómo interpretas esta información?

Proyecto. ¿Quiénes llegan más temprano?

6. Organicen una investigación que les permita reconocer el comportamiento de los alumnos de diferentes cursos en cuanto a la relación que pudiera existir entre la distancia a la que viven y el tiempo que llegan, antes o después, de la hora de entrada a clases. Para ello, consideren los siguientes pasos:

a. Pónganse de acuerdo para repartirse entre los grupos los cursos del colegio.

b. Planteen una estrategia de recopilación de datos igual para todos los grupos.

c. Formulen una hipótesis que pudiera justificar el comportamiento de los datos.

d. Representen los datos a través de un gráfico y analicen los resultados obtenidos.

e. Presenten al curso sus conclusiones y planteen propuestas para evitar los atrasos.

Cuaderno de Actividades

Páginas 1642 a 1665

Cierre

- ¿Qué conceptos nuevos aprendiste en esta lección?

- ¿Tuviste alguna dificultad para comprender los conceptos trabajados?

- Con respecto al trabajo en grupo, ¿todos pudieron expresar sus ideas? ¿El trato entre ustedes fue respetuoso?

Síntesis

En las páginas tratadas anteriormente has estudiado:

► **Análisis de poblaciones**

- Si los valores de una variable aumentan y los de la otra disminuyen, la **correlación** es **negativa**.

- Si los valores de ambas variables aumentan o disminuyen simultáneamente, la **correlación** es **positiva**.

- Si no es clara la relación entre las variables, la **correlación** es **nula**.

► **Comparación de dos poblaciones**

- La **nube de puntos** permite comparar **dos poblaciones** cuando se relacionan dos variables cuantitativas.

Responde:

¿Cuáles situaciones pudiste expresar con gráficos de nubes de puntos? ¿En qué otras situaciones crees que puedes usar las nubes de puntos para relacionar sus variables?

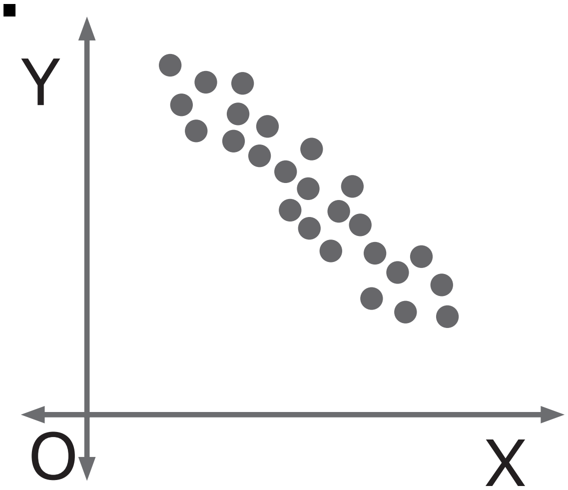
¿Cómo vas?

Evaluación Lección 10

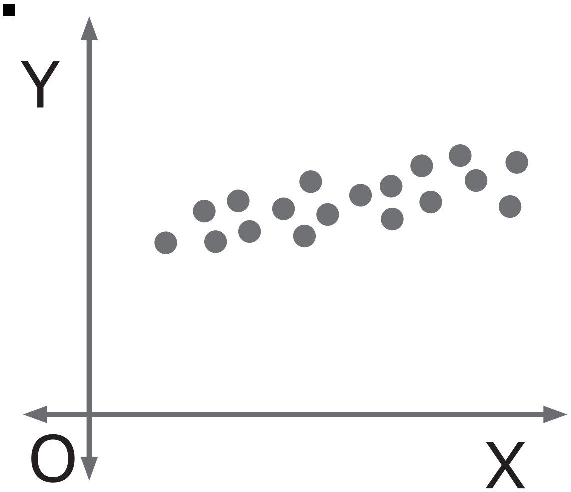
Desarrolla las siguientes actividades en tu cuaderno.

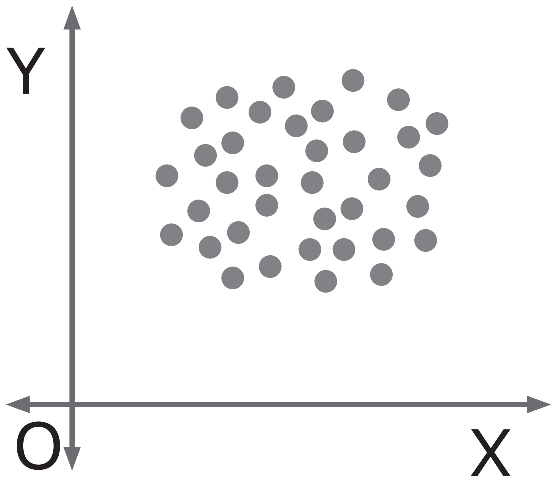
1. Clasifica el comportamiento de cada gráfico en cuanto a si la correlación es positiva, negativa o nula.

a.



b.



c. 

2. Compara las nubes de puntos de dos poblaciones y haz lo siguiente:

Gráfico 1

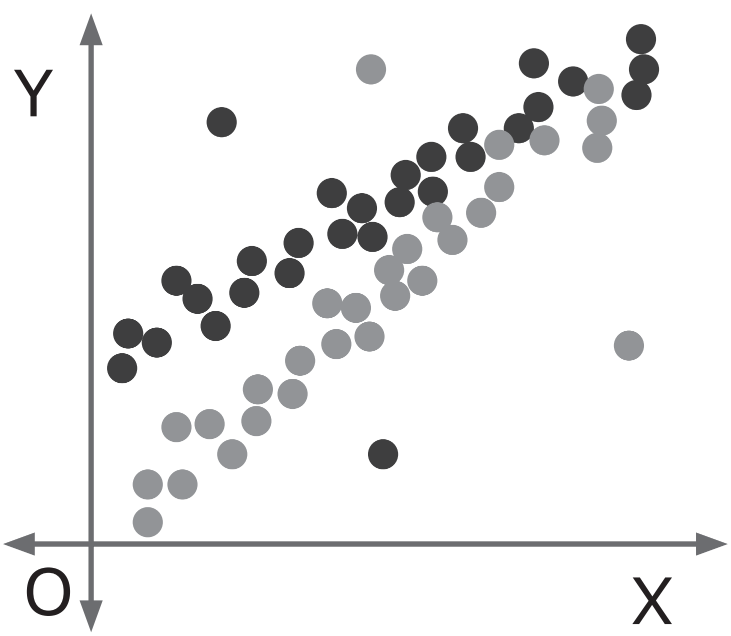


Gráfico 2

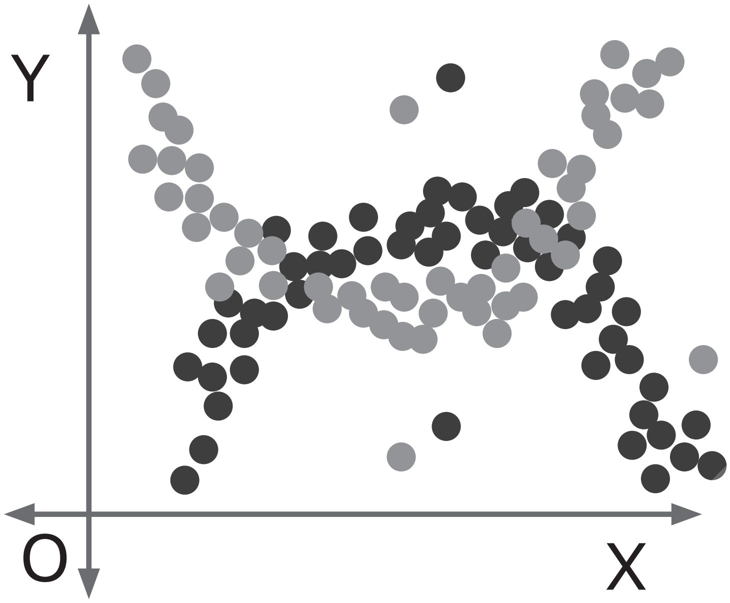
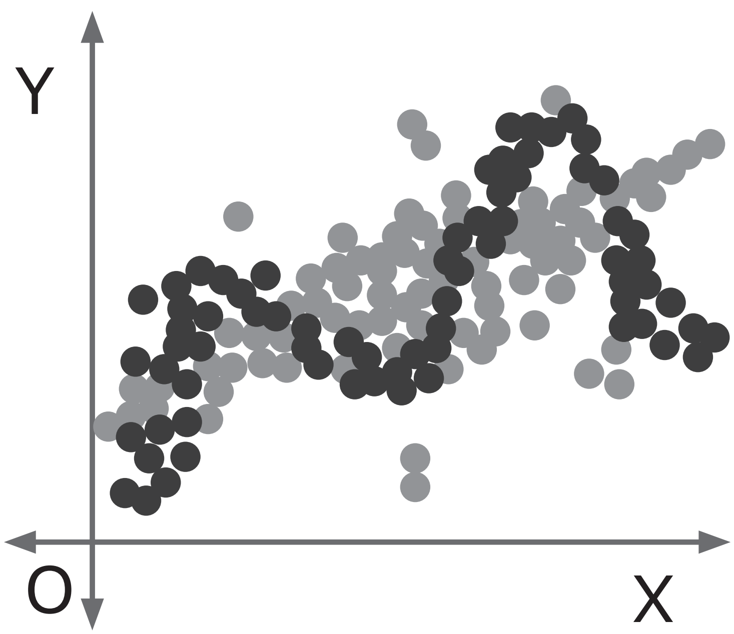


Gráfico 3



a. Identifica una línea que, de forma intuitiva, creas que separa de mejor manera los puntos negros de los puntos grises.

b. Determina si existe o no correlación para los puntos negros y grises. Justifica tu respuesta en cada caso.

c. Marca en cada gráfico aquellos puntos que consideres aislados. ¿Existe alguna relación entre los puntos aislados negros y los grises? Explica.

3. Actividad de profundización. Investiguen si existe alguna relación entre el pulso y la estatura de las personas.

a. Elaboren una tabla como la siguiente para registrar los datos de 10 voluntarios:

Estatura (cm)	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**
Pulso (ipm o lpm)	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**

b. Con los datos registrados, construyan un gráfico de nube de puntos.

c. ¿Observan puntos aislados? ¿Qué pueden concluir con esto?

d. Planteen sus conclusiones con relación a los resultados obtenidos y expónganlas al curso.

4. Salud. Analiza la siguiente situación, y luego realiza lo solicitado.

El protocolo de una urgencia médica considera anotar la edad y tomar el pulso a todos los pacientes que ingresan. Los datos obtenidos en un turno de trabajo fueron los siguientes.

Hombres			
Edad (años)	Pulso	Edad (años)	Pulso (lpm)
19	64	47	60
34	56	49	64
55	68	31	58
42	62	34	52
23	56	19	57
52	69	26	63
21	53	73	65
50	58	62	65
40	61	35	53
26	55	50	58

Mujeres			
Edad (años)	Pulso	Edad (años)	Pulso (lpm)
37	69	40	72
32	76	25	67
25	74	45	80
39	72	57	75
45	70	52	67
28	75	47	80
19	70	78	77
30	75	82	85
52	77	61	72
20	68	62	75

a. Construye un gráfico de nube de puntos para ambos casos y utiliza dos colores para diferenciar a hombres y mujeres.

b. Traza tres líneas rectas, una para cada nube de puntos correspondiente a los hombres y mujeres, y otra para ambos grupos en conjunto.

c. Describe las nubes de puntos.

Cuaderno de Actividades

Páginas 1666 a 1675

Lección 11

Reglas de la probabilidad

Hinchas celebrando en la Copa Mundial 2014. Estadio Maracaná.

¿Se puede calcular la probabilidad de clasificar al mundial de fútbol?

Analiza la siguiente información, y luego responde.

Supón que tu equipo favorito debe jugar cuatro partidos para clasificar al mundial de fútbol y no existe la posibilidad de empatar ninguno.

1. ¿Cuáles son los resultados posibles de cada juego?

2. ¿Importa el orden en los eventos? ¿Existen repeticiones en los resultados?

Reflexiona

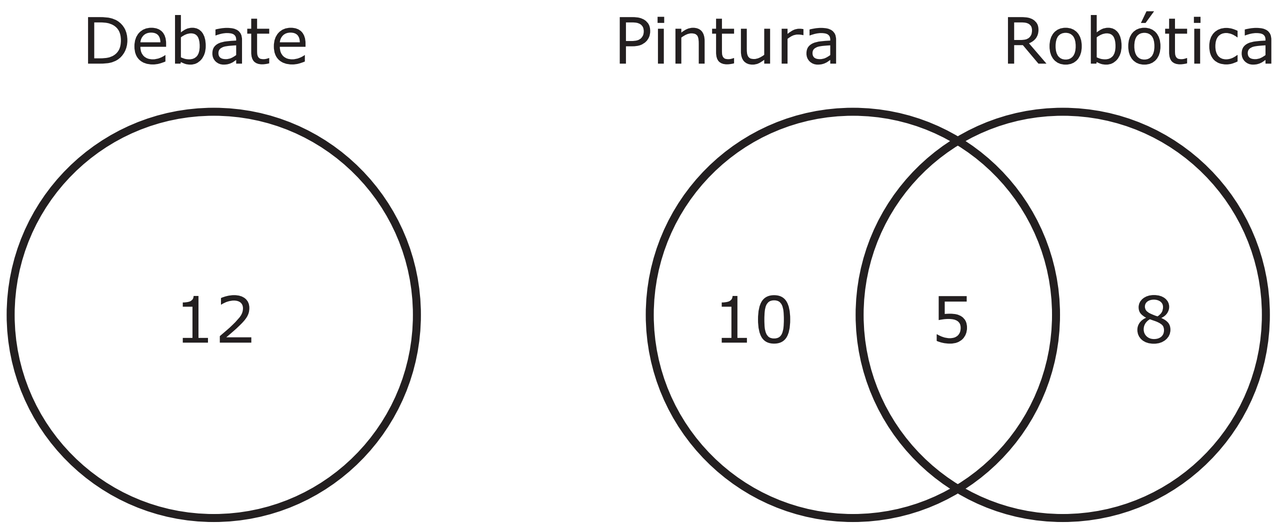
- ¿Por qué hay equipos que tienen mayor probabilidad que otros de clasificar?

- ¿Cómo podrías calcular las probabilidades de este tipo de eventos?

- ¿Si se incrementa el número de juegos, aumentaría la probabilidad de clasificar?

UNIÓN E INTERSECCIÓN DE EVENTOS

En un colegio, 35 estudiantes participan en diferentes talleres: 12 están en debate, 15 en pintura y 13 en robótica. Como los talleres de pintura y debate tienen el mismo horario, ningún estudiante puede participar en ambos. Los talleres de pintura y robótica se dan en diferentes horarios, por lo que 5 estudiantes del taller de robótica están en el de pintura. Ninguno de los estudiantes de debate participa en el taller de robótica. Esta información se puede organizar y representar en el siguiente diagrama:



- El diagrama usado para representar el espacio muestral y los eventos se llama **diagrama de Venn.**

- Un **conjunto** es una colección de elementos que tienen propiedades en común. Un conjunto está definido por **extensión** cuando se enumeran sus elementos y por

comprensión si se describen características comunes a todos los elementos.

- ¿Cuántos de ellos van al taller de pintura o al de debate?
- ¿Cuántos de ellos van al taller de pintura o al de robótica?
- ¿Cuántos de ellos van al taller de pintura y al de robótica?
- ¿Cuántos de ellos van al taller de pintura y también al de debate?

Ejemplo 1

Del experimento que consiste en lanzar un dado se definen los siguientes eventos:

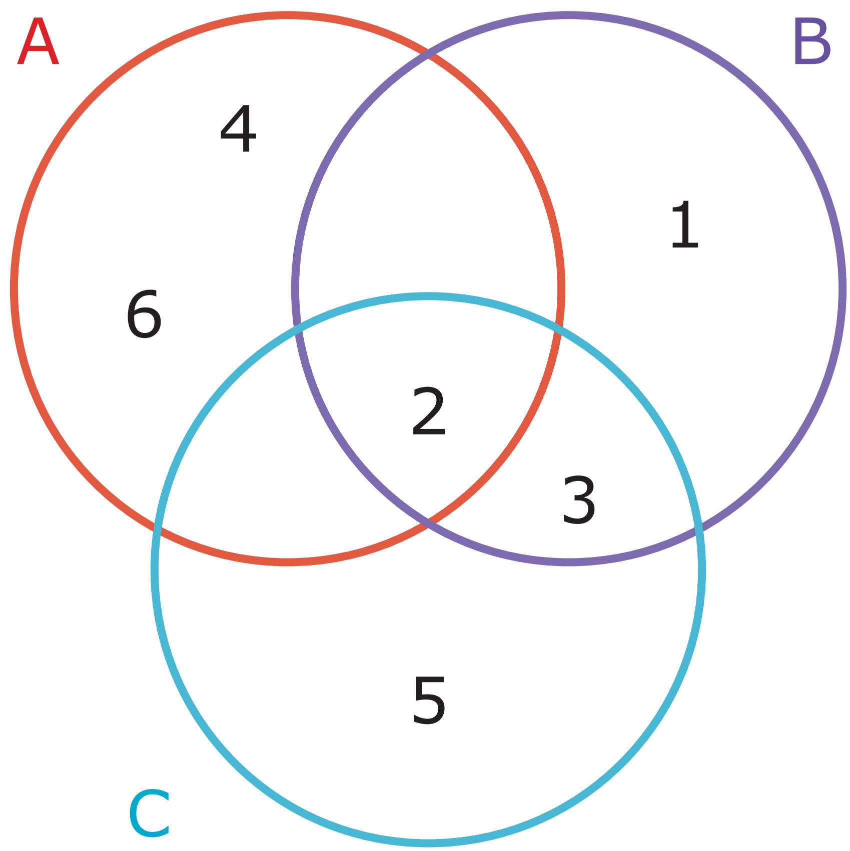
- Obtener un número par: conjunto A = {2, 4, 6}

- Obtener un número menor que 4: conjunto B = {1, 2, 3}

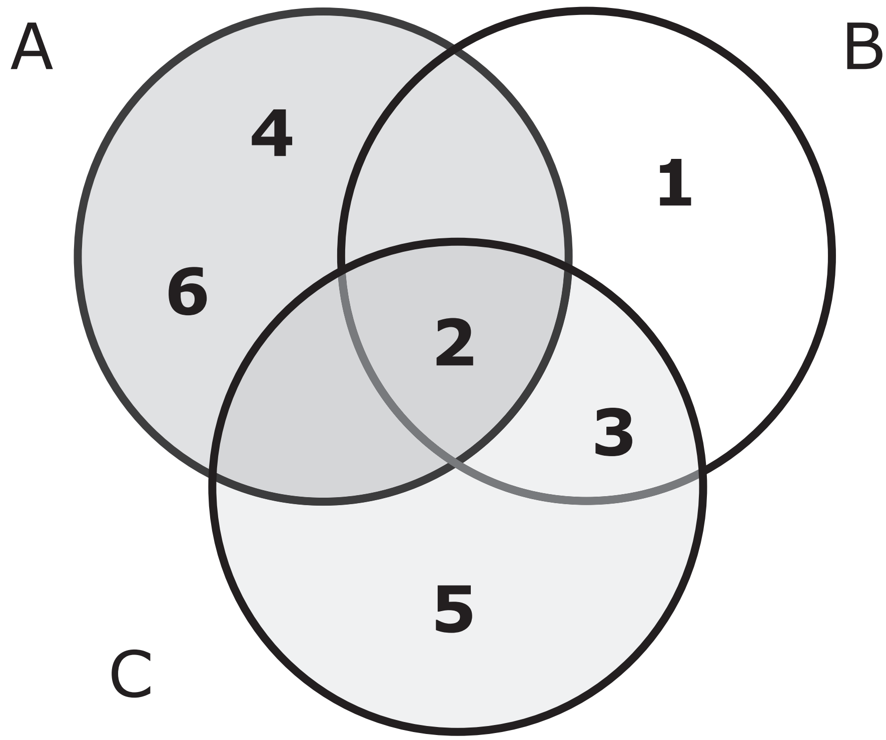
- Obtener un número primo: conjunto C = {2, 3, 5}

El diagrama de Venn muestra cómo se grafican dichos eventos.

A continuación, se presenta el cálculo de las probabilidades de los eventos **1** y **2** considerando que los resultados posibles son 1, 2, 3, 4, 5 y 6.



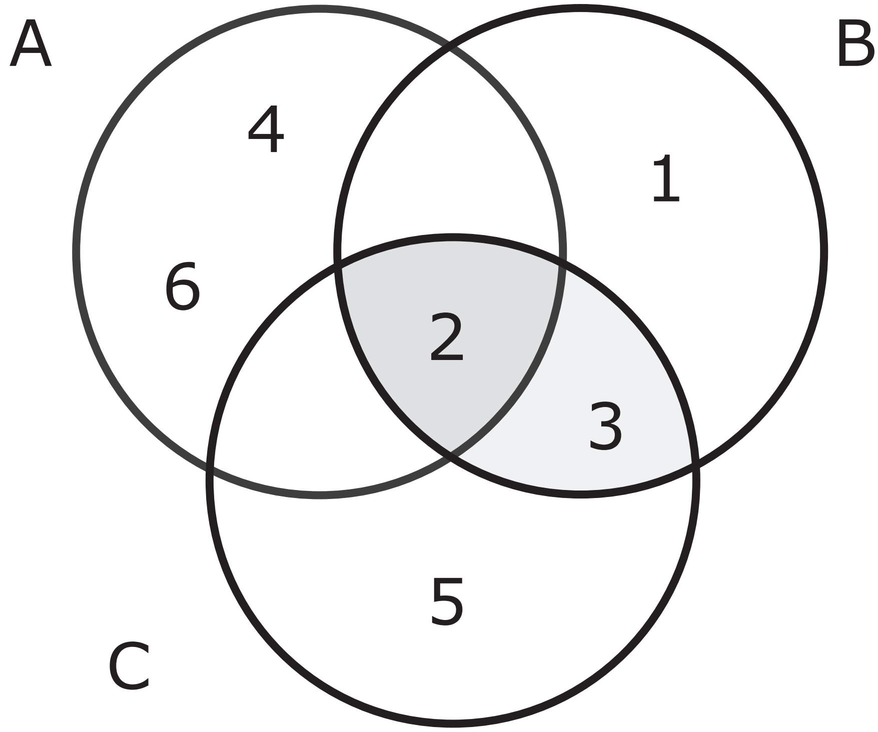
1- Que resulte un número par o un número primo. Es la unión de los elementos de los conjuntos A y C. Su probabilidad es:



$$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}} = \frac{5}{6}$$

2- Que se obtenga un número primo menor que 4. Es la intersección de los elementos de los conjuntos B y C.

Su probabilidad es:



$$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

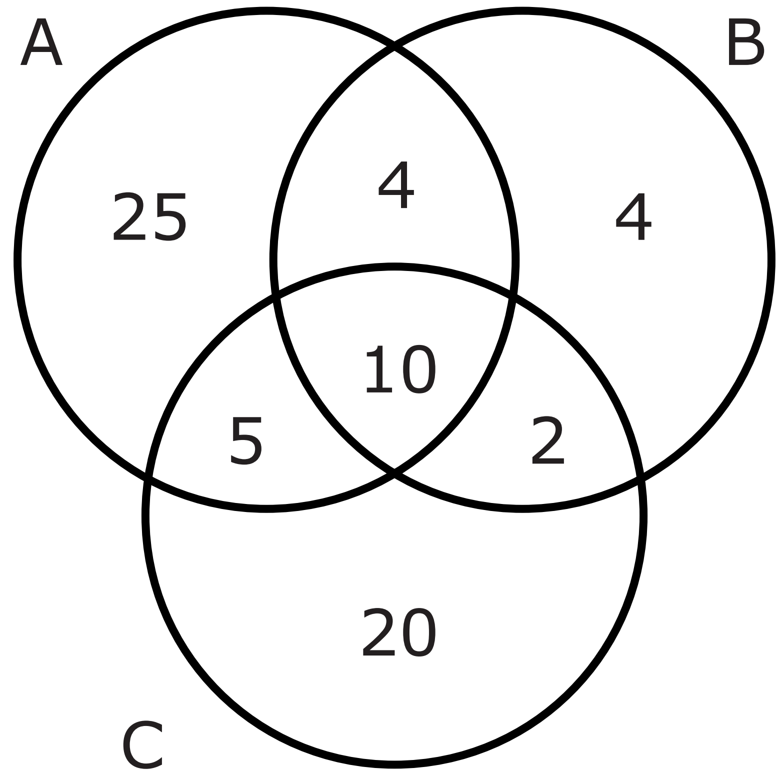
Recurso Web

Para saber más acerca de los conjuntos, puedes visitar el siguiente sitio: https://n9.cl/0p0h

Ejemplo 2

Se realizó una encuesta a 70 estudiantes acerca de sus gustos musicales. Los resultados fueron los siguientes: 15 escuchan reggaetón y trap, 12 trap y pop, 14 pop y reggaetón, 25 solo reggaetón, 4 solo pop y 10 escuchan los tres estilos de música.

Con la información entregada se completa el diagrama de Venn en el que se incluyen los valores que representan la cantidad de elementos que le corresponden al conjunto **A** (reggaetón), al **B** (pop) y al **C** (trap).



Si se elige un estudiante al azar:

- ¿Cuál es la probabilidad de que le guste el reggaetón o el pop?

$$P(A \cup B) = \frac{25 + 4 + 10 + 5 + 2 + 4}{70} =$$

$$\frac{50}{70} = \frac{5}{7}$$

Entonces, la probabilidad de elegir al azar un estudiante de entre los participantes de la encuesta que le guste el reggaetón o el pop es $\frac{5}{7}$.

La regla de Laplace permite calcular la probabilidad de un evento cuando los resultados del experimento son equiprobables y el espacio muestral es finito. La probabilidad de un evento A se calcula por:

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables de A}}{\text{Casos totales}}$$

El **espacio muestral** (Ω) es el conjunto de los resultados posibles de un experimento aleatorio. Por ejemplo, al lanzar una moneda, sus resultados posibles son cara o sello.

Dados dos eventos A y B, se define el **evento unión** de A y B como aquel en el que cada elemento pertenece a A o pertenece a B, es decir, a uno de los dos eventos o a ambos

Simbólicamente se denota por

$A \cup B$.

- ¿Cuál es la probabilidad de que le gusten el reggaetón y el pop?

$$P(A \cap B) = \frac{4 + 10}{70} = \frac{14}{70} = \frac{1}{5}$$

Entonces, la probabilidad de elegir al azar un estudiante entre los participantes de la encuesta, que le gusten el reggaetón y el pop es $\frac{1}{5}$.

Dados dos eventos A y B, se define el **evento intersección** de A y B como aquel en que cada uno de sus elementos pertenece a A y pertenece a B, es decir, todos los elementos comunes de A y B.

Simbólicamente se denota por
$A \cap B$.

¿Qué condición crees que se debe cumplir para que la unión y la intersección de dos conjuntos den el mismo resultado?

- El **conjunto universo** es aquel que contiene a todos los elementos y se representa con la letra ∪.

- El **conjunto vacío** no contiene elementos y se representa por el símbolo ∅.

Ejemplo 3

En la siguiente tabla se muestra el total de candidatos a un puesto de trabajo según género y años de experiencia:

Género			
Experiencia (años)	**Femenino**	**Masculino**	**Total**
De 0 a 5 años	6	10	16
Más de 5 años	14	12	26
Total	20	22	42

Al elegir un candidato al azar, calcula:

- La probabilidad de que sea mujer o que tenga de 0 a 5 años de experiencia.

- La probabilidad de que sea hombre y que tenga más de 5 años de experiencia.

1º Para determinar la probabilidad pedida, se calcula el cociente entre la cantidad de casos favorables y el número de casos totales.

	Género		
Experiencia (años)	**Femenino**	**Masculino**	**Total**
De 0 a 5 años	6	10	16
Más de 5 años	14	12	26
Total	20	22	42

Casos favorables: $6 + 14 + 10 = 30$

Casos totales: 42

Entonces, la probabilidad de que el postulante sea mujer o que tenga de 0 a 5 años de experiencia es $\frac{30}{42} = \frac{5}{7}$.

2 º Luego, la probabilidad de que el candidato sea hombre y que tenga más de 5 años de experiencia está dada por:

Experiencia (años)	Género: Femenino	Masculino	Total
De 0 a 5 años	6	10	16
Más de 5 años	14	12	26
Total	20	22	42

Casos favorables: 14, 10, 12

Casos totales: 42

Entonces la probabilidad de que el postulante tenga ambas características es $\dfrac{12}{42} = \dfrac{2}{7}$.

Al interpretar problemas, puedes considerar que la unión de eventos está asociada a la disyunción **o** y la intersección de eventos se asocia con la conjunción **y**.

Actividades en tu cuaderno

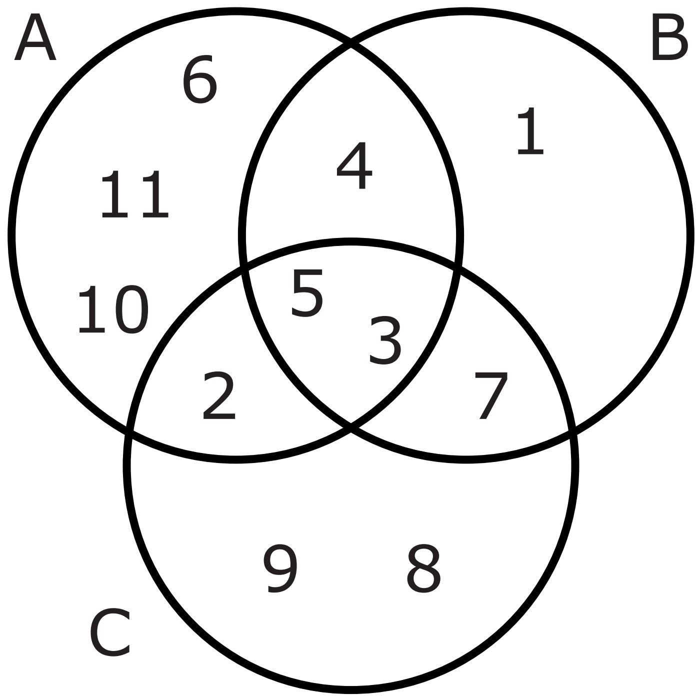
1. Representa en un diagrama de Venn los siguientes conjuntos.

a. A = {4, 5, 6, 7, 8, 9} y B = {1, 2, 5, 9, 10, 11}.

b. A = {3, 5, 7, 9, 11}, B = {1, 5, 6, 8, 9, 11} y C = {2, 4, 6, 8, 10, 12}

c. A = {3, 5, 7, 9, 11}, B = {1, 10, 20, 30} y C = {0, 2, 4, 6, 8, 12,14}

2. Analiza el diagrama de Venn y escribe los elementos de los conjuntos solicitados.



a. El conjunto A.

b. El conjunto C.

c. El conjunto $(A \cap B)$.

d. El conjunto $(A \cup B)$.

e. El conjunto $(B \cap C)$.

3. Considera el siguiente experimento aleatorio:

Se lanza una moneda. Si sale sello se lanza un dado y termina el experimento. Si sale cara, se lanza nuevamente la moneda y se analiza el resultado. Esto se repite a lo más 4 veces si sale cara consecutivamente. Construye un diagrama de árbol para representar el experimento aleatorio y calcula las siguientes probabilidades usando la regla de Laplace.

a. Obtener un puntaje mayor que 4.

b. Obtener un puntaje igual a 1.

c. Obtener un 4 o un sello.

d. Si en el primer lanzamiento de moneda salió una cara, la probabilidad de obtener un número menor que 3.

e. Si en el primer y segundo lanzamiento se obtuvo una cara, la probabilidad de obtener un número impar.

4. Representa en un diagrama de Venn la información que se describe en cada caso y responde.

a. En la elaboración de un producto se efectúan dos procesos, A y B. De los 10 trabajadores que lo fabrican, 3 de ellos solo manejan el proceso A, mientras que 5 dominan ambos procesos. ¿Cuántos saben elaborar el proceso B?

b. En una universidad de idiomas se reúne un grupo de estudiantes, de los cuales 25 hablan español, 30 alemán, 45 inglés, 10 inglés y alemán, 8 español y alemán, 5 español e inglés, y 4 los tres idiomas.

¿Cuántos estudiantes están reunidos en ese momento?

5. Representa en una tabla la información que se presenta a continuación. Luego, responde.

A una fiesta de 1° medio asisten 25 estudiantes del curso A y 40 del B. Del curso A son 12 mujeres y en total hay 37 hombres. Si se elige a un estudiante al azar:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre del 1°A?

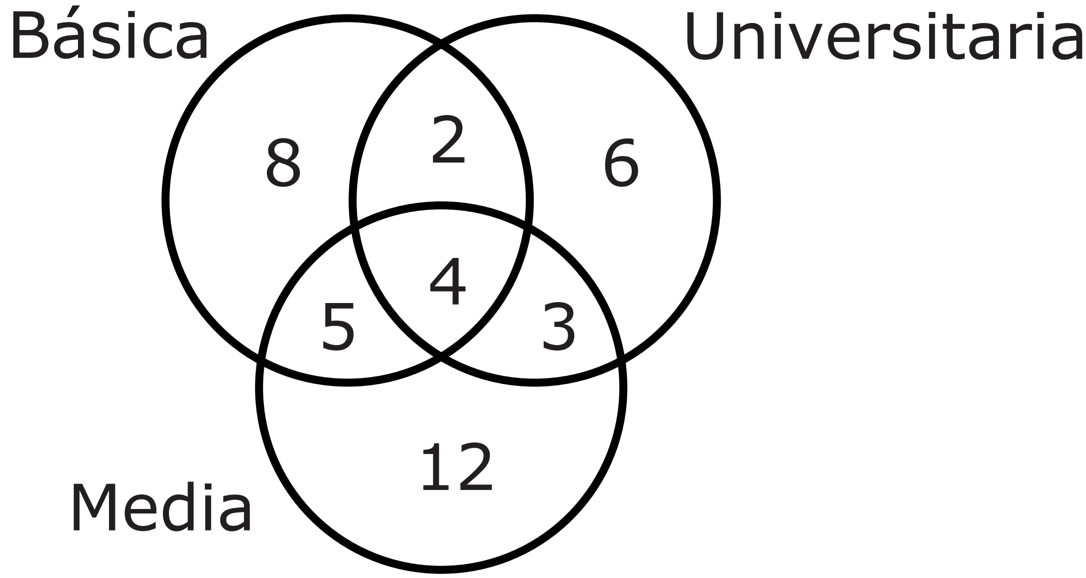
c. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer del 1°B?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre o del 1°B?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer o del 1°A?

6. Analiza, y luego responde.

El siguiente diagrama representa el nivel educacional que están cursando los hijos de los trabajadores de una empresa:



Si se elige un trabajador al azar, cuál es la probabilidad de que:

a. Todos sus hijos estudien en enseñanza básica.

b. Tenga hijos estudiando en la enseñanza media o en la enseñanza básica.

c. Tenga hijos estudiando en la enseñanza media y en la enseñanza básica.

d. Tenga hijos en la universidad y en la enseñanza básica.

e. No tenga hijos en la enseñanza media.

f. No tenga hijos en la enseñanza universitaria.

Proyecto. ¿Cómo interpretamos los datos obtenidos de una encuesta?

7. Organicen un equipo de trabajo compuesto por cuatro estudiantes.

a. Acuerden un tema de investigación que pueda representarse en un diagrama de Venn o en una tabla de doble entrada. Entre otros, algunos temas interesantes pueden ser:

- Hábitos alimentarios de los estudiantes.

- Núcleo familiar con el que comparten o viven los compañeros de clase.

- Asignaturas favoritas de un grupo de estudiantes.

b. Propongan las preguntas y confeccionen la encuesta. Luego, aplíquenla a sus compañeros de curso.

c. Construyan el diagrama de Venn o la tabla de doble entrada que resuma la información obtenida.

d. Establezcan algunas conclusiones a partir del análisis de los datos. Utilicen los conceptos de unión e intersección de conjuntos para realizar el análisis.

e. Expongan los resultados y conclusiones a sus compañeros.

Cuaderno de Actividades

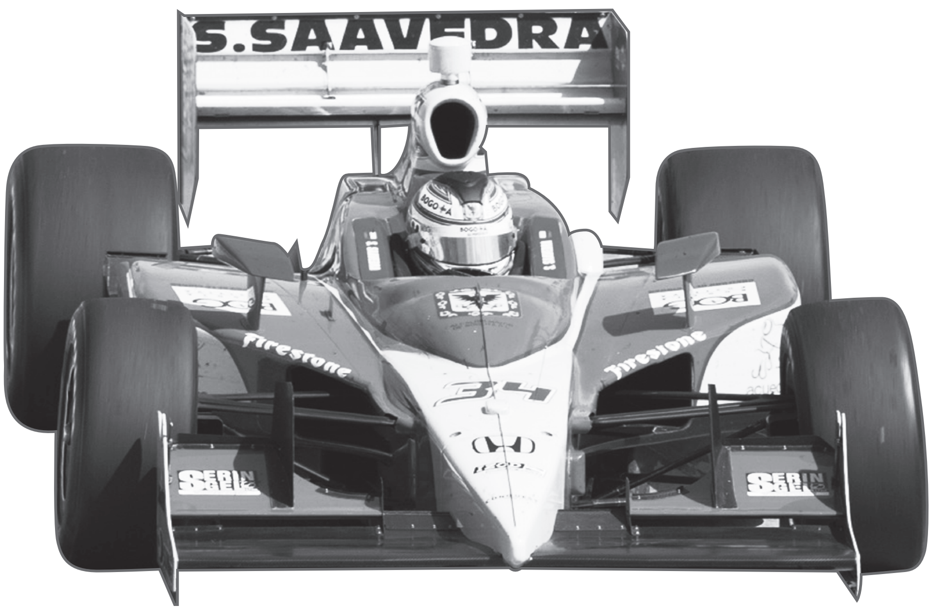
Páginas 1676 a 1699

Cierre

- ¿Qué posibilidad presenta el uso de tablas y de los diagramas de Venn en el análisis de la información?

- Con respecto al trabajo en grupo, ¿cómo fue tu desempeño? ¿Y el de tus compañeros? ¿Qué mejorarías?

REGLA ADITIVA DE LA PROBABILIDAD



IndyCar Series es la categoría de carreras monoplazas más importante de los EE.UU.

En una carrera de automovilismo, Lorena, Patricio y Daniela son las finalistas de la competencia.

- ¿De cuántas maneras posibles pueden llegar a la meta los tres finalistas?

- De las maneras posibles de llegar a la meta, ¿en cuántas Lorena ocupa el primer puesto?

- De las maneras posibles de llegar a la meta, ¿en cuántas Daniela ocupa el primer lugar?

- De las maneras posibles de llegar a la meta, ¿en cuántas Lorena ocupa el último lugar?

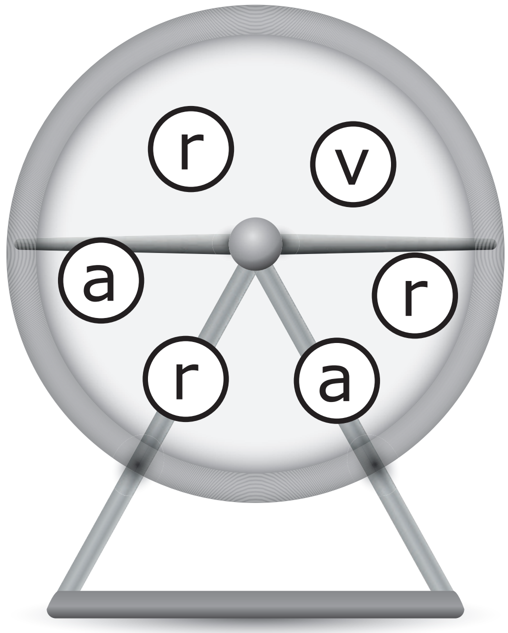
- ¿Cuál es la probabilidad de que Lorena llegue primera o última?

Ejemplo 1

En la tómbola que se muestra hay 3 bolas rojas, 2 celestes y 1 verde. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola verde o una roja?

Bola verde: v **Bola roja:** r

Bola azul: a



Para calcular la probabilidad, identifica los eventos involucrados:

- El evento A se puede definir como aquel en que la bola extraída es verde.

- El evento B, como aquel en que la bola extraída es roja.

Los eventos son disjuntos, ya que no tienen elementos en común.

Luego, realiza los cálculos usando la regla de Laplace considerando que los resultados del experimento son equiprobables:

$$P(A) = \frac{1}{6} \qquad P(B) = \frac{3}{6}$$

Entonces, la probabilidad de extraer una bola verde o una roja está dada por:

$$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

- Dos eventos son **disjuntos** si no tienen elementos en común, es decir, no pueden ocurrir de manera simultánea; entonces, la intersección entre los eventos es vacía.

- Si los eventos son **disjuntos**, entonces, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

- La **probabilidad de la unión** de eventos se calcula por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- La probabilidad del evento que no tiene elementos (vacío) es cero, es decir, $P(\emptyset) = 0$.

Ejemplo 2

De un naipe inglés se extrae una carta y se observa el número (considera que J = 11, Q = 12 y K = 13).

Pamela dice que la carta será mayor que 5 o un diamante y Camilo indica que será menor que 5 o mayor que 10. ¿Cuál de los dos tiene mayor probabilidad de acertar?

► **Cálculos de Pamela**

Sean los eventos:

A: Extraer una carta mayor que 5.

B: Obtener un diamante.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{32}{52} + \frac{13}{52} - \frac{8}{52} = \frac{37}{52}$$

► **Cálculos de Camilo**

Sean los eventos:

A: Extraer una carta menor que 5.

B: Obtener una carta mayor que 10.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

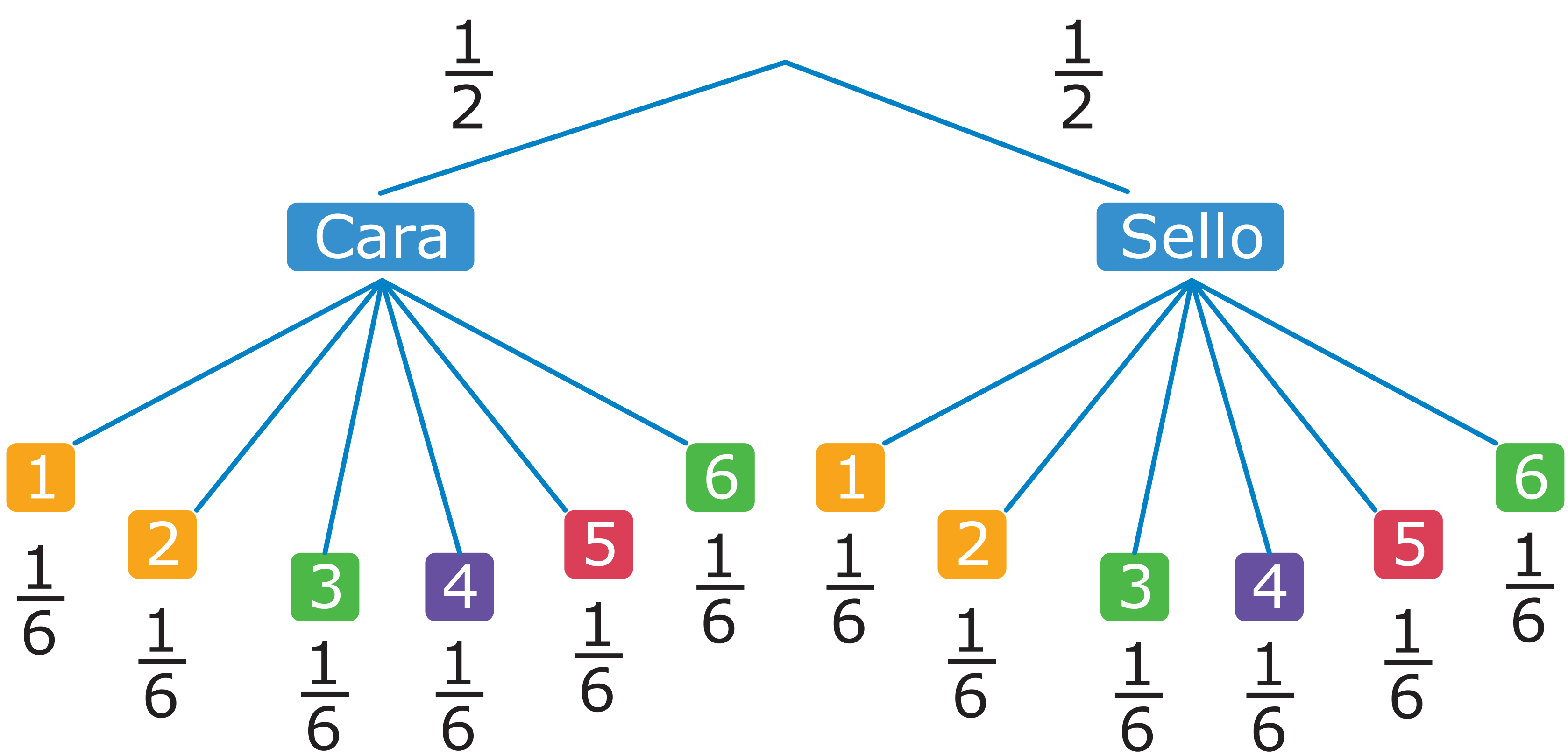
$$= \frac{16}{52} + \frac{12}{52} - 0$$

Pamela tiene mayor probabilidad de acertar, ya que $\frac{37}{52} > \frac{28}{52}$

Ejemplo 3

En el siguiente diagrama de árbol se representó el lanzamiento de una moneda y un dado.

¿Cuál es la probabilidad de obtener una cara en la moneda o 6 puntos en el dado?



Sean los eventos:

- A: Obtener cara.
- B: Obtener 6 puntos.

Para calcular la probabilidad de obtener una cara en la moneda o 6 puntos en el dado, puedes aplicar alguno de los siguientes procedimientos.

► **Procedimiento 1:**

Usando la regla aditiva.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{4}{6} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

► Procedimiento 2:

Contando los casos favorables.

(C, 1); (C, 2); (C, 3); (C, 4);

(C, 5); (C, 6); (S, 6)

De los 12 casos posibles, los casos favorables son 7:

$$P(A \cup B) = \frac{7}{12}$$

Cuando el experimento aleatorio se puede representar mediante un **diagrama de árbol**, cada resultado representado por ramas distintas es un evento disjunto de los demás. Por lo tanto, la probabilidad de la unión de eventos de cada rama es la suma de las probabilidades de cada una.

Ejemplo 4

De un grupo de personas, el 70% utiliza celular, el 20% tablet y el 12% usa ambos elementos. Si se elige una de las personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que emplee al menos uno de estos dispositivos?

Sean los eventos:

- A: Utiliza celular.
- B: Utiliza tablet.

La probabilidad de que la persona use al menos uno de los dispositivos corresponde a $P(A \cup B)$.

Luego, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0{,}7 + 0{,}2 - 0{,}12 \\ &= 0{,}78 \end{aligned}$$

La probabilidad de que al elegir una persona al azar esta utilice alguno de los dos dispositivos es del 78%.

El valor porcentual se puede expresar como un decimal que corresponde al valor porcentual dividido en 100. Por ejemplo, 15% = 0,15.

Ejemplo 5

Los organizadores de una tocata llevaron el registro de las personas que asistieron. Anotaron el género y si habían asistido antes a este tipo de presentaciones. Los resultados se resumen en la siguiente tabla:

Personas que asistieron a una tocata

Personas/ Asistencia (cantidad)	Primera asistencia	Más de una asistencia
Hombre	19	38
Mujer	15	23

Si se elige a una persona al azar para devolverle el valor de la entrada, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona sea mujer o sea la primera vez que asiste?

Sean los eventos:

- A: La persona elegida sea mujer.
- B: La persona asiste por primera vez.

Entonces, $P(A) = \frac{38}{95}$, $P(B) = \frac{34}{95}$ y $P(A \cap B) = \frac{15}{95}$

Con estos datos puedes aplicar la regla aditiva para responder.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{38}{95} + \frac{34}{95} - \frac{15}{95}$$

$$= \frac{57}{95} = \frac{3}{5}$$

La probabilidad de que la persona ganadora sea mujer o sea la primera vez que asiste es $\frac{3}{5}$.

Ejemplo 6

La probabilidad de que Matías salga con su hermana es 0,75 y de salir con su primo es de 0,5. Si la probabilidad de que salga con su hermana o su primo es 0,85, ¿cuál es la probabilidad de que salga con ambos a la vez?

Sean los eventos:

- A: Salir con la hermana.
- B: Salir con el primo.

Entonces, $P(A) = 0{,}75$ y $P(B) = 0{,}5$; además, se conoce que $P(A \cup B) = 0{,}85$. Con estos datos puedes aplicar la regla aditiva para calcular $P(A \cap B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

► Se sustituyen los valores.

$$0{,}85 = 0{,}75 + 0{,}5 - P(A \cap B)$$

► Se resuelve.

$$0{,}85 = 1{,}25 - P(A \cap B)$$

► Se calcula el valor buscado.

$$P(A \cap B) = 1{,}25 - 0{,}85$$

$$P(A \cap B) = 0{,}4$$

Luego, la probabilidad de que salga con ambos a la vez es de 0,4, o bien de un 40%.

Actividades en tu cuaderno

1. Elabora un diagrama de árbol para determinar todas las posibles palabras de 3 letras distintas que se pueden formar con las letras A, B y C, tengan o no sentido.

2. De la actividad 1, calcula la probabilidad de la unión de los eventos:

- Las palabras que empiezan con la letra A.
- Las palabras que terminan con la letra C.

3. Analiza las siguientes situaciones y utiliza la regla aditiva para calcular la probabilidad solicitada.

a. Se lanzan dos dados de seis caras cada uno y se observan los puntajes de las caras superiores.

- ¿Cuál es la probabilidad de que en ambas caras se obtenga el mismo puntaje?

- ¿Cuál es la probabilidad de que los puntajes sean distintos?

- ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntajes sea par o mayor que cinco?

- ¿Cuál es la probabilidad de que solo uno de los puntajes sea impar o que sea seis?

b. Se extrae una carta de un naipe inglés. Considera que el naipe inglés tiene 4 pintas de 13 cartas cada una.

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 8 o una figura?

- ¿Cuál es la probabilidad de conseguir un número par o un diamante? Considera J = 11, Q = 12 y K = 13.

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número que sea mayor que cuatro o de pinta negra?

- Junto con un compañero(a), seleccionen y calculen la probabilidad de la unión de dos eventos que sean mutuamente excluyentes.

Proyecto. ¿Cuál red social prefieres?

4. Con la ayuda de dos compañeros, organicen la siguiente investigación:

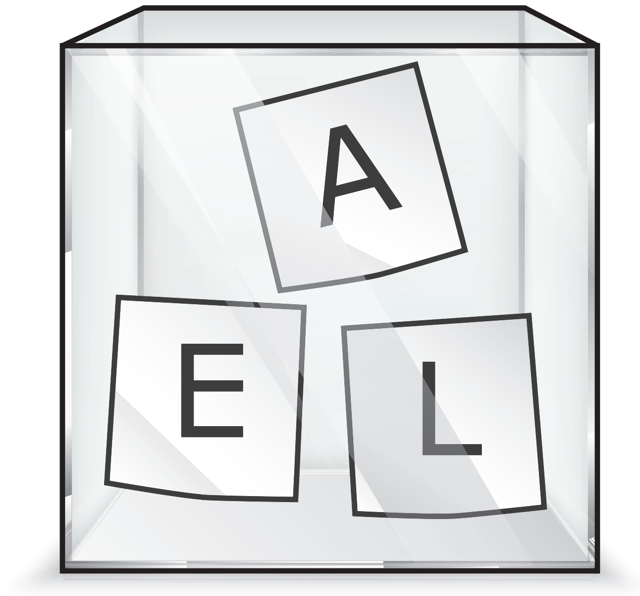
- Averigüen qué red social es la más utilizada por sus compañeros: Twitter, Instagram o WhatsApp.

- Con la información recogida, completen una tabla de doble entrada considerando las respuestas separadas entre hombres y mujeres.

- Formulen preguntas de cálculo de probabilidades que puedan ser resueltas aplicando las reglas de la adición.

5. Analiza la siguiente situación y resuelve.

Belén extrae, sin mirar, una tras otra, todas las tarjetas de una tómbola para formar una palabra, con o sin sentido, en el orden que aparezcan.



a. Representa los resultados en un diagrama de árbol.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la palabra extraída termine con la letra A o con la L?

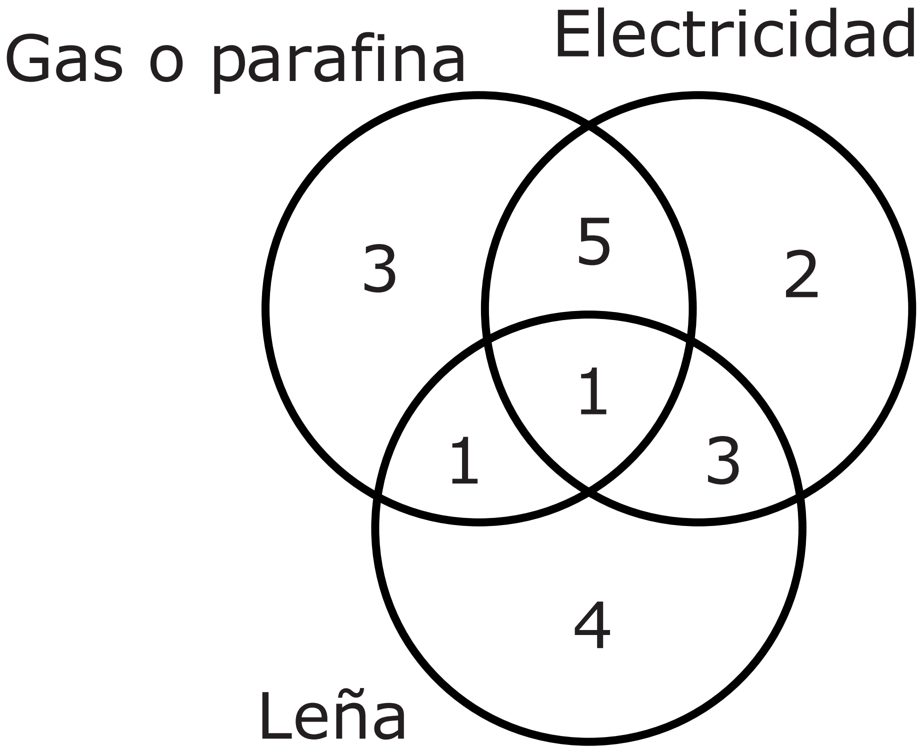
6. Resuelve los siguientes problemas.

a. Se encuesta a algunas personas para conocer qué tipo de calefacción utilizan mayormente en su hogar. Los resultados se muestran en el diagrama de Venn donde los valores corresponden a la cantidad de respuestas en cada caso.

Si se selecciona una persona al azar:

- ¿Cuál es la probabilidad de que use en su hogar calefacción a gas o a parafina?

- ¿Cuál es la probabilidad de que use en su hogar calefacción eléctrica o a leña?



- ¿Cuál es la probabilidad de que use en su hogar solo calefacción eléctrica?

b. El director técnico de un equipo de vóleibol debe realizar tres cambios en el segundo tiempo y para ello debe seleccionarlos de entre cinco jugadores disponibles: Juana, José, Bastián, Rodrigo y Gabriela. El entrenador decide seleccionarlos al azar mediante un sorteo.

- ¿Cuál es la probabilidad de que Juana o Rodrigo queden seleccionados?

- ¿Cuál es la probabilidad de que en el equipo estén Gabriela, Rodrigo y Juana?

- ¿Cuál es la probabilidad de que José no quede en el equipo, pero Bastián sí?

c. La siguiente tabla presenta los resultados de un estudio realizado en un consultorio sobre la condición de peso de unos pacientes:

Persona/ Condición de peso	**Bajo peso**	**Normal**	**Sobrepeso**
Niños	15	20	30
Adultos	5	25	40

Si se elige un paciente al azar:

- ¿Cuál es la probabilidad de que este sea adulto o tenga sobrepeso?

- ¿Cuál es la probabilidad de que este sea niño o tenga peso normal?

d. En un grupo de estudiantes, el 45% juega fútbol, el 30% básquetbol y el 12% practica ambos deportes. Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que juegue uno de los dos deportes?

e. Se sabe que $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,1$ y $P(A \cup B) = 0,8$. ¿Es correcto decir que A y B son eventos disjuntos?

f. **Actividad de profundización.** Se lanzan cuatro monedas y se observan sus resultados. Luego, se quitan todas las monedas en que se obtuvo cara y se dejan aquellas en las que se obtuvo un sello. ¿Cuál es la probabilidad de que una vez terminado el experimento queden al menos dos monedas?

Cuaderno de Actividades

Páginas 1700 a 1721.

Cierre

- ¿Qué representación prefieres utilizar, los diagramas de árbol o los diagramas de Venn? ¿Por qué?

- ¿Qué te resultó más difícil de entender? ¿Por qué?

- ¿De qué forma puedes reforzar tus aprendizajes?

REGLA MULTIPLICATIVA DE LA PROBABILIDAD

En una fiesta, un mago muestra cinco cartas, como las de la imagen, y pide extraer dos sin reposición, es decir, sin devolverlas al mazo.

Juego de cartas póquer.

Escalera real de color.

Considera los siguientes eventos:

A: En la primera extracción, obtener un as.

B: En la segunda extracción, obtener un 10.

Considerando un conjunto de pares ordenados en que la primera coordenada representa la primera extracción, y la segunda coordenada, la segunda extracción:

- ¿Cuáles son los conjuntos formados por los eventos A y B del experimento?

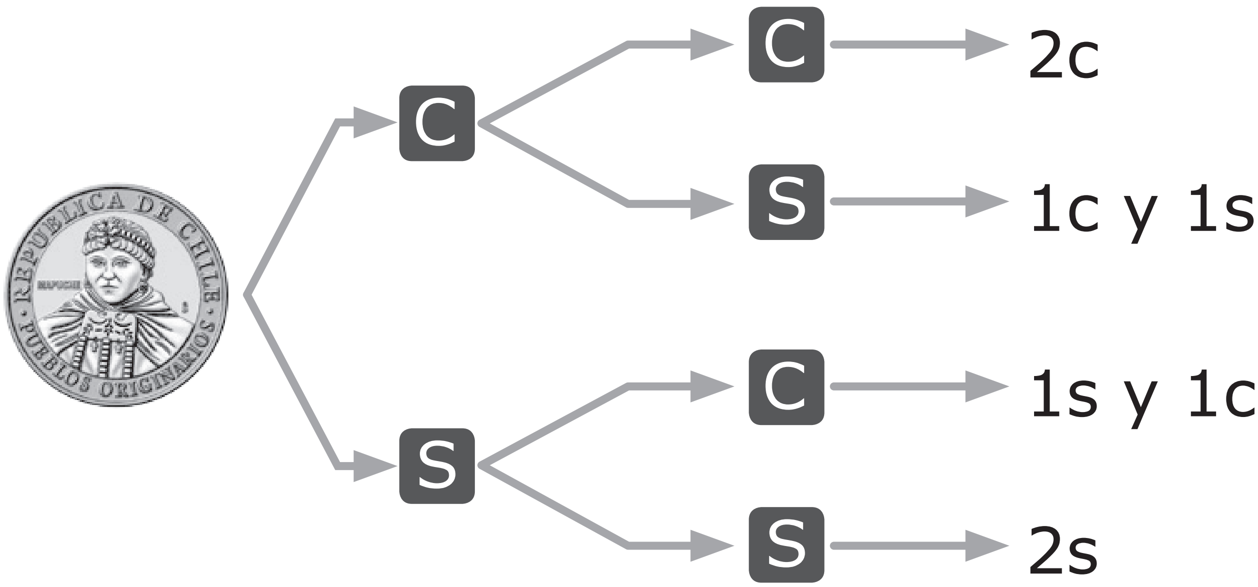
- ¿Cuál es la probabilidad del evento $A \cap B$?

- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra solo el evento A?

- ¿Observas alguna relación entre las probabilidades de los eventos A, B y la intersección de los eventos? Comenta con tus compañeros.

Ejemplo 1

Se quiere calcular la probabilidad de obtener dos caras al lanzar dos veces una moneda al aire. Confecciona un diagrama de árbol para representar la situación y resuelve.



A partir del diagrama, puedes reconocer que hay 1 caso favorable al suceso de obtener dos caras. Luego, como hay 4 casos totales, la probabilidad de obtener dos caras al lanzar la moneda es $\frac{1}{4}$.

En los sucesos independientes, la probabilidad se obtiene al multiplicar las probabilidades de los eventos obtener cara en el primer lanzamiento y cara en el segundo, es decir: $\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Dos **eventos son independientes** si $P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$ o, en forma equivalente, dos eventos son independientes si la realización de uno no afecta la probabilidad del otro.

Esta propiedad se conoce como **regla multiplicativa** de la probabilidad.

$$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$$

Ejemplo 2

En una ciudad, la probabilidad de que ocurra un accidente cuando llueve es de un 15% y cuando hay buen tiempo es de un 4%. A continuación se presentan los pronósticos de lluvia para la primera semana del mes de diciembre en esa ciudad.

Probabilidad de lluvia

- Lunes: 10%
- Martes 25%
- Miércoles: 40%
- Jueves: 70%
- Viernes: 30%

¿Por qué crees que la probabilidad de que ocurra un accidente vehicular aumenta cuando llueve? Comenta con tu curso.

Calcula la probabilidad de que ocurra un accidente el lunes, el martes y el miércoles.

Sean los eventos A: llueve y B: ocurre un accidente.

Luego, como los eventos son independientes, se tiene lo siguiente:

- Probabilidad de que ocurra un accidente el lunes:

$$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$$
$$= 0{,}1 \bullet 0{,}15 = 0{,}015$$

- Probabilidad de que ocurra un accidente el martes:

$$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$$
$$= 0{,}25 \bullet 0{,}15 = 0{,}0375$$

- Probabilidad de que ocurra un accidente el miércoles:

$$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$$
$$= 0{,}4 \bullet 0{,}15 = 0{,}06$$

¿Cuál es la probabilidad de que ocurra un accidente el jueves y el viernes?

Ejemplo 3

En el aniversario de una tienda un cliente participa en dos concursos. En el primero tiene un 0,005 de posibilidades de resultar ganador. Si la posibilidad de que gane ambos es de un 0,00012, ¿cuál es la probabilidad de que la persona gane el segundo concurso en el que participa?

Como los eventos son independientes, puedes utilizar la regla de la multiplicación para calcular la probabilidad solicitada:

$$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$$

► Se reemplazan los datos.

$$0{,}00012 = 0{,}005 \bullet P(B)$$

$$P(B) = \frac{0{,}00012}{0{,}005} = 0{,}024$$

La probabilidad de que la persona gane el segundo juego es $\frac{24}{1.000}$.

Ejemplo 4

Considera el experimento de lanzar dos veces una moneda al aire y observar el resultado que se obtiene.

Considera los siguientes eventos:

- A: En el primer lanzamiento se obtiene una cara.

- B: En segundo lanzamiento se obtiene una cara.

Los eventos A y B, ¿son independientes?

1º Describe el espacio muestral y los eventos.

$\Omega = \{CC, CS, SC, SS\}$

$A = \{CS, CC\}$

$B = \{SC, CC\}$

$A \cap B = \{CC\}$

2 º Calcula la probabilidad de los eventos A, B y de su intersección:

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

3 º Comprueba que los eventos sean independientes:

$$P(A) \bullet P(B) = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{4} P(A \cap B)$$

Luego, los eventos son independientes. Eso también se refleja en el hecho de que los resultados de lanzar una moneda no tienen relación con los resultados obtenidos en otros lanzamientos.

Ejemplo 5

Una jugadora de básquetbol tiene una probabilidad de acierto del 70% cuando lanza un tiro libre. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte 4 tiros libres seguidos?

Sea el evento A: acertar un tiro libre, entonces P(A) = 0,7.

Como los lanzamientos son independientes uno del otro, la probabilidad de lanzar 4 tiros libres consecutivos es:

$$0{,}7 \bullet 0{,}7 \bullet 0{,}7 \bullet 0{,}7 = 0{,}2401$$

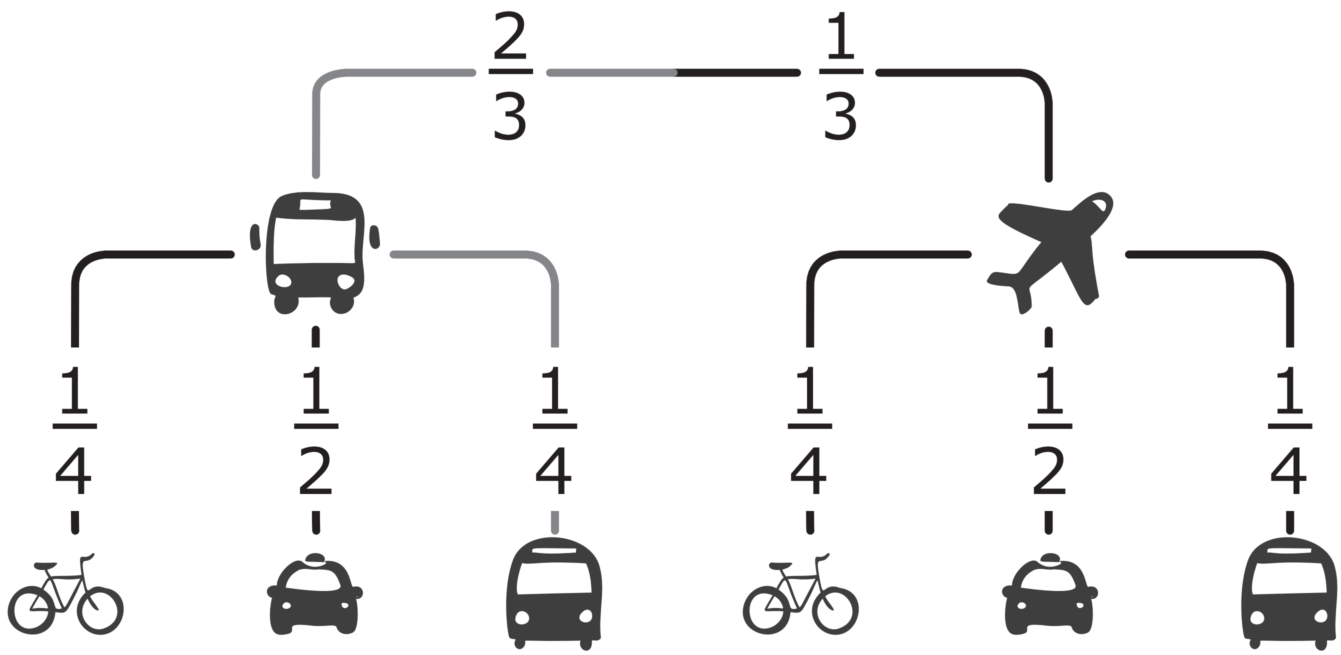
Entonces, la probabilidad de que acierte cuatro veces seguidas es 0,2401, es decir, de un 24,01%.

Ejemplo 6

Un turista viaja de una ciudad a otra. Para ello, puede hacerlo en avión o en bus hasta cierto punto del trayecto, y luego utilizar taxi, microbús o bicicleta. Se sabe que uno de tres turistas utiliza avión en el primer tramo. Además, en el segundo tramo, uno de dos turistas usa taxi y uno de cuatro usa microbús.

¿Cuál es la probabilidad de que el turista haya viajado en bus y en microbús?

El problema se puede representar en el siguiente diagrama de árbol:



- Sean los siguientes eventos:

  B: viaje en bus

  M: viaje en microbús.

- Luego, se calcula la probabilidad:

  $P(B \cap M) = P(B) \bullet P(M)$

  $$= \frac{2}{3} \bullet \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

- Entonces, uno de cada seis turistas viaja en bus y luego en microbús.

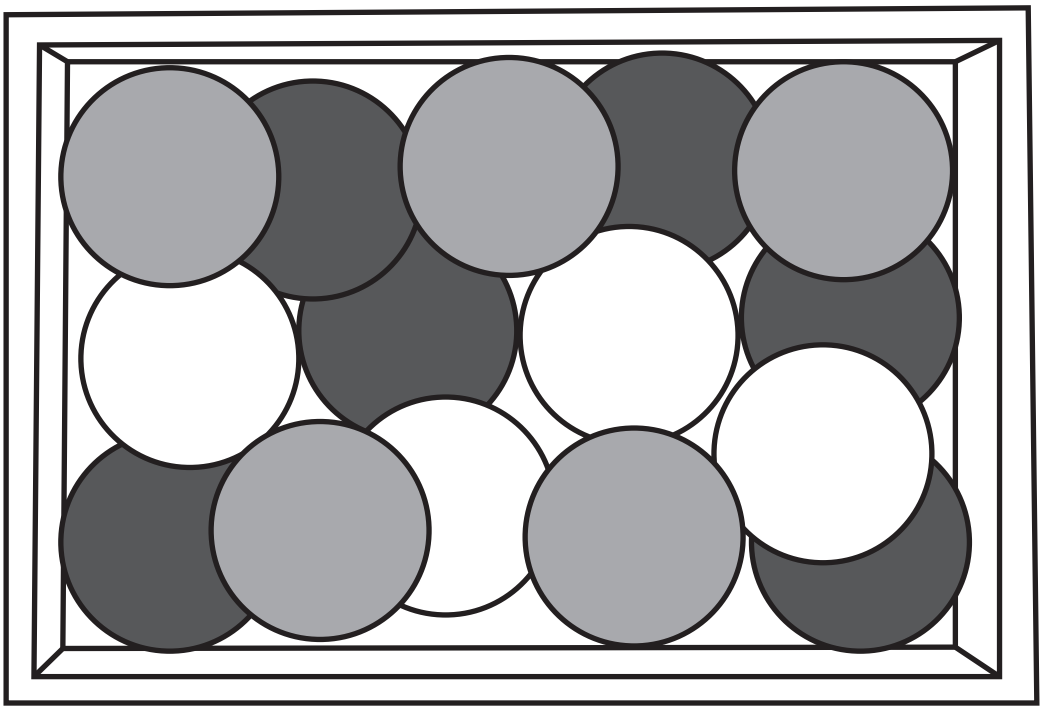
- La probabilidad del evento A dada la ocurrencia del evento B se conoce como **probabilidad condicional** y se denota como P(A|B).

- La probabilidad de la intersección de dos eventos A y B se calcula como:

$$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(A \mid B)$$

Ejemplo 7

En una caja hay 15 bolitas, como se muestra en la figura.



En una caja hay 15 bolitas. 6 rojas, 5 azules y 4 verdes. De ella se extraerán dos bolitas, una después de la otra, sin reposición. Determina la probabilidad de extraer primero una bolita azul, y luego una roja.

De ella se extraerán dos bolitas, una después de la otra, sin reposición. Determina la probabilidad de extraer primero una bolita azul, y luego una roja.

Calcula la probabilidad de extraer primero una azul:

$P(A) = \frac{5}{15}$ ya que son 5 casos favorables de 15 en total.

Luego, calcula la probabilidad de extraer la bolita roja habiéndose extraído ya una azul:

$P(R \mid A) = \frac{6}{14}$ ya que son 6 casos favorables de 14 en total debido a que se extrajo una bolita en el paso anterior.

Finalmente, la probabilidad de extraer una bolita azul, y luego una roja se puede calcular multiplicando ambas probabilidades.

$$P(A \cap R) = P(A) \bullet P(R \mid A)$$

$$= \frac{5}{15} \bullet \frac{6}{14} = \frac{30}{210}$$

Por último, Julián observa que si hubiese sacado las dos al mismo tiempo, el resultado sería el mismo, ya que las condiciones se mantienen.

Ejemplo 8

Dos semáforos en una vía están sincronizados, es decir, el estado del primero influye en el segundo.

Una persona estima que el primer semáforo está en verde un 40% del tiempo, y el segundo está en verde un 35%. ¿Cuál es la probabilidad de que, al transitar, ambos estén en fase verde?

La probabilidad de no ser detenido por los semáforos es:

$$P(V1 \cap V2) = P(V1) \bullet P(V2 \mid V1)$$

$$= \frac{40}{100} \bullet \frac{35}{100} = \frac{1.400}{10.000} = \frac{14}{100} = \frac{7}{50}$$

Entonces, la probabilidad de no detenerse por encontrarse alguna luz roja en los semáforos es de $\frac{7}{50}$, equivalente al 14%.

Actividades en tu cuaderno

1. Observa las siguientes figuras y representa en un diagrama de árbol cada situación. Luego, calcula la probabilidad solicitada.

Figura 1

Figura 2

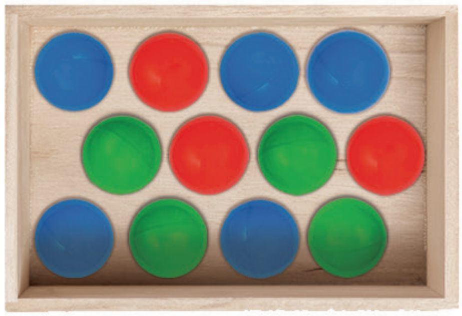


Figura 3

a. Se hace girar una ruleta de cuatro colores, como la de la Figura 1, y se lanza una moneda.

¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga el color rojo en la ruleta y cara en la moneda?

b. De una caja hay 5 bolitas azules, 3 rojas y 4 verdes como la que se representa en la Figura 2, se extraerán dos bolitas, una después de la otra con devolución. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean verdes?

c. Se lanzan dos dados al aire, como los que se muestran en la Figura 3. ¿Cuál es la probabilidad de que en cada dado se obtenga 6 puntos?

2. Resuelve los siguientes problemas.

a. En una prueba de selección múltiple con 4 alternativas cada una, se responden al azar tres de ellas.

¿Cuál es la probabilidad de que se contesten las tres de manera incorrecta?

b. Cristóbal escribe cada una de las letras de su nombre en un papel distinto, nueve en total. Él ubica los papeles vueltos hacia abajo, los revuelve y toma dos de ellos, sin reposición.

¿Cuál es la probabilidad de que ambas letras extraídas sean vocales? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas letras sean consonantes?

c. La probabilidad de que un insecto te pique durante un día de campo es de un 20% y de que llueva es de un 30%. ¿Cuál es la probabilidad de que te pique un mosquito y llueva?

d. Una persona se encuentra afuera de su casa, a tres pasos de la puerta, y decide efectuar el siguiente experimento: toma una moneda y la lanza al aire. Si sale cara, avanza un paso y si es sello, retrocede un paso.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la persona llegue a la puerta después de tres lanzamientos?

- ¿Cuál es la probabilidad de que la persona se encuentre a 6 pasos de la puerta después de cuatro lanzamientos?

- ¿Es probable que la persona nunca llegue a la puerta realizando este experimento? ¿Por qué?

e. Una máquina fabrica cinco pernos defectuosos por cada 50. Si de un total de 100 pernos fabricados por dicha máquina se eligen tres al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los tres estén defectuosos?

f. La probabilidad de que un jugador esté en la nómina para disputar un partido es de un 45% y la probabilidad que este convierta un gol es de un 40%. ¿Cuál es la probabilidad de que juegue y convierta un gol? ¿Cuál es la probabilidad de que juegue y no convierta un gol?

Cuaderno de Actividades

Páginas 1722 a 1740.

Cierre

- ¿Qué características debe tener un problema para poder aplicar la regla aditiva y multiplicativa en el cálculo de probabilidades?

- Respecto al trabajo en grupo realizado durante toda la lección, ¿lograste transmitir de forma adecuada tus razonamientos e ideas? Explica.

Síntesis

En las páginas tratadas anteriormente has estudiado:

► Unión e intersección de eventos

Dados dos eventos A y B:

- La **unión** es el conjunto $(A \cup B)$, en el que cada elemento pertenece a A o pertenece a B.

- La **intersección** es el conjunto $(A \cap B)$, en el que cada elemento pertenece a A y pertenece a B.

► Regla aditiva de la probabilidad

La probabilidad de que ocurra el evento A o el evento B se calcula por:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Si los eventos son disjuntos, entonces $P(A \cap B) = 0$

► Regla multiplicativa de la probabilidad

La probabilidad de que ocurra el evento A y el evento B se calcula como: $P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B \mid A)$

Si los eventos son independientes, entonces $P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$

Responde:

¿Cómo puedes calcular la probabilidad que tiene tu equipo favorito de clasificar?

¿Cómo vas?

Evaluación Lección 11

Desarrolla las siguientes actividades en tu cuaderno.

1. Representa en un diagrama de Venn la siguiente situación.

En un liceo, 36 estudiantes de segundo medio optaron por algunas asignaturas electivas para tercero medio: Física, Química y/o Ciencias de la Salud. Quince optaron por Física, 18 por Química y 19 por Ciencias de la Salud. Además, 2 optaron por las tres asignaturas, 7 Física y Química, 5 Química y Ciencias de la Salud, 6 Física y Ciencias de la Salud.

Si se elige un estudiante al azar:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que estudie Física o Química?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que estudie Química o Ciencias de la Salud?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que no estudie Química?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que haya optado por solo una de las asignaturas?

2. Analiza cada situación, y luego responde.

a. Se trataron unas plantas de tomate y lechuga con dos abonos diferentes, A1 y A2. A 20 plantas de tomates se les aplicó A1 y a 10 el abono A2. Por otro lado, a 40 lechugas se les aplicó el abono A1 y a 30 el A2. Si se elige una planta al azar:

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea una lechuga o que haya sido tratada con el abono A1?
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea una planta de tomate o haya sido tratada con el abono A2?
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea una planta de lechuga y haya sido tratada con el abono A2?

b. Claudia extrae sin mirar una bolita de la urna, anota su color y la devuelve. En la urna hay 5 bolitas rojas, 7 verdes y 3 amarillas Luego, vuelve a sacar otra y anota su color.

- Da ejemplos de dos eventos independientes.

- ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolitas sean del mismo color?

- ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolitas sean de colores distintos?

- ¿Cómo cambian las probabilidades anteriores si el experimento se realiza sin devolver la bolita a la urna?

- Si las bolitas no se devuelven a la urna, los ejemplos que indicaste anteriormente, ¿siguen siendo eventos independientes?

c. Para el juego del amigo secreto, en una caja se ponen los nombres de 18 personas, 8 de ellas son mujeres y el resto hombres.

- ¿Cuál es la probabilidad de que las tres primeras personas seleccionadas sean mujeres?

- ¿Cuál es la probabilidad de que la primera persona seleccionada sea hombre y la segunda mujer?

- Cuando la primera persona va a sacar un nombre, ¿cuál es la probabilidad de que saque su nombre tres veces seguidas? Considera que si le sale su nombre debe devolver el papel a la caja.

3. Resuelve los siguientes problemas.

a. En la elección de presidente y de delegado del curso hay tres candidatos: Andrea, Benjamín y Camila. Antes de realizar las elecciones, se consulta por la intención de voto a 10 estudiantes y se obtienen las siguientes probabilidades:

	Andrea	**Benjamín**	**Camila**
Presidencia	30%	35%	35%
Delegado	50%	20%	30%

- ¿Cuál es la probabilidad de que Benjamín sea elegido presidente o delegado?

- ¿Cuál es la probabilidad de que Camila o Andrea sea elegida delegada?

- ¿Cuál es la probabilidad de que Andrea sea elegida presidenta y Camila delegada?

b. Si se lanzan tres monedas al aire, ¿cuál es la probabilidad de obtener tres sellos? ¿Cuál es la probabilidad de conseguir dos sellos y una cara?

c. Si se extraen dos cartas de un naipe inglés, ¿cuál es la probabilidad de que ambas cartas sean menores que seis? ¿Y cuál la probabilidad de que sean figuras o diamantes? Considera que el naipe inglés tiene 4 pintas de 13 cartas cada una.

d. La probabilidad de que hoy llueva es de un 20% y la probabilidad de que pase la micro a tiempo es de un 40%. ¿Cuál es la probabilidad de que llueva y la micro no llegue a tiempo?

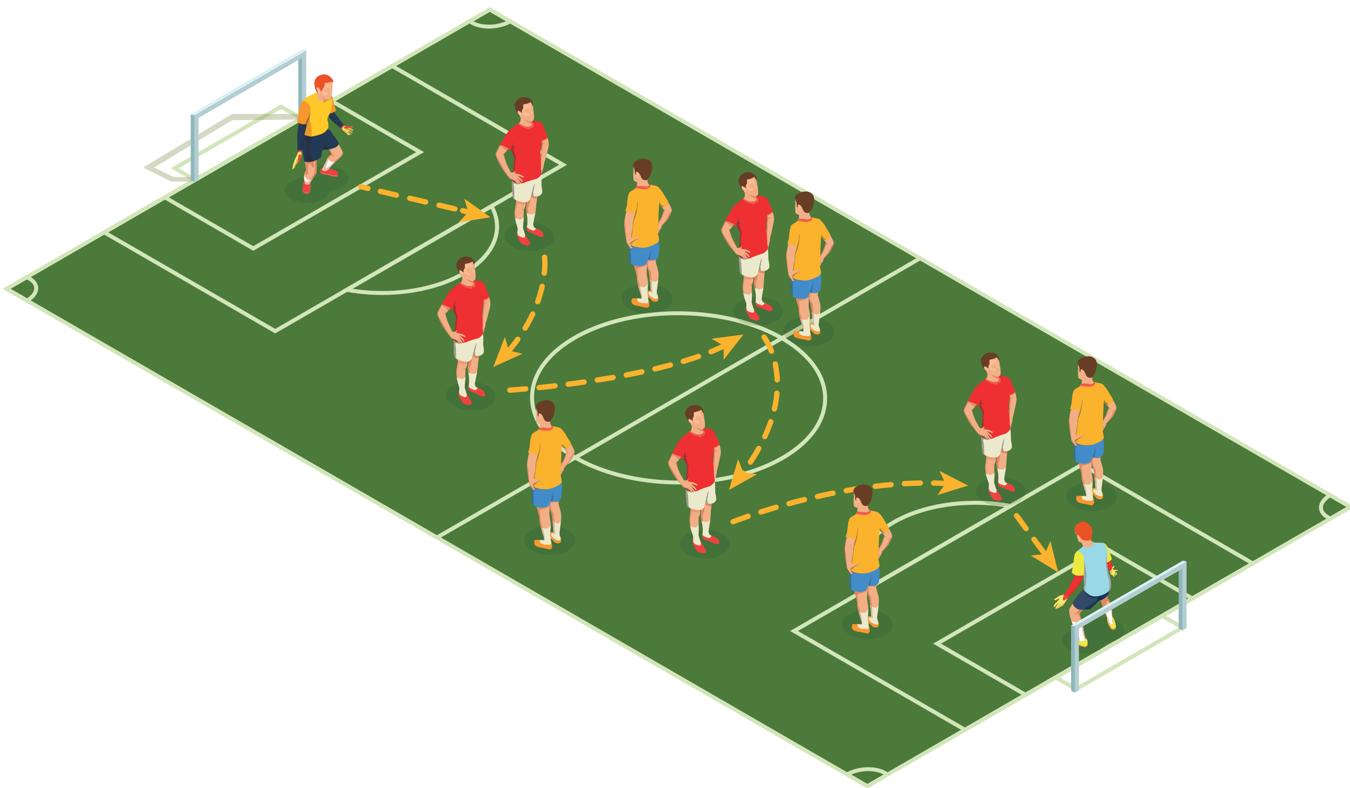
e. La probabilidad de que una persona asista al concierto de un cantante y vaya al cine es de un 45%; de que asista solamente al cine es de un 30% y de que asista a uno u otro evento es de 70%. ¿Cuál es la probabilidad de que asista al concierto?

Cuaderno de Actividades

Páginas 1741 a 1750

Lección 12

Comportamiento aleatorio



¿Cómo determinar la mejor jugada?

Analiza la siguiente información, y luego responde.

El director técnico del equipo presenta una estrategia de ataque que consiste en hacer pases de lado a lado, como se muestra en la imagen anterior.

Según su experiencia, en cada pase el 40% de los jugadores optan por pasar el balón a su derecha y el 60% optan por hacerlo a su izquierda.

1. ¿Cuál crees que es la relación entre este tipo de representación y el diagrama de árbol?

2. ¿Qué regla del cálculo de probabilidades se puede utilizar para calcular la probabilidad de que se realicen exactamente esos pases?

3. Propón junto con un compañero(a) una situación similar a la planteada.

Reflexiona

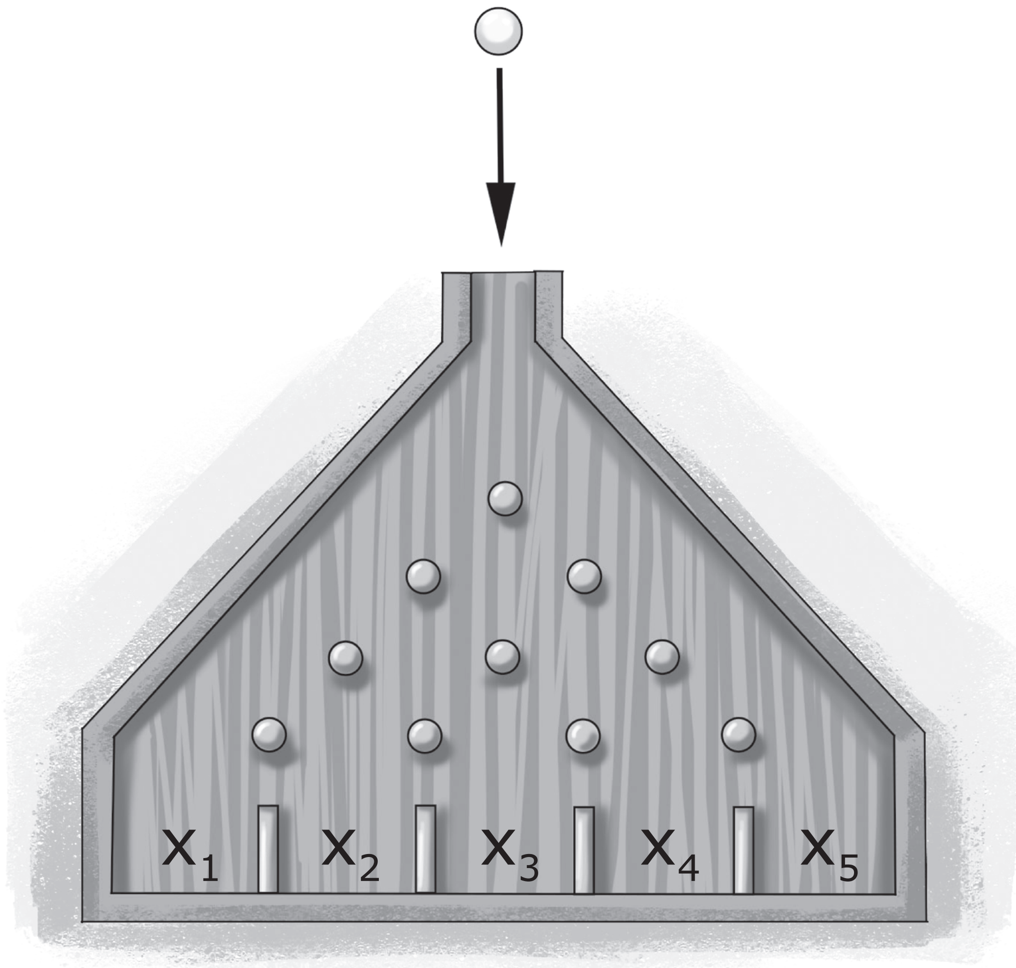
- ¿Qué conocimientos vistos en años anteriores crees que se pueden relacionar con lo que trabajarás en esta lección? Comenta con tus compañeros.

- ¿En qué otras situaciones se podría utilizar este tipo de representaciones?

- ¿Crees que expresar y escuchar ideas de forma respetuosa te ayudará en tus aprendizaje de esta lección? ¿Por qué?

TABLA DE GALTON Y PASEOS ALEATORIOS

La **tabla de Galton** o máquina de Galton consta de un tablero vertical con varias filas de clavos. Se introducen bolitas en la parte superior para que caigan rebotando aleatoriamente y depositándose, a medida que caen, en los casilleros de la parte inferior. La imagen muestra una máquina de Galton con cuatro filas de clavos y cinco casilleros, x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5.



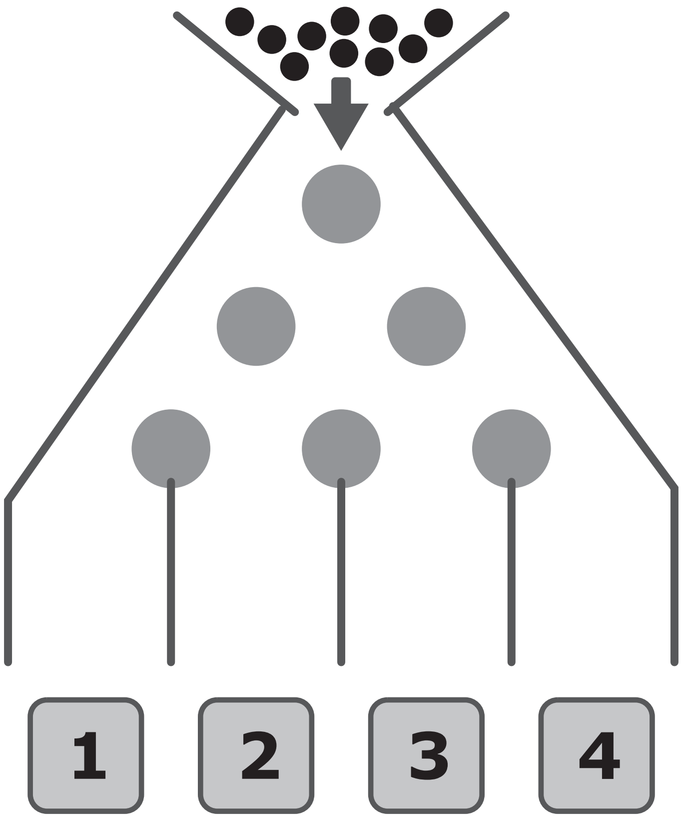
- ¿Crees que en todos los casilleros caerán aproximadamente la misma cantidad de bolitas? Justifica.

- Si en la pregunta anterior respondiste que no, ¿en qué casilleros caerán más bolitas? ¿En qué casilleros caerán menos bolitas?

- Si en la primera pregunta respondiste que sí, ¿por qué lo crees?

Ejemplo 1

En una máquina de Galton, como la que se muestra en la imagen, ¿cuál es la probabilidad de que una bolita caiga en el casillero 3?



Se definen los eventos:

- D: Elección a la derecha.
- I: Elección a la izquierda.

Representa en un diagrama los caminos posibles y su probabilidad en cada caso. Observa que hay 3 caminos posibles: I - D - D, D - I - D y D - D - I.

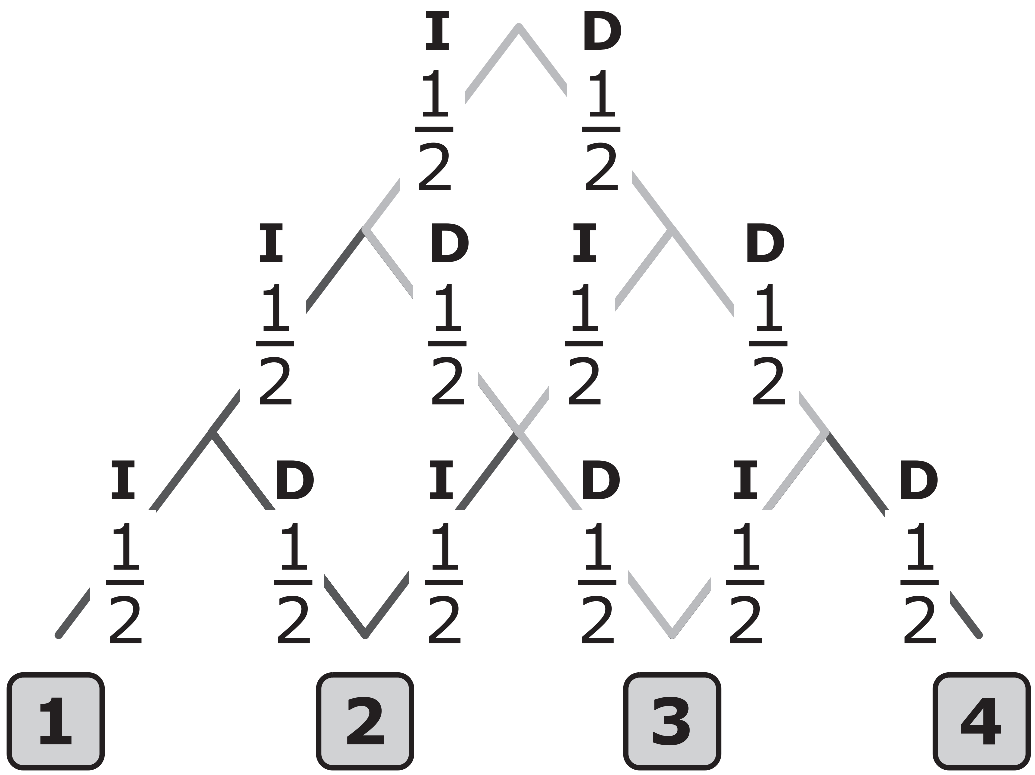
Utiliza las reglas de la adición y la multiplicación para calcular la probabilidad de que la bolita caiga en el casillero 3.

Luego, obtienes lo siguiente:

$$\left(\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2}\right) +$$

$$\left(\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Entonces, la probabilidad de que una bolita caiga en el casillero 3 es de $\frac{3}{8}$.



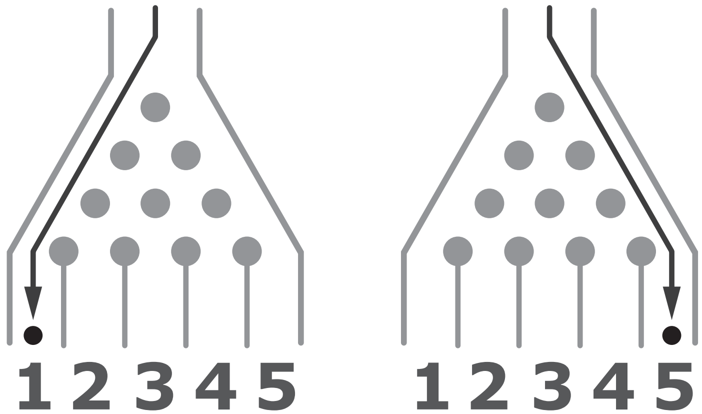
- La **tabla o máquina de Galton** permite reconocer el comportamiento de una distribución normal de los resultados que corresponden a un experimento, en el cual cada etapa carece de certeza con respecto a qué camino se seguirá.

- Un **paseo aleatorio** es una caminata o un recorrido en el cual en cada paso o etapa se tienen varias opciones para continuar, pero no se tiene certeza de cuál se tomará.

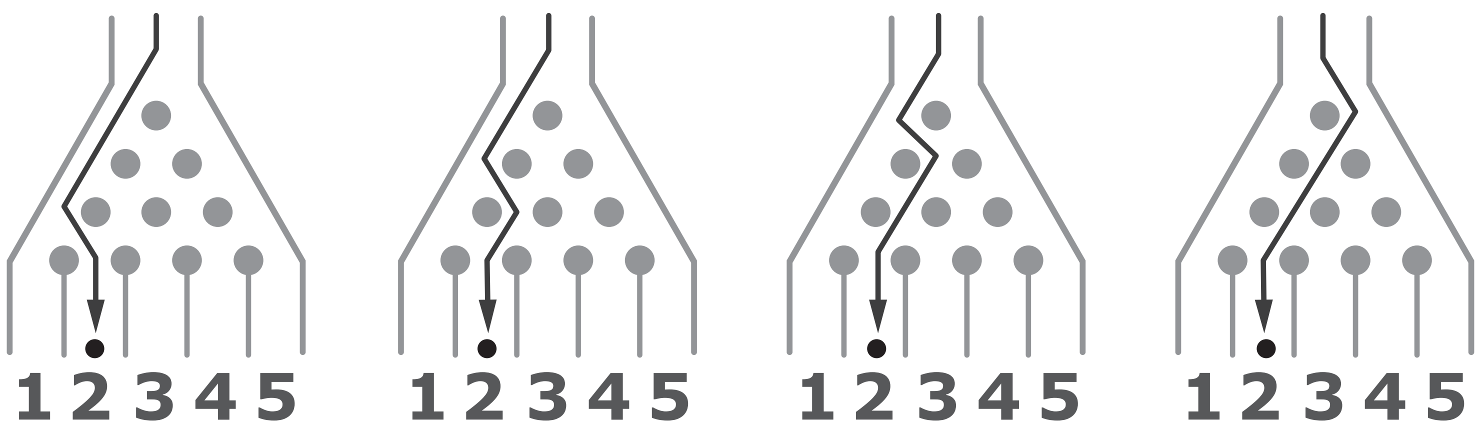
Ejemplo 2

Una bolita es lanzada por una máquina de Galton con cinco casilleros de salida. ¿Cuántos caminos diferentes puede recorrer la bolita?

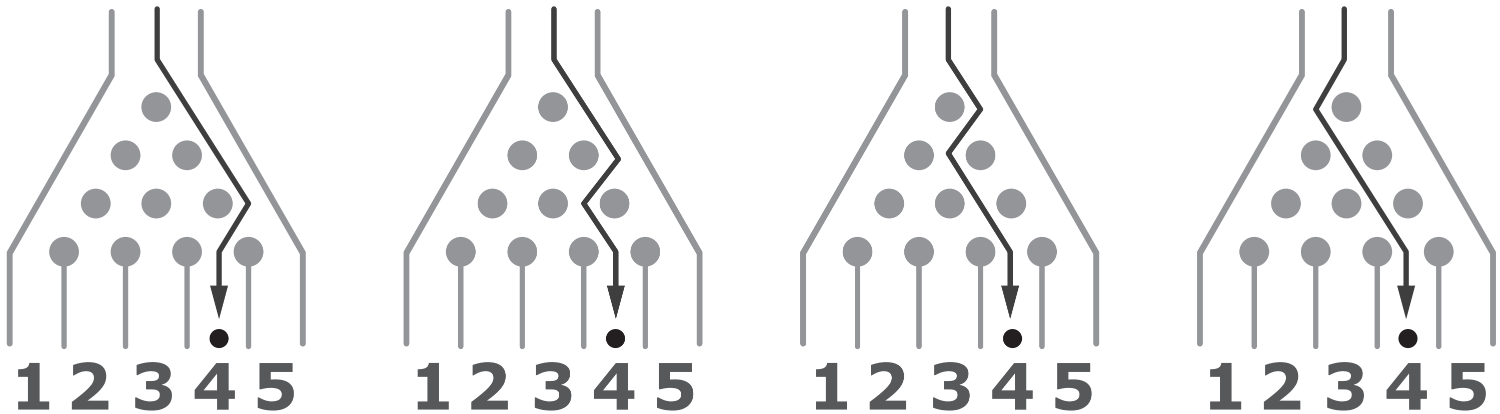
- Un camino para la salida 1 y otro para la salida 5.



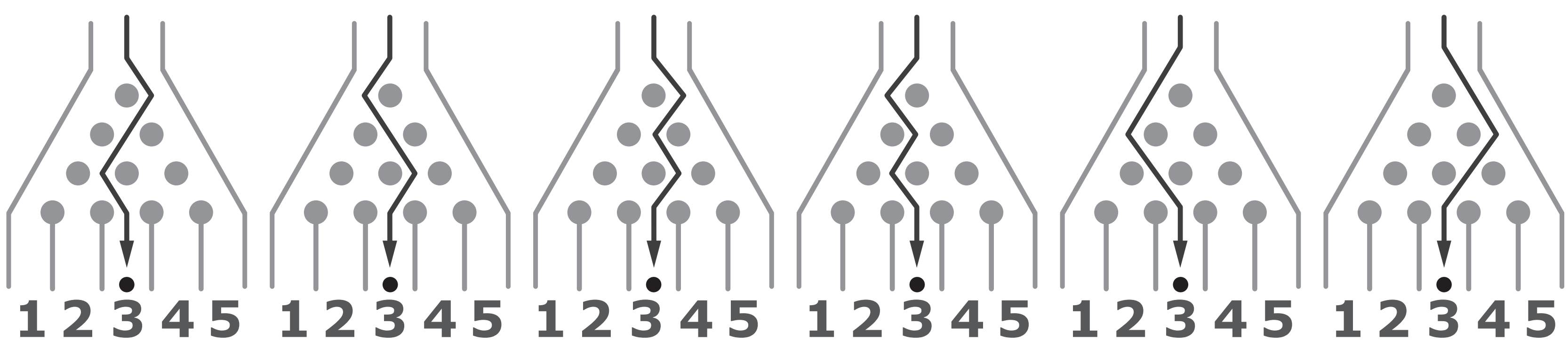
- Cuatro caminos para la salida 2.



- Cuatro caminos para la salida 4.



- Seis caminos para la salida 3.



Entonces, la bolita puede recorrer 16 caminos diferentes.

Actividades en tu cuaderno

1. Averigua acerca de la campana de Gauss y luego comenta la información con tu curso.

Ejemplo 3

Considera los datos del **Ejemplo 2** y calcula las siguientes probabilidades.

- La probabilidad de cada camino.

Respuesta: Como en total hay 16 caminos diferentes y todos tienen la misma probabilidad de ocurrir, la probabilidad de cada camino es $\frac{1}{16}$.

- La probabilidad de que la bolita llegue a la salida 2.

Respuesta: Hay cuatro caminos diferentes que llegan a la salida 2, por lo que la probabilidad de que la bolita llegue a la salida 2 es $\frac{4}{16}$.

- La probabilidad de que la bolita llegue a una salida con un número par o mayor que 3.

Respuesta: Hay ocho casos favorables para el evento: «llegar a una salida par», y cinco para el evento «llegar a una salida mayor que 3», entonces las probabilidades son $\frac{8}{16}$ y $\frac{5}{16}$ respectivamente.

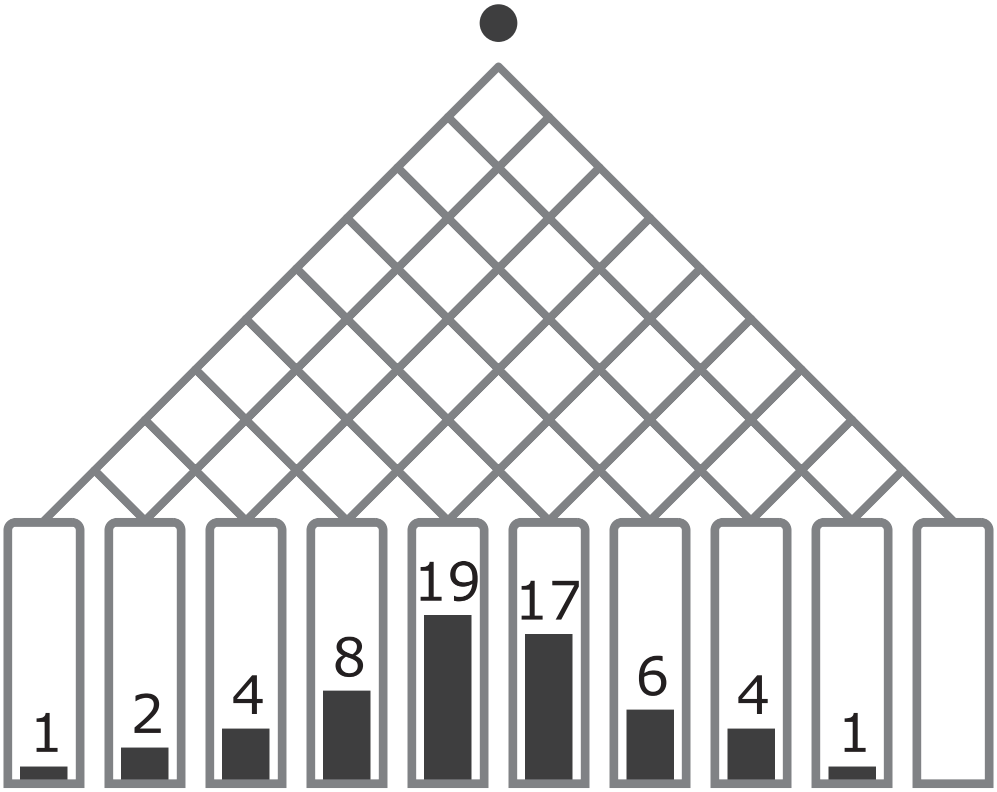
Luego, como los eventos no son disjuntos, la probabilidad de que la bolita llegue a una salida con un número par o mayor que 3 es:

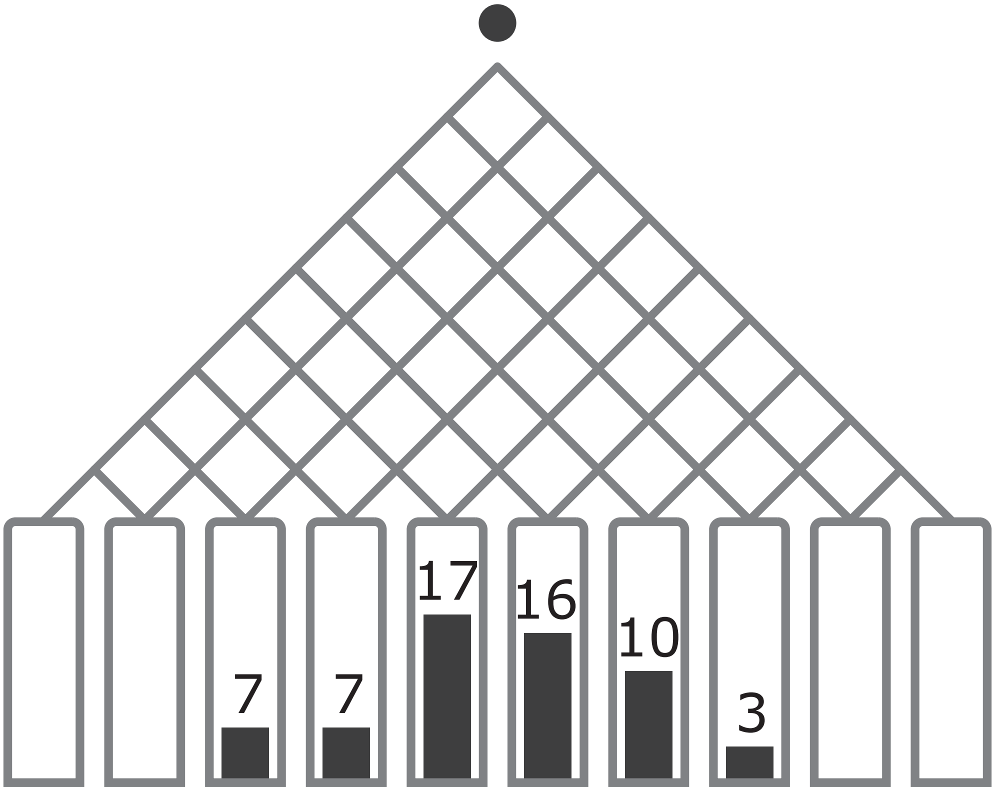
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

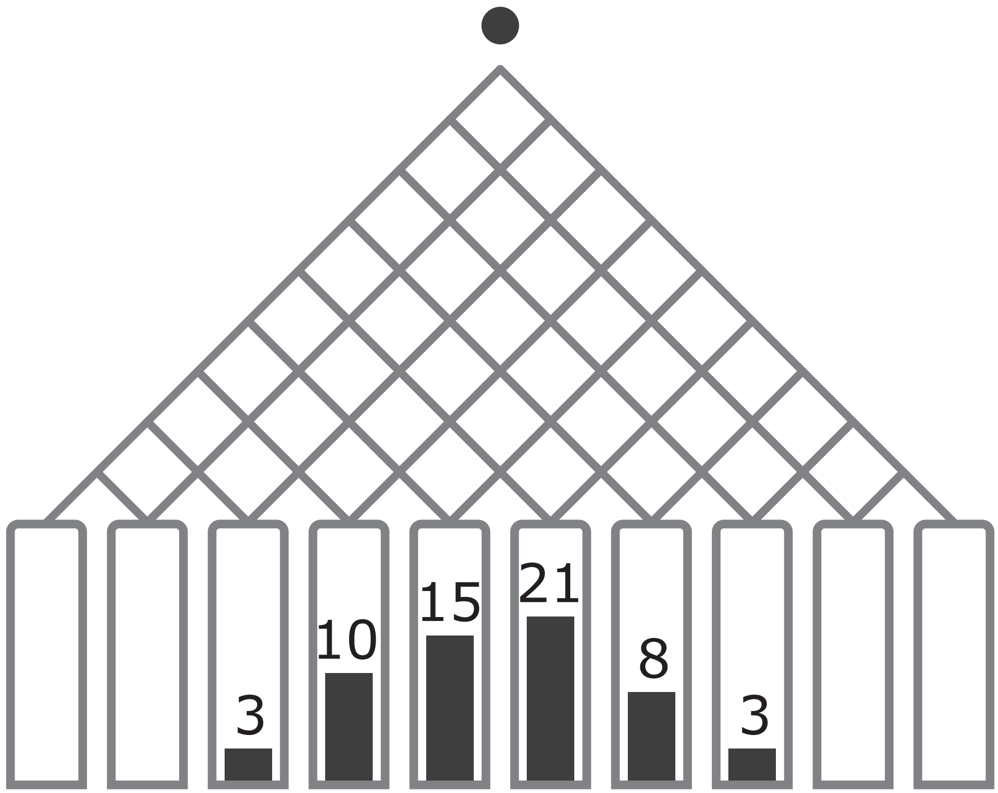
$$= \frac{8}{16} + \frac{5}{16} - \frac{4}{16} = \frac{9}{16}$$

Ejemplo 4

Tres estudiantes construyen una máquina de Galton para ver la distribución de los resultados al lanzar 60 bolitas desde su parte superior. Realizan en tres oportunidades el experimento y representan con barras la distribución obtenida en cada caso.


1
2
4
8
19
17
6
4
1


7
7
17
16
10
3



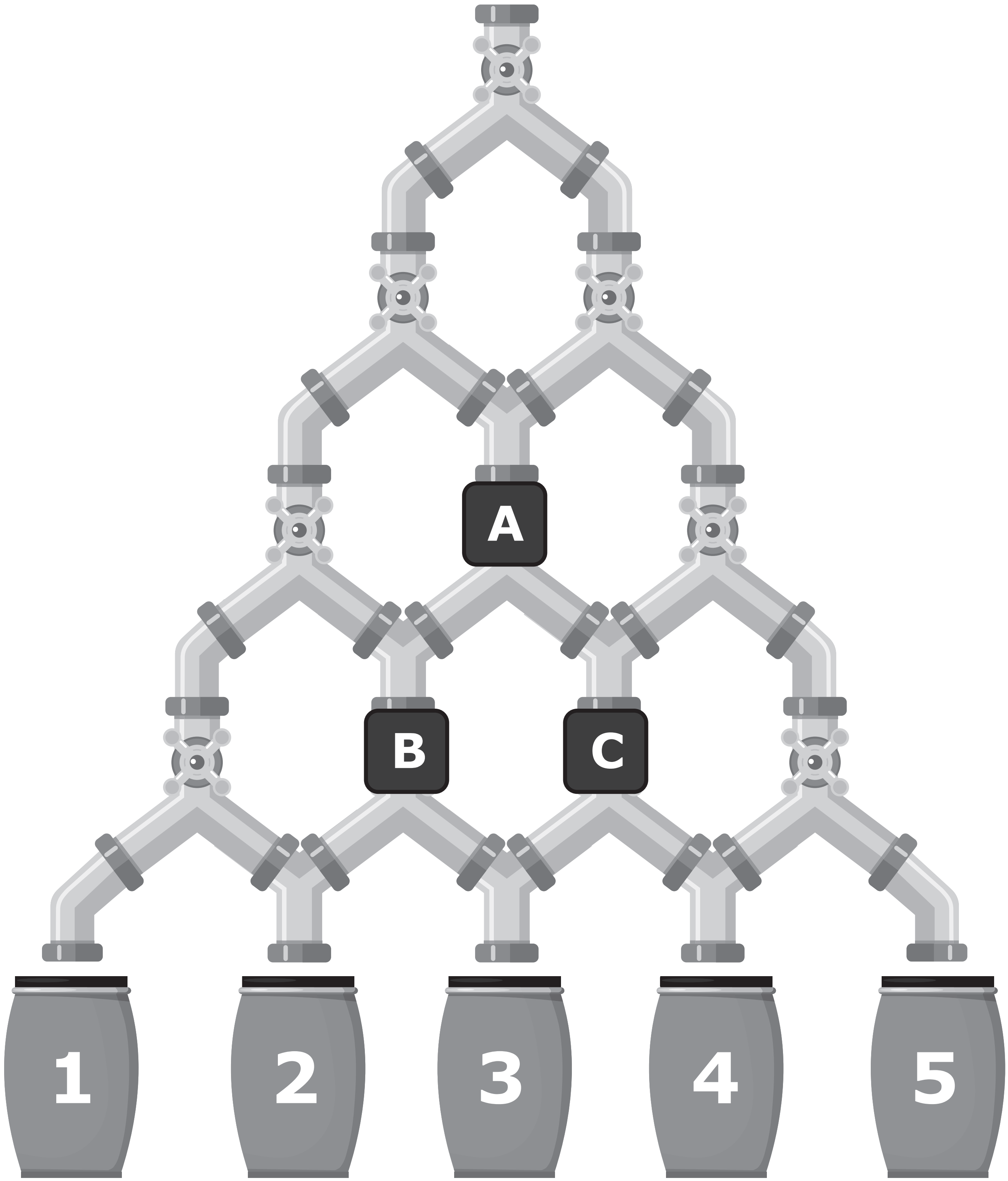
En función de las distribuciones obtenidas se puede afirmar que:

1º Las bolitas, en al menos estos casos, se concentraron en los casilleros centrales, disminuyendo en número hacia los lados.

2º La probabilidad de que una de las bolitas caiga en uno de los extremos es muy baja.

3º Si se traza una línea curva que represente la distribución de los resultados, estas tendrían una forma acampanada.

Ejemplo 5



Al dejar pasar 100 L de agua por las tuberías que se muestran en la imagen, ¿qué recipiente tiene mayor posibilidad de llenarse primero? ¿Cuántos litros de agua se estima recibiría dicho recipiente?

Como la cantidad de agua se divide en dos en cada bifurcación, entonces, en el primer nivel se divide en 50 L por cada cañería.

En el segundo nivel, la división es de 25 L por cada bifurcación, juntándose 50 L en el punto A.

Siguiendo con el mismo razonamiento, en los puntos B y C se juntan (12,5 + 25) = 37,5 L, que en cada caso se dividen en dos, aportando a la salida del recipiente 3 (18,75 + 18,75) = 37,5 L.

Análogamente, se puede calcular que para los recipientes 2 y 4 debieran llegar 25 L a cada uno.

Por último, los recipientes 1 y 5 recibirían 6,25 L.

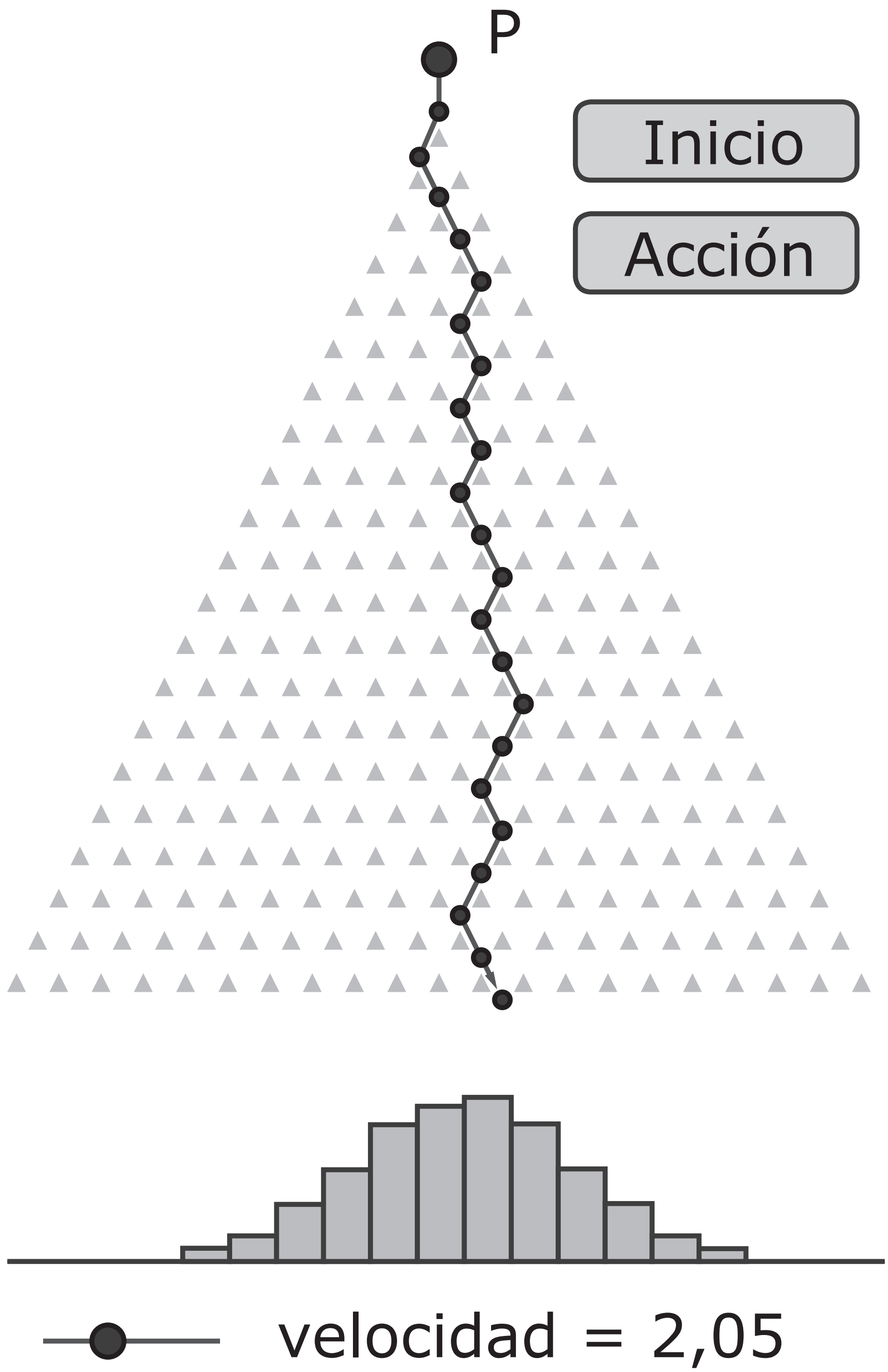
Por lo tanto, el recipiente 3 tiene más posibilidades de llenarse primero, con 37,5 L, aproximadamente.

Actividades en tu cuaderno

1. Entra al link https://tube.geogebra.org/m/10276 y encontrarás una máquina de Galton virtual. Luego, responde.

a. ¿Cuántos caminos posibles puede tomar una bolita? ¿Cómo lo supiste?

Máquina de Galton



x_i	f_i
0	0
1	1
2	1
3	5
4	13
5	82
6	175
7	433
8	691
9	1.041
10	1.179
11	1.220
12	1.045
13	721
14	434
15	181
16	79
16	15
18	15
19	1
20	1
21	0
Total	7.322

b. En esta máquina, ¿en qué casilleros crees que se concentrarán las bolitas que ingresan en la parte superior?

c. Presiona el botón **Inicio** y luego el botón **Acción** para simular 100 lanzamientos de las bolitas.

- Observa la tabla de frecuencias que aparece al costado derecho de la máquina y el gráfico de la parte inferior.

- ¿Se cumplió tu conjetura anterior? Explica y compara tus resultados con los de un compañero(a).

2. Junto con un compañero(a), analicen el siguiente problema conocido como el «Problema de Monty Hall o de las tres puertas».

- Una persona en un concurso debe escoger una de tres puertas. Detrás de dos de ellas no hay nada y, en la otra, un premio.

- El participante escoge una de las puertas al azar; seguidamente, el animador abre una de las puertas que no escogió el participante y en la que no se encuentra el premio.

- El animador le ofrece al participante la posibilidad de cambiar la puerta que escogió inicialmente por la otra que queda sin abrir.

¿Le conviene al participante cambiar la puerta en el sentido de aumentar sus probabilidades de ganar?

a. A partir de su intuición, ¿cuáles serían sus respuestas en esa situación?

b. Construyan un diagrama de árbol para representar la situación del concurso.

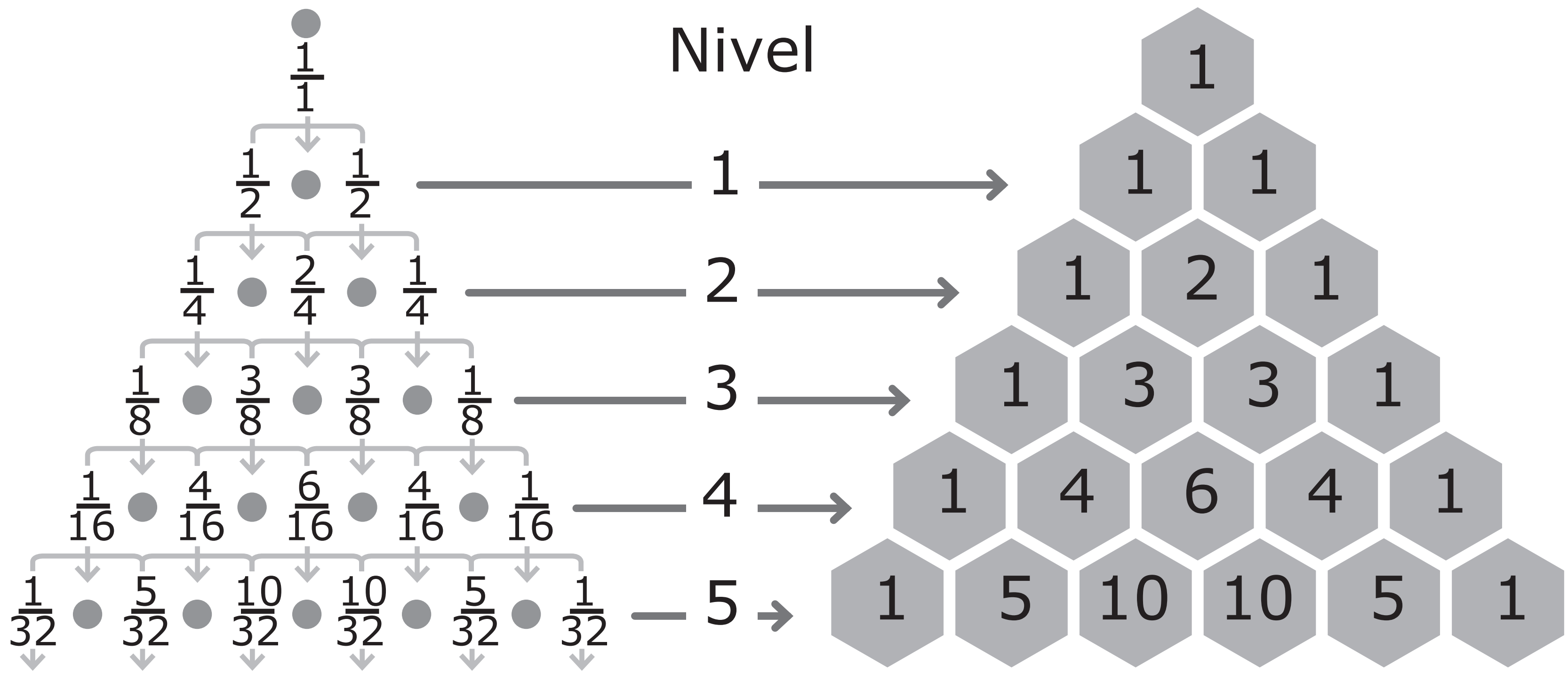
c. ¿Cuáles son todos los casos en los que el participante gana si se cambia de puerta?

d. ¿Cuáles son todos los casos en los que el participante pierde si se cambia de puerta?

e. ¿Qué aconsejarían hacer al participante para aumentar la probabilidad de que gane el premio en el concurso?

3. Actividad de profundización. Analiza la siguiente situación y luego responde.

La relación entre la cantidad de niveles de una máquina de Galton y el total de casos favorables a cada salida se puede observar en el siguiente diagrama de árbol y en los valores del triángulo de la derecha, llamado triángulo de Pascal.



¿Qué características en común tienen las salidas de los extremos en relación con el número de casos favorables que alcanzan?

4. Basados en la actividad anterior, discutan una estrategia que les permita calcular la cantidad de casos favorables utilizando los valores del triángulo de Pascal para siete niveles y respondan:

a. ¿Cuántos casos favorables tienen cada una de las salidas?

b. ¿Cuál es la salida que presenta mayor posibilidad de ser alcanzada por la bolita?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolita llegue a la salida 3?

d. ¿Cuán probable es que logre una salida con un número par?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolita alcance una salida que tenga un número mayor que 3?

f. ¿Cuán probable es que al lanzar tres bolitas las tres alcancen la salida 1?

g. ¿Cuál es la probabilidad de que la bolita logre una salida con un número menor que 4?

h. Si se lanzan dos bolitas, ¿cuál es la probabilidad de que una logre la salida 1 y la otra la última salida?

i. Expliquen, sin calcular, cómo se puede determinar la probabilidad de que, al lanzar dos bolitas, ambas obtengan la misma salida.

Cuaderno de Actividades

Páginas 1751 a 1776

Cierre

- ¿Qué aprendiste al trabajar en esta lección?

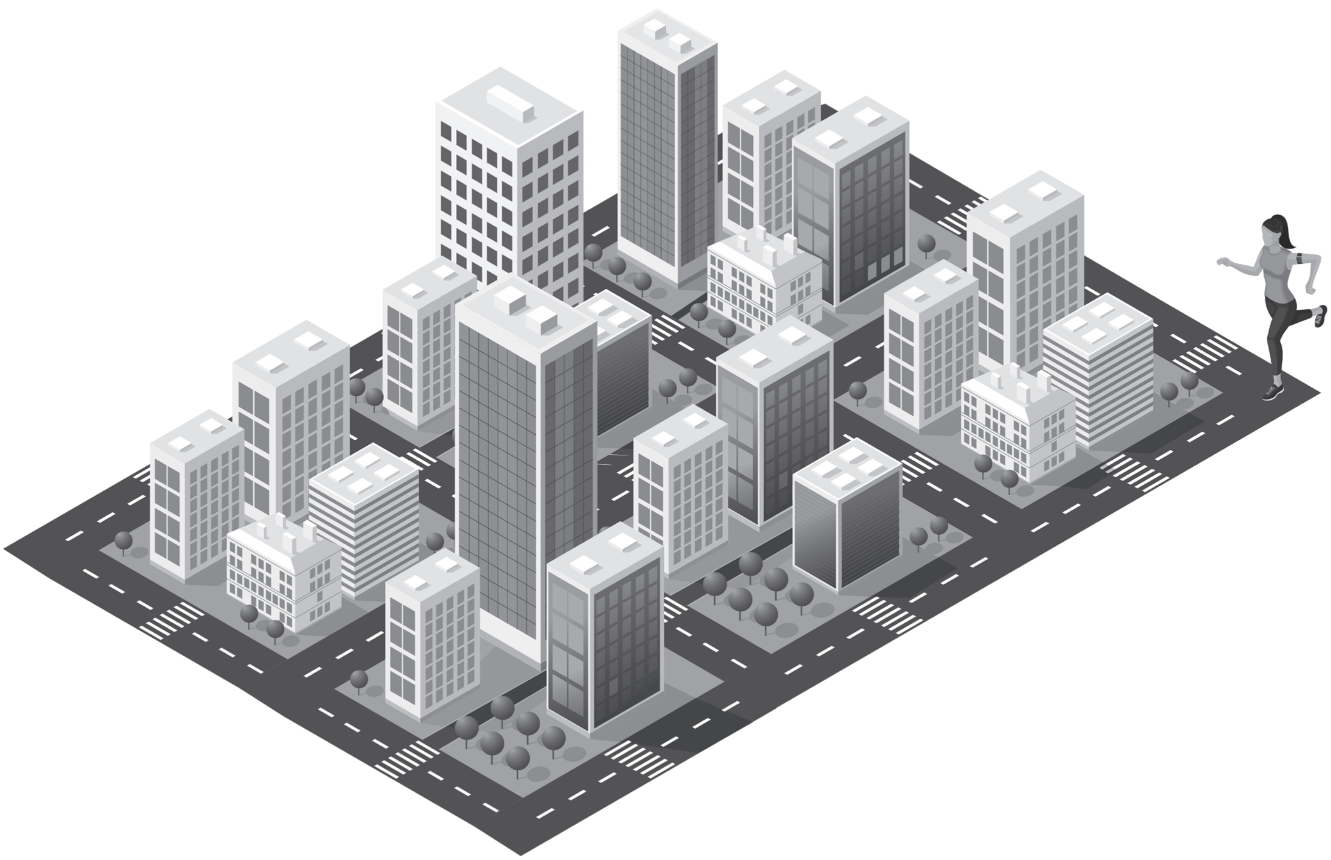
- ¿Consideras útil modelar una situación real con caminos de paseos aleatorios? Justifica tu respuesta.

- ¿Te esforzaste por terminar las actividades a tiempo?

- ¿Eres capaz de reconocer en qué te equivocas cuando no logras los resultados correctos? Explica.

PROBABILIDAD EN PASEOS ALEATORIOS

Susana quiere trotar alrededor de las calles donde vive. Para hacerlo, puede tomar varios caminos, como se muestra en la imagen.



Ella decide que en cada cruce donde debe elegir a qué lado trotará, lo hará al azar usando una moneda honesta, es decir, sin cargar.

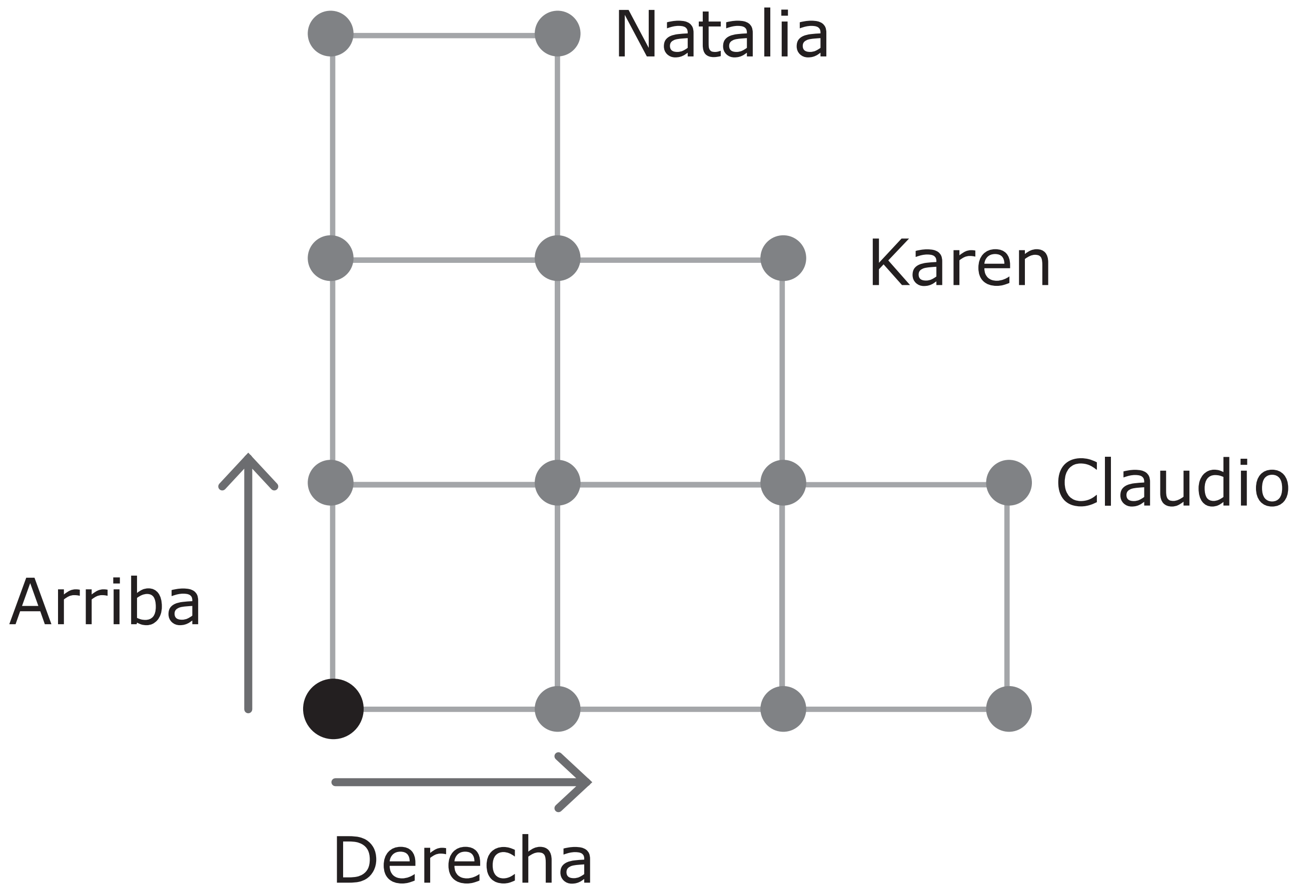
- ¿Se puede considerar que cada camino es evento de un experimento aleatorio? Explica tu respuesta.

- ¿Se podría decir que cada camino tiene la misma probabilidad de ser escogido? Justifica tu respuesta.

- Discute con tus compañeros qué ocurre si al llegar a un cruce la moneda da el mismo resultado cuatro veces seguidas, por ejemplo: cara, cara, cara, cara o sello, sello, sello, sello.

Ejemplo 1

Natalia, Karen y Claudio juegan a mover una ficha en un tablero desde el ●, y cada uno selecciona un punto ganador, como se muestra en la imagen. Los movimientos de la ficha están definidos por el lanzamiento de una moneda. Si el resultado es cara, la ficha avanza hacia la derecha y si es sello avanza hacia arriba.



- ¿Cuáles son los resultados en el lanzamiento de la moneda que permiten que Claudio sea el vencedor?

Respuesta: Los resultados consecutivos al lanzar la moneda y que permiten que Claudio gane son cuatro: C - C - C - S; C - C - S - C, C - S - C - C y S - C - C - C.

Entonces, cualquier resultado que contenga tres caras y un sello le permite ganar.

- ¿Cuáles son los resultados en el lanzamiento de la moneda que permiten que Karen sea la ganadora?

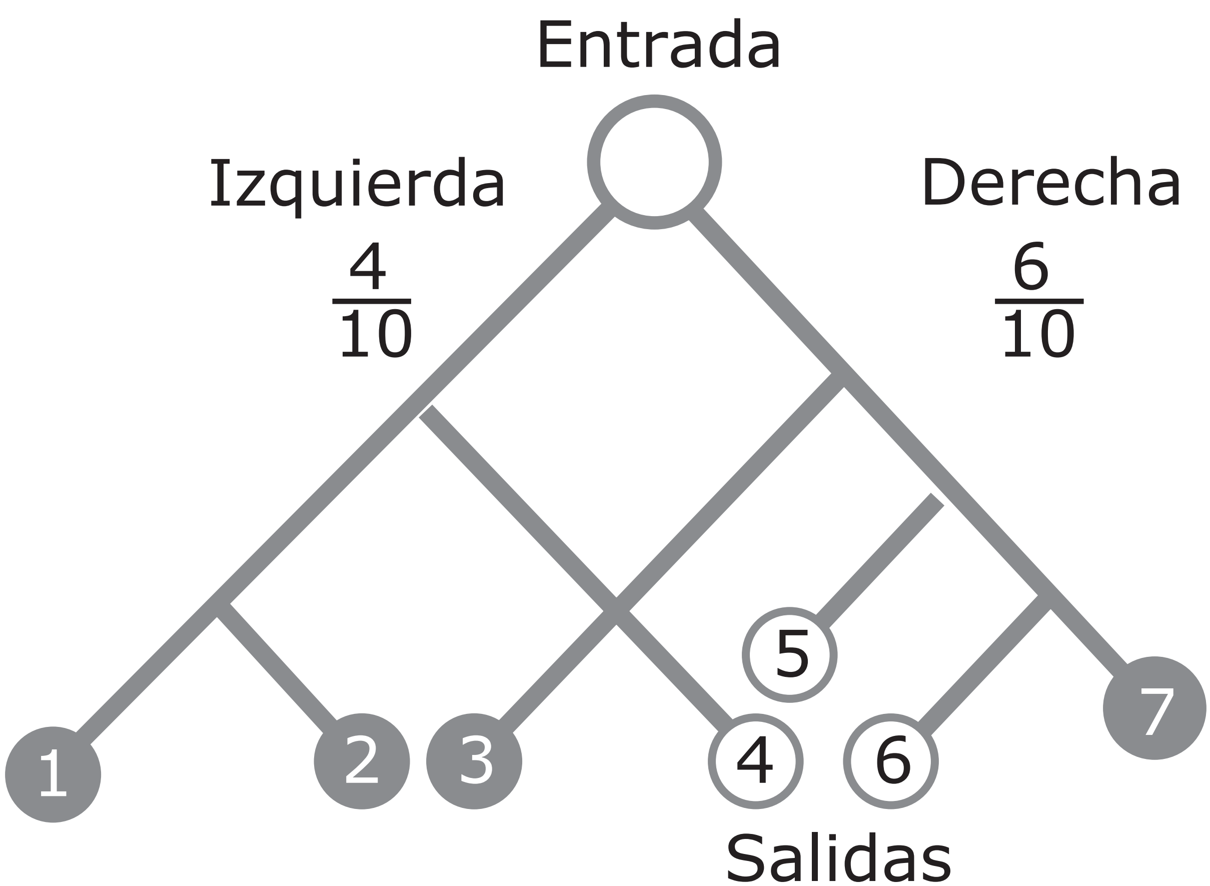
Respuesta: Los resultados consecutivos al lanzar la moneda y que permiten que Karen gane son seis: C - C - S - S; S - S - C - C; C - S - S - C; C - S - C - S; S - C - S - C y S - C - C - S.

Entonces, cualquier resultado que contenga dos caras y dos sellos le permite ganar.

Un **paseo aleatorio** se puede modelar usando probabilidades y un diagrama de árbol, asignando probabilidad de ocurrencia a cada una de las etapas y aplicando las propiedades de las probabilidades estudiadas anteriormente (regla aditiva y multiplicativa).

Ejemplo 2

El diagrama representa un laberinto en el cual, según la experiencia en cada bifurcación, el 40% de las personas optan por ir a la izquierda y un 60% a la derecha. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que ingresa al laberinto logre encontrar la salida?



Observa que hay nueve recorridos posibles para llegar a uno de los siete caminos del laberinto, donde los caminos 4, 5 y 6 son los que tienen salida.

Por otro lado, al considerar los eventos D: ir a la derecha e I: ir a la izquierda, los casos favorables para encontrar la salida son cuatro en total:

- C_1: I - D - D
- C_2: D - I - D
- C_3: D - D - I
- C_4: D - D - D – I

Las siguientes son las probabilidades de que una persona tome cada uno de los caminos indicados:

$$I - D - D \rightarrow P(C_1) = \frac{4}{10} \bullet \frac{6}{10} \bullet \frac{6}{10}$$

$$= \frac{144}{1.000} = \frac{18}{125}$$

$$D - I - D \rightarrow P(C_2) = \frac{6}{10} \bullet \frac{4}{10} \bullet \frac{6}{10}$$

$$= \frac{144}{1.000} = \frac{18}{125}$$

$$D - D - I \rightarrow P(C_3) = \frac{6}{10} \bullet \frac{6}{10} \bullet \frac{4}{10}$$

$$= \frac{144}{1.000} = \frac{18}{125}$$

$$\text{D - D - D - I} \rightarrow P(C_4) = \frac{6}{10} \bullet \frac{6}{10} \bullet \frac{6}{10} \bullet \frac{4}{10}$$

$$= \frac{864}{10.000} = \frac{54}{625}$$

Entonces, la probabilidad de que una persona que ingresa al laberinto logre encontrar la salida es:

$$P(C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4)$$

$$= P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) + P(C_4)$$

$$= \frac{18}{125} + \frac{18}{125} + \frac{18}{125} + \frac{54}{625}$$

$$= \frac{324}{625} = 0{,}5184 \approx 51{,}8\%$$

La probabilidad de que la persona logre llegar a la salida es aproximadamente de un 52%.

¿Si se anula la salida número 5 y se habilita la número 2, se tendría el mismo resultado? Justifica tu respuesta.

Cuando realizas varias veces un mismo experimento aleatorio, la **frecuencia relativa de un evento** se define como la cantidad de resultados a favor del evento elegido, dividido por la cantidad total de veces que se realizó el experimento.

La frecuencia relativa de un evento también es conocida como la **probabilidad empírica**. Esta permite aproximar la probabilidad teórica de cierto evento en situaciones en que no se conoce con exactitud.

Ejemplo 3

En la siguiente tabla se muestra la cantidad de automóviles de cada color que pasaron por una calle durante una hora.

Colores de automóvil	
Color	**Frecuencia absoluta**
Azul	6
Blanco	4
Negro	6
Rojo	6
Verde	8
Total	**30**

¿Cuál es la probabilidad empírica de que pase por la calle un automóvil de color rojo en una hora?

Para obtener la probabilidad pedida, calcula la frecuencia relativa del evento de interés. En este caso, el evento es que pase un automóvil rojo, cuya frecuencia relativa es $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

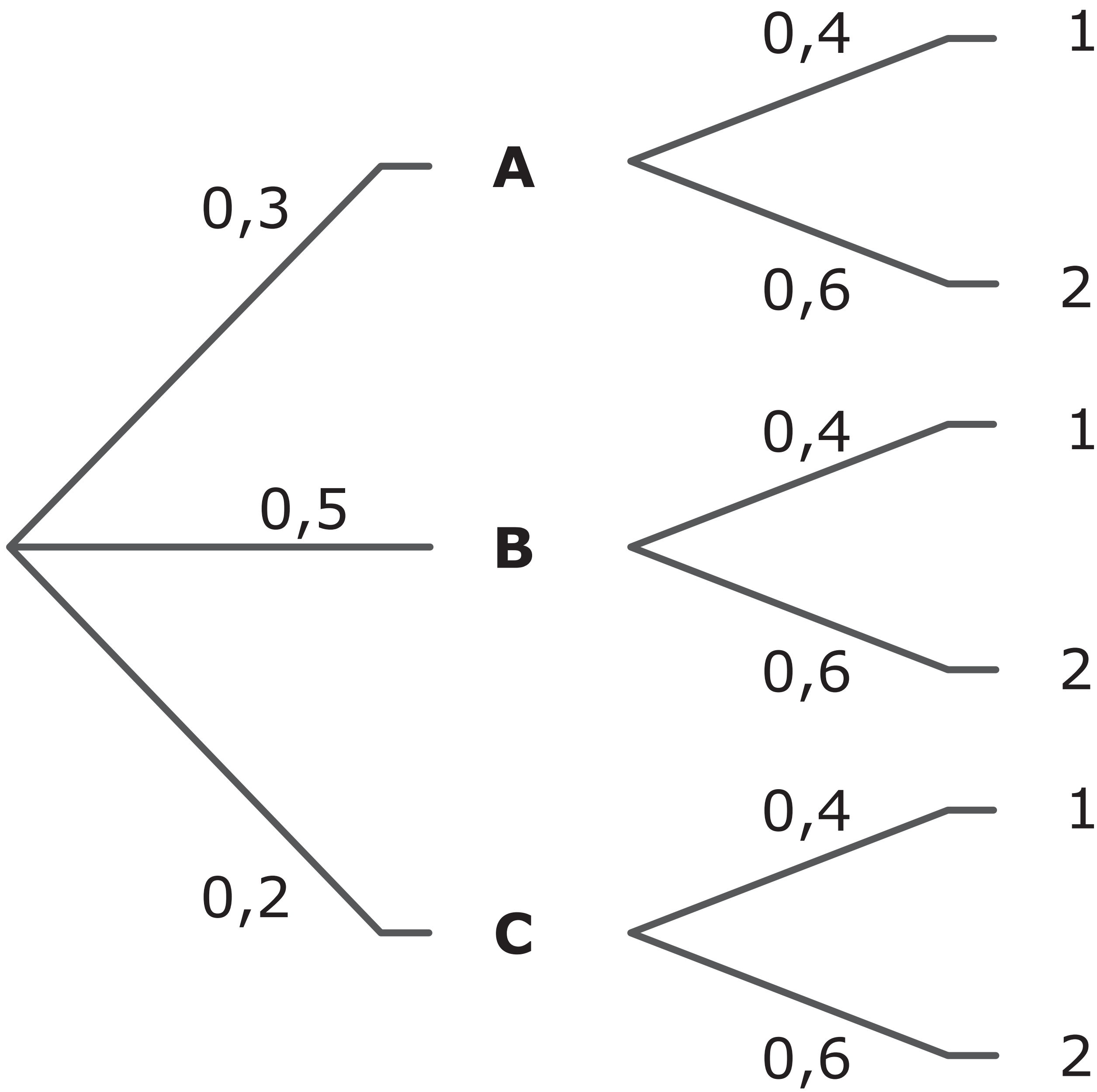
Luego, la probabilidad empírica de que pase un automóvil rojo en una hora es de $\frac{1}{5}$, que es igual a 0,2.

Recuerda que la frecuencia absoluta es la cantidad de veces que se observa un cierto evento, y la frecuencia relativa de un evento corresponde a la frecuencia absoluta dividida por el total observado.

Ejemplo 4

Nicolás va del colegio a su casa y en su trayecto pasa a ver a su abuela. Desde el colegio a la casa de ella tiene tres caminos diferentes y desde allí a su casa tiene dos. El diagrama presenta las probabilidades de los caminos que puede elegir. ¿Cuál es la probabilidad de que Nicolás tome el camino A1 o el C2?

Observa los datos del diagrama en la siguiente página y calcula.



- Como P (A) = 0,3; y P (1) = 0,4.

  Entonces, P (A_1) = 0,3 • 0,4 = 0,12

- Como P (C) = 0,2; y P (2) = 0,6.

  Entonces, P (C_2) = 0,2 • 0,6 = 0,12

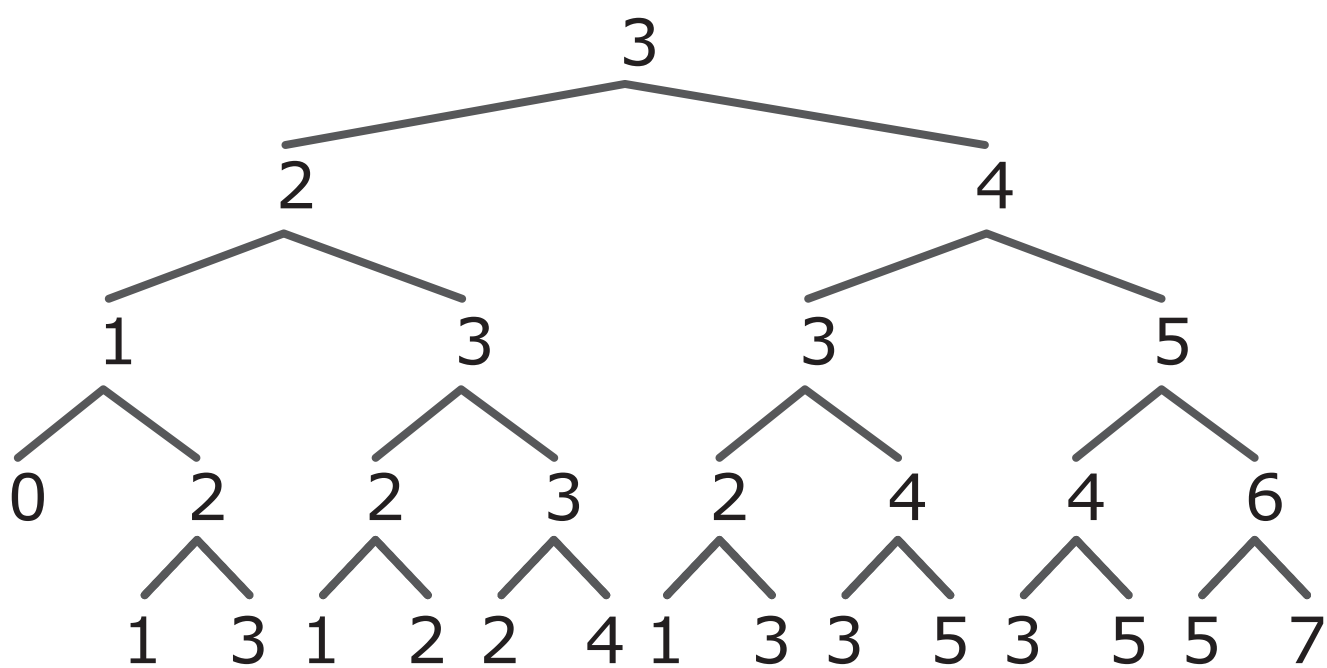
Por lo tanto, la probabilidad de que Nicolás tome el camino A_1 o el camino C_2 es:

$$P(A_1 \cup C_2) = 0{,}12 + 0{,}12 = 0{,}24$$

Sin realizar los cálculos, ¿cuál crees que es el camino más frecuentado por Nicolás?

Ejemplo 5

Mateo está jugando un juego de deportes de 4 etapas, en el cual debe ir eligiendo al competidor que ganará la prueba en cada etapa. Él siempre apuesta que su jugador preferido ganará y sabe que la probabilidad de que lo haga es de 0,5 y la probabilidad de que pierda es de 0,5. Mateo comienza el juego con 3 puntos y piensa apostar 1 punto en cada etapa.



¿Cuál es la probabilidad de que gane al menos 1 punto? ¿Cuál es la probabilidad de que quede con 0 o 1 punto?

Construye un diagrama de árbol para representar el experimento.

Identifica los resultados favorables del evento G: que gane al menos 1 punto. En este caso, corresponden a las ramas con números finales 4, 5 y 7.

Como la probabilidad en cada una de las líneas es de $\frac{1}{2}$, por el principio multiplicativo se tiene que la probabilidad de que quede con 4, 5 o 7 puntos es $\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ en cada caso.

Entonces, la probabilidad de que gane al menos 1 punto es:

$$P\,(G) = (\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16})$$

$$= \frac{5}{16} = 0{,}3125 = 31{,}25\%$$

Para responder la segunda pregunta, identifica los resultados favorables de los eventos:

- A: Mateo queda con 0 puntos.
- B: Mateo queda con 1 punto.

En este caso, corresponden a las ramas con números finales 0 y 1.

Como la probabilidad en cada una de las líneas es de $\frac{1}{2}$, por el principio multiplicativo se tiene que la probabilidad de que quede con 0 puntos es $\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, y la probabilidad de que quede con 1 punto es $\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ en cada caso.

Como la probabilidad de que quede con 0 o 1 puntos ($A \cup B$) está compuesta por eventos disjuntos, se utiliza la propiedad aditiva de la probabilidad:

$$P(A \cup B) = \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right)$$

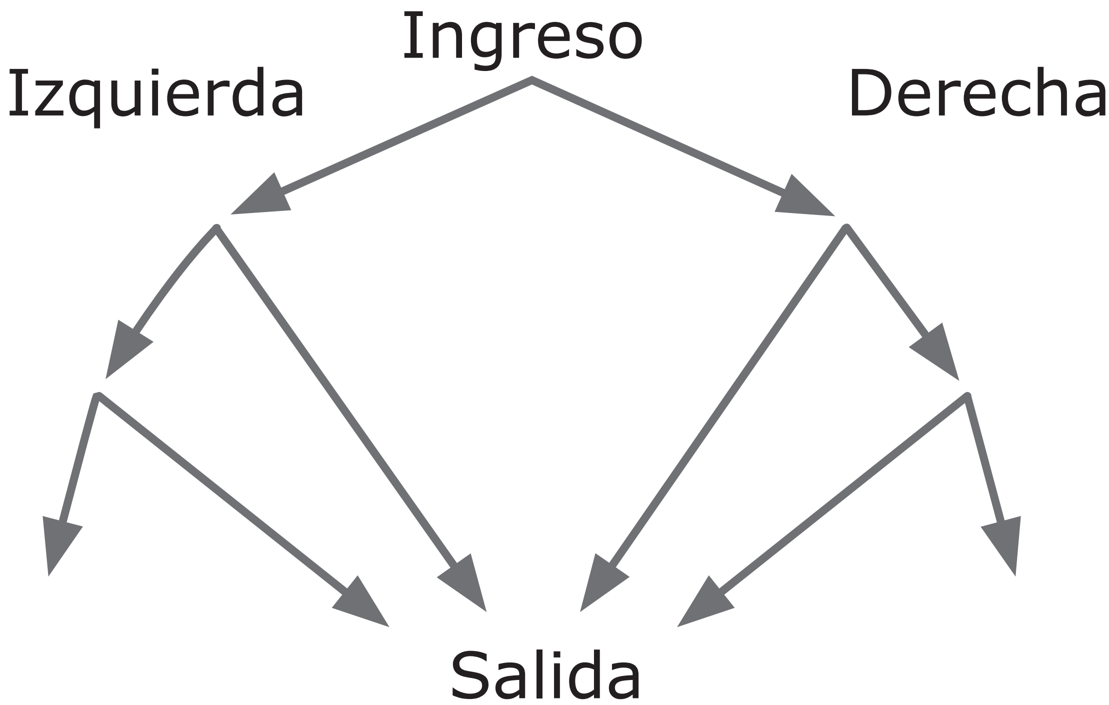
$$= \frac{2}{16} + \frac{3}{16} + \frac{5}{16}$$

$$= 0,3125 = 31,25\ \%.$$

Entonces, la probabilidad de que quede con 0 o 1 punto es de un 31,25%.

Actividades en tu cuaderno

1. Analiza la siguiente situación, y luego responde. Se sabe que en cada bifurcación dos de tres personas que entran a un laberinto van hacia la derecha.



a. ¿Cuál es la probabilidad de que en una bifurcación se tome el camino de la izquierda?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona siempre tome hacia la izquierda?

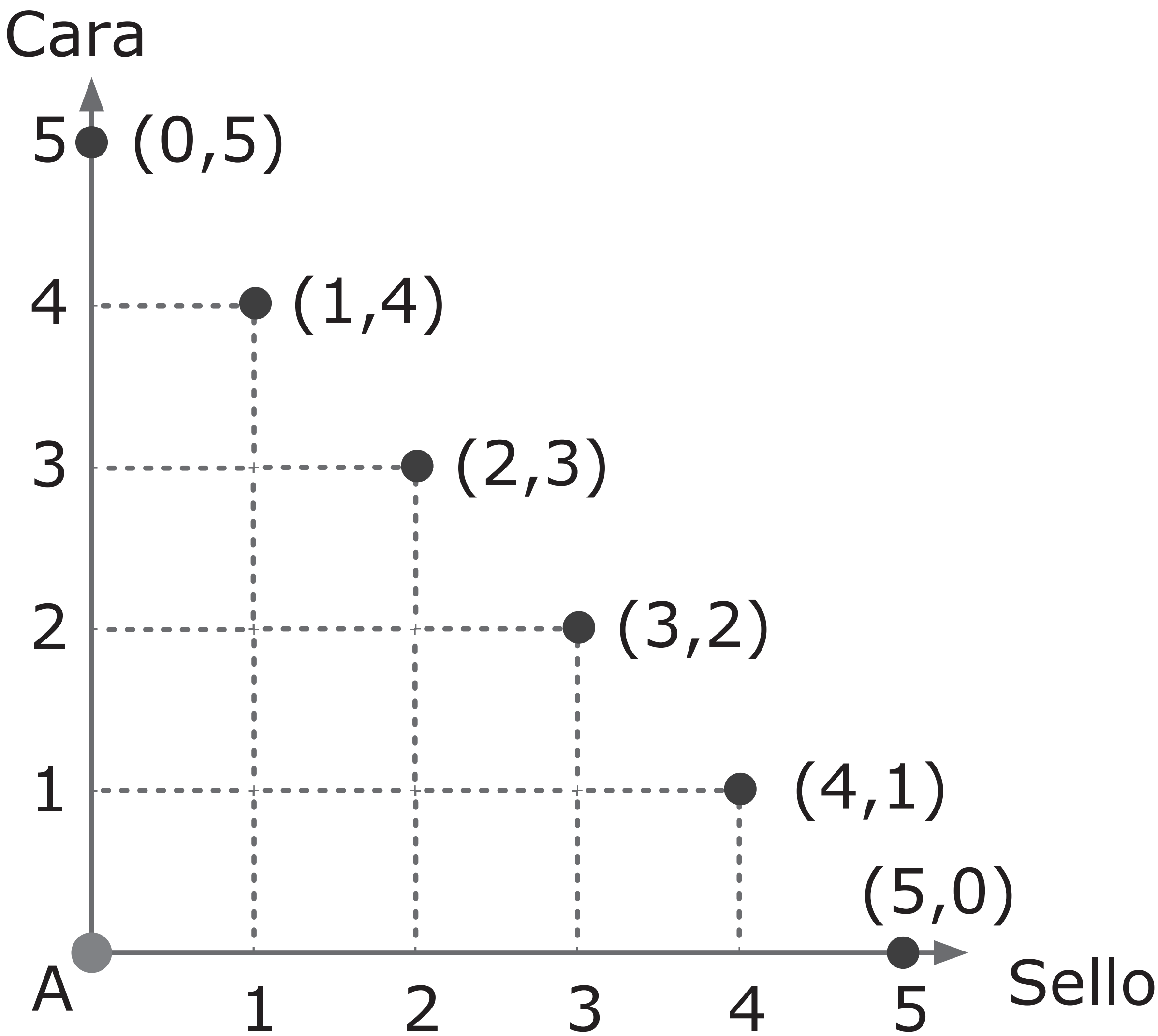
c. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona encuentre la salida?

d. Si dos personas entran al laberinto una después de la otra, ¿cuál es la probabilidad de que ambas encuentren la salida?

e. Si dos personas entran al laberinto una después de la otra, ¿cuál es la probabilidad de que una encuentre la salida y la otra no?

2. Junto con un compañero(a), realicen el experimento de lanzar cinco veces una moneda y anoten los resultados.

Según lo obtenido, tracen el camino por el cual se desplaza el punto A. Si sale cara, el punto A se mueve una unidad a la derecha, y si sale sello, se mueve hacia arriba. ¿A qué punto llegaron?



3. Analicen la siguiente situación hipotética basada en la actividad 2, y luego respondan.

a. Si al lanzar la moneda cinco veces los resultados son C - S - C - S - S, ¿qué par ordenado del plano cartesiano alcanza el punto A?

b. ¿A qué puntos llegan los caminos que resultan de las siguientes secuencias de resultados: S - S - C - C - C y C - C - S - C - S? ¿Qué otros resultados pueden llegar al mismo punto?

c. Generen una conclusión a partir de los resultados de la pregunta anterior.

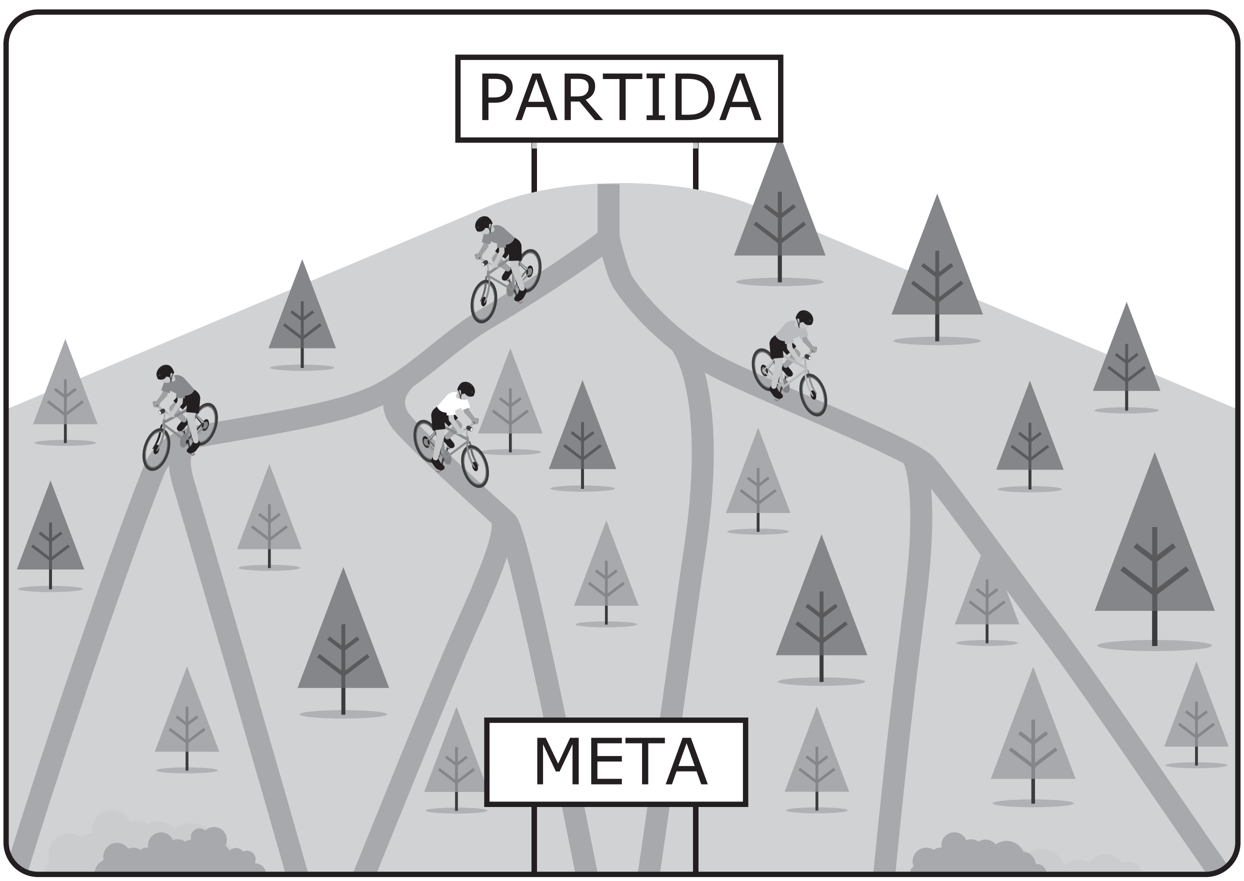
d. ¿Cuántos caminos diferentes permiten alcanzar el par ordenado (3, 2)?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que el camino trazado alcance el punto (1, 4)?

f. Establezcan una estrategia que permita calcular la probabilidad de que al realizar el experimento, el camino trazado alcance el punto (4, 1) o el punto (3,2).

4. Deporte. Resuelve el siguiente problema y responde.

De la cima de un cerro bajan 64 competidores de mountain-bike, los cuales pueden seguir varios senderos según sus preferencias, pero no todos llegan a la meta, como se muestra en la imagen.



Si se sabe que en cada bifurcación un cuarto de los competidores decide ir a su izquierda y tres cuartos deciden ir a su derecha, calcula:

a. ¿Cuántas personas probablemente llegarán a la meta?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un competidor no llegue a la meta?

Cuaderno de Actividades

Páginas 1777 a 1806

Cierre

- ¿Qué conceptos aprendiste en esta lección?

- ¿Crees que alguna de las actividades te permitió desarrollar tu ingenio? ¿Cuál y de qué manera?

- Respecto al trabajo en grupo, ¿sientes que lograste expresar tus ideas con claridad? ¿Qué mejorarías en el trabajo grupal?

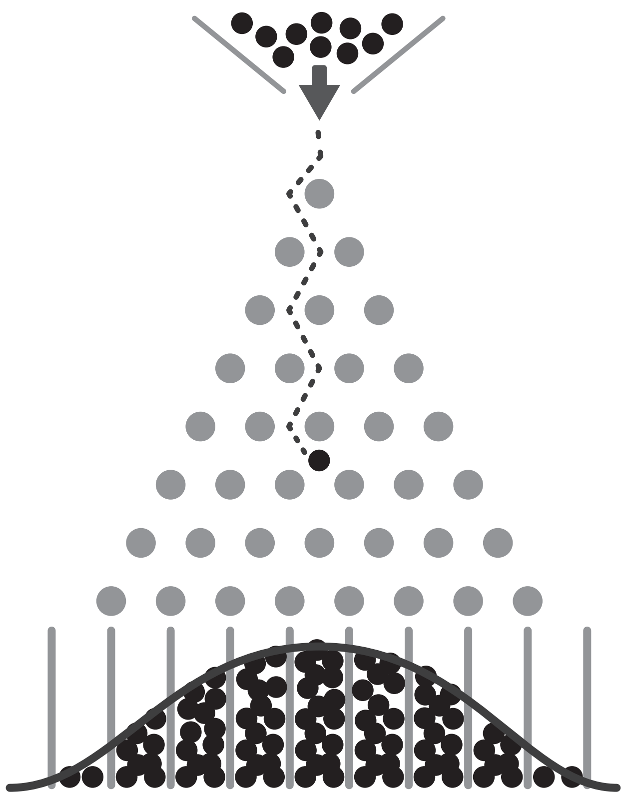
Síntesis

En las páginas tratadas anteriormente has estudiado:

► **Tabla de Galton y paseos aleatorios**

- La **tabla de Galton** permite reconocer el comportamiento de una distribución normal de un experimento aleatorio. Esta distribución presenta una peculiar forma acampanada, muchas bolitas en el centro y muy pocas en los extremos.

- Un **paseo aleatorio** es una caminata o un recorrido en el cual en cada paso o etapa se tienen varias opciones para continuar, pero no se tiene certeza de cuál se tomará.



► Probabilidad en paseos aleatorios

La **probabilidad en paseos aleatorios** se calcula usando las reglas y propiedades de la unión e intersección de eventos:

- Regla aditiva de la probabilidad.
- Regla multiplicativa de la probabilidad.

Responde:

¿Cómo pueden los paseos aleatorios ayudar a determinar la mejor ruta de múltiples opciones? ¿Puede esto servir para definir la mejor jugada en una estrategia deportiva? Explica.

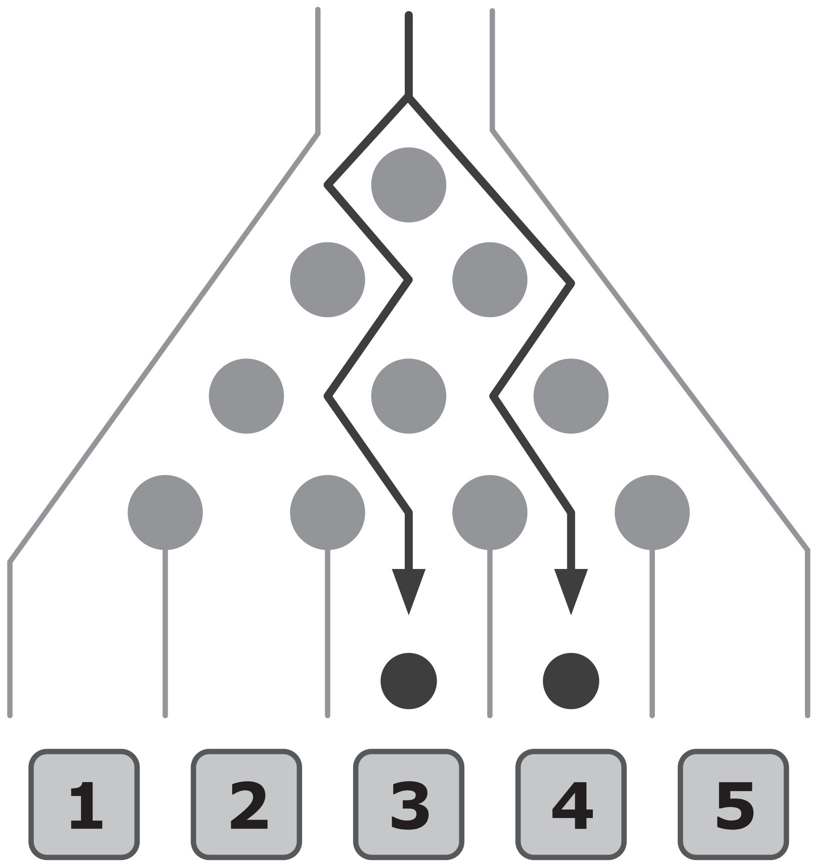
¿Cómo vas?

Evaluación Lección 12

Desarrolla las siguientes actividades en tu cuaderno.

1. **Analiza** las situaciones planteadas, y luego responde.

   a. Se realiza el experimento aleatorio de lanzar dos bolitas, una después de la otra, en una máquina de Galton, como la que se muestra en la imagen.



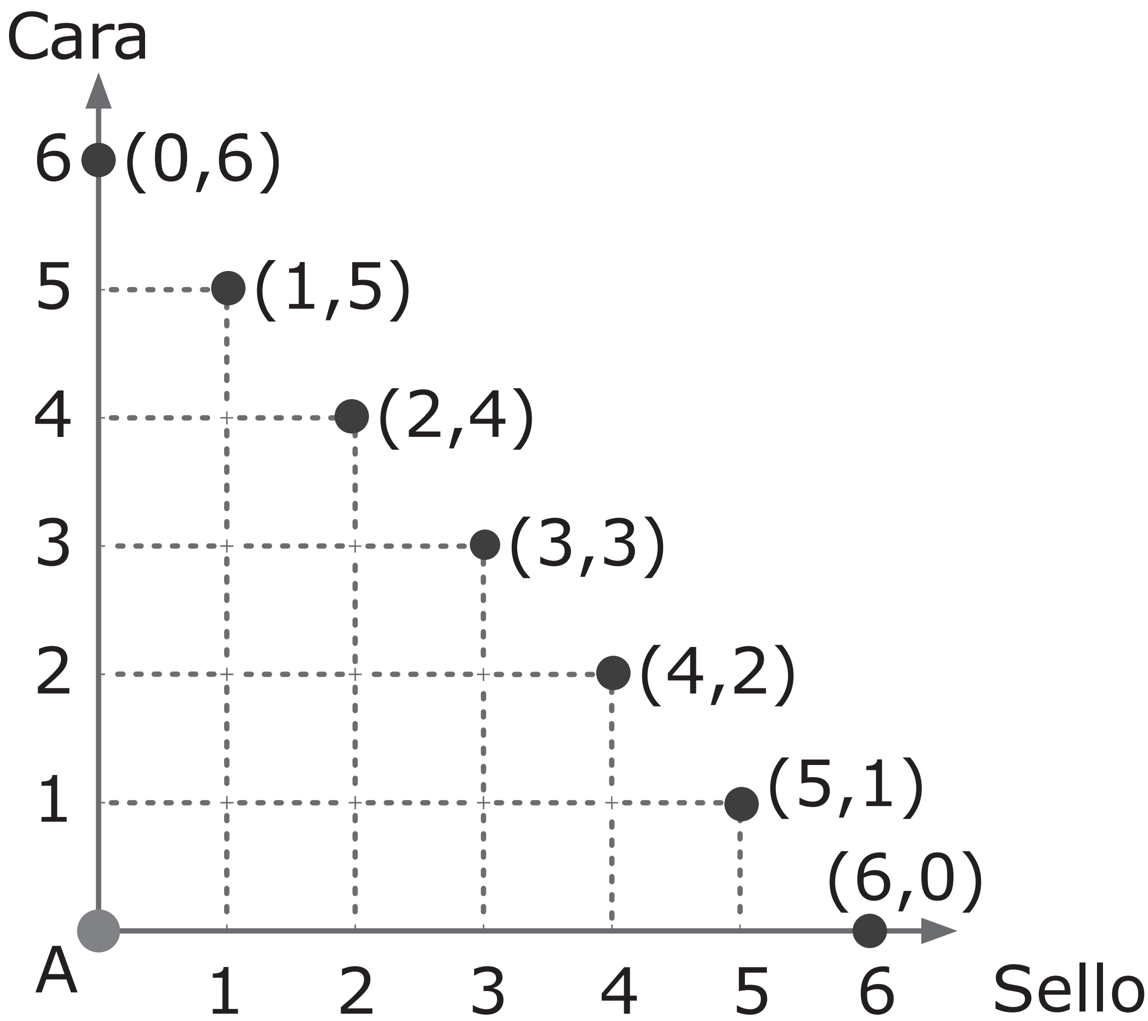
- ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolitas tomen el mismo camino señalado que lleva a la salida 3?

- ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolitas tomen el mismo camino señalado que lleva a la salida 4?

- ¿Cuál es la probabilidad de que una bolita tome el camino que lleva a la salida 3 y la otra el camino que lleva a la salida 4?

- ¿Cuál de las tres opciones anteriores tiene mayor probabilidad de ocurrir?

b. Se pone una ficha roja en el punto (0, 0) de un plano cartesiano. Si se lanza una moneda y sale cara, la ficha se moverá un espacio hacia arriba, de lo contrario se moverá hacia la derecha.



- ¿Cuántos caminos diferentes llevan la ficha al punto (1, 5)?

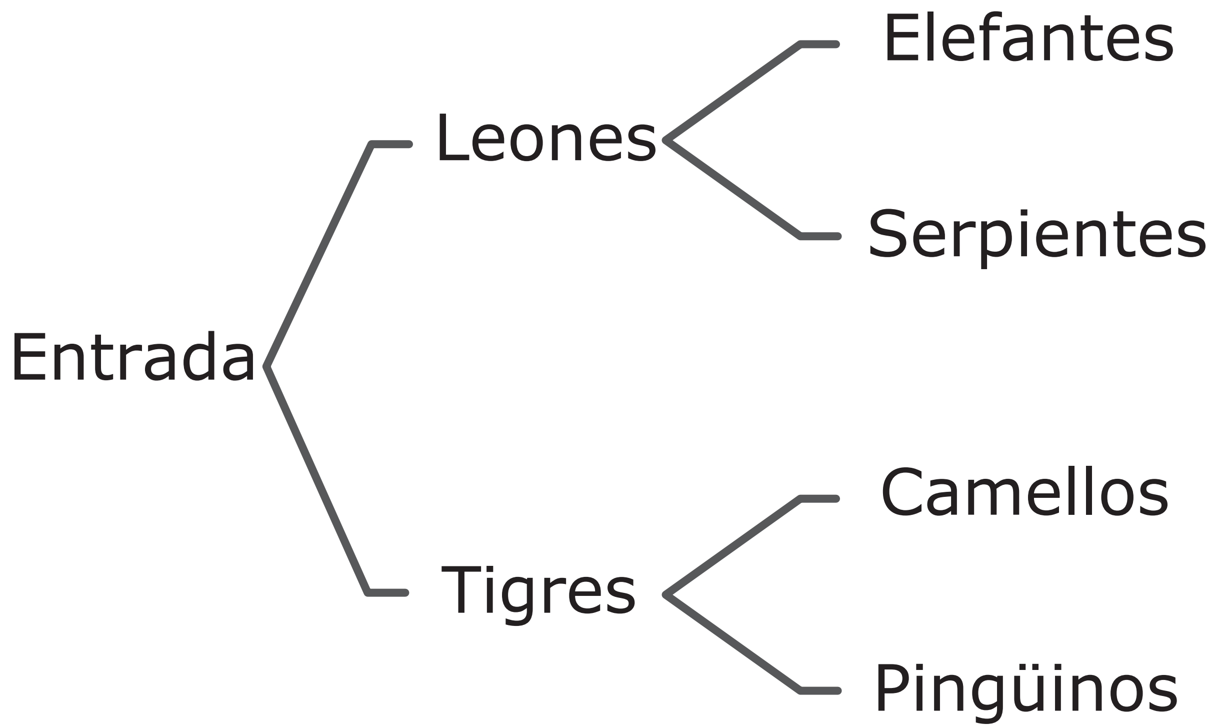
- ¿Cuántos caminos diferentes llevan la ficha al punto (3, 3)?

- ¿Cuál es la probabilidad de que la ficha llegue al punto (5, 1)?

- ¿Cuál de las tres opciones tiene mayor probabilidad de ocurrir?

2. Resuelve el siguiente problema y responde.

Isidora va a ingresar al zoológico y elegirá al azar qué animales visitará primero. Los caminos propuestos se presentan en el siguiente diagrama de árbol. Para definir por dónde ir, en cada bifurcación ella lanza una moneda al aire: si sale cara, se dirige al lado derecho y si sale sello, al lado izquierdo.



a. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los dos animales que visite primero sea un tigre?

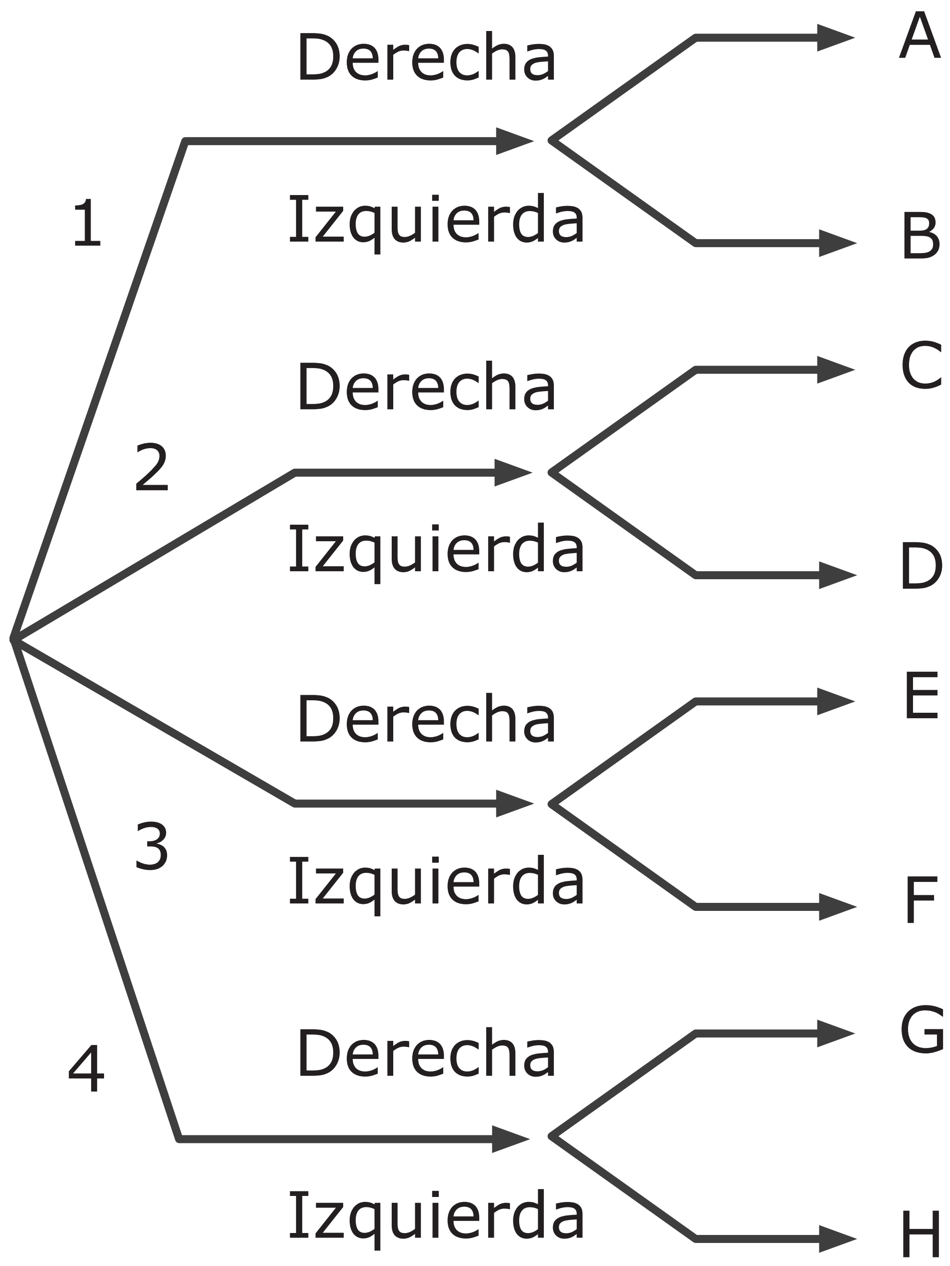
b. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos primeros animales que visite sean los leones y las serpientes?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos primeros animales que visite sean los tigres y los pingüinos?

d. ¿Cuán probable es que los dos primeros animales sean cuadrúpedos?

3. Evalúen el siguiente planteamiento y respondan.

Al ingresar a un laberinto, una persona se encuentra con cuatro caminos. Al optar por cualquiera de ellos, se encontrará con una bifurcación, como se muestra en el diagrama.



a. En un papel escriban los números 1, 2, 3 y 4 y recórtenlos.

b. Determinen el camino que seguirán sacando al azar uno de los papeles y observando el número obtenido.

c. En cada bifurcación lancen una moneda para determinar si el camino que se tomará será el de la derecha si sale cara o el de la izquierda si sale sello.

d. Calculen la probabilidad empírica para 100 ingresos al laberinto. Para ello, deben calcular el porcentaje de cada tramo.

e. A partir de la probabilidad calculada, si una persona ingresa al laberinto, ¿cuál es la probabilidad que esta llegue a la salida A o a la B?

f. Calculen, en relación con lo obtenido en la pregunta anterior, la probabilidad de que al ingresar una persona al laberinto llegue a una salida cuya letra sea una vocal.

Cuaderno de Actividades

Páginas 1807 a 1814

¿Qué aprendiste?

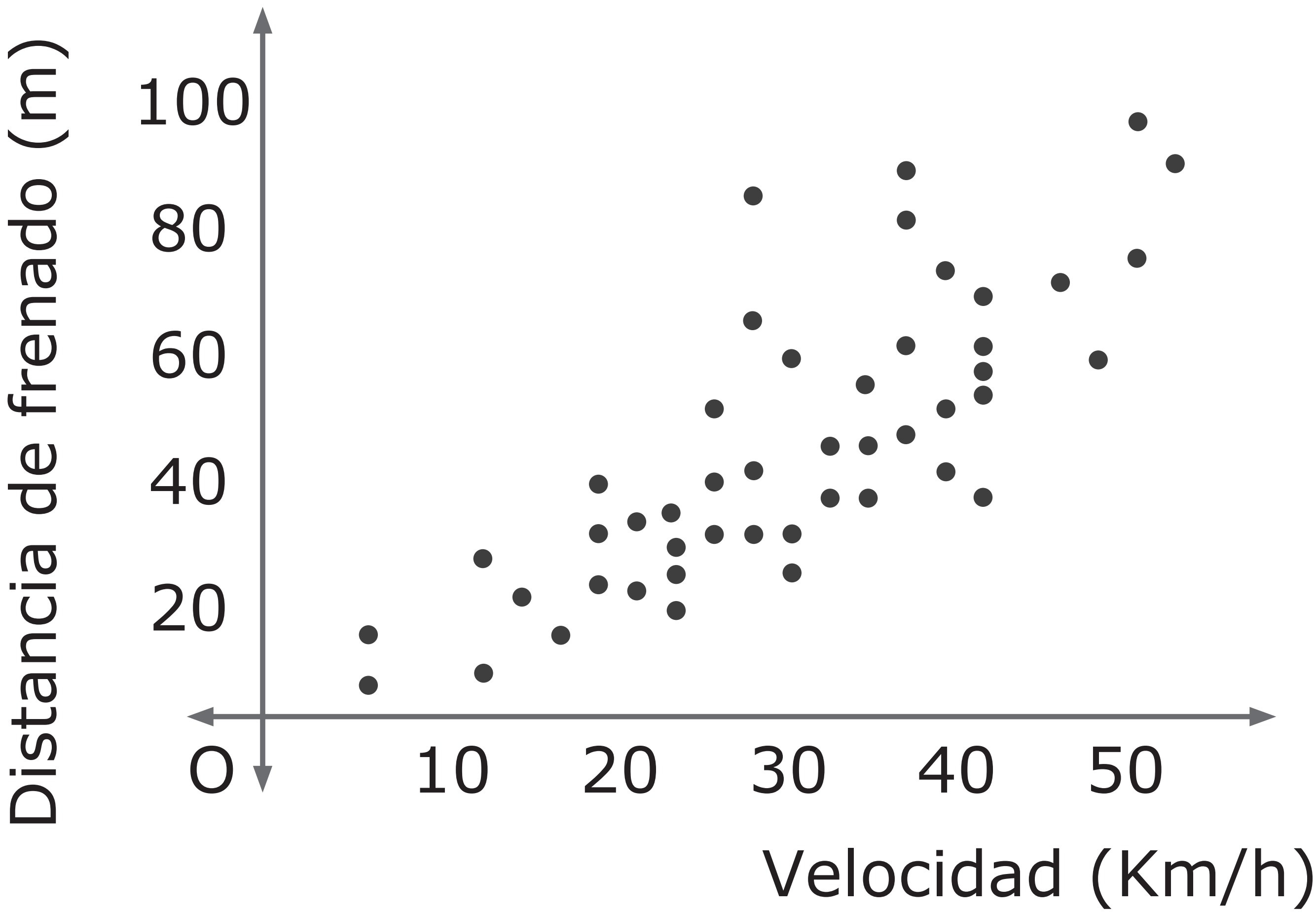
Evaluación Unidad 4

Desarrolla las siguientes actividades en tu cuaderno.

1. Analiza la siguiente situación. Luego, realiza lo solicitado.

El gráfico representa un estudio realizado sobre un móvil que relaciona las variables velocidad alcanzada y distancia de frenado.

Distancia de frenado de un móvil



a. ¿Qué tipo de correlación presentan dichas variables?

b. Al dibujar la recta de correlación, ¿qué tipo de pendiente presenta?

950

c. Según los datos, predice la distancia de frenado que tendría un móvil que lleva una velocidad de 80 km/h. Justifica.

d. Plantea una metodología que pudiera haber permitido obtener los datos del gráfico.

2. **Aplica** las propiedades de las probabilidades para resolver los siguientes problemas.

a. Se lanzan dos dados y se observan los puntajes de las caras que quedan hacia arriba. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea cinco o mayor que tres?

b. En una caja hay 10 botellas, tres de ellas defectuosas. Si se eligen dos botellas de la caja, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean defectuosas?

c. La probabilidad de que un día cualquiera Mariela coma papas fritas es de un 20% y la probabilidad de que tome un jugo es de un 40%. Si la probabilidad de que coma papas fritas o tome un jugo es de un 30%, ¿cuál es la probabilidad de que hoy coma papas fritas y tome un jugo?

d. Si se lanzan cuatro monedas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos en dos de ellas el lado que queda hacia arriba sea cara?

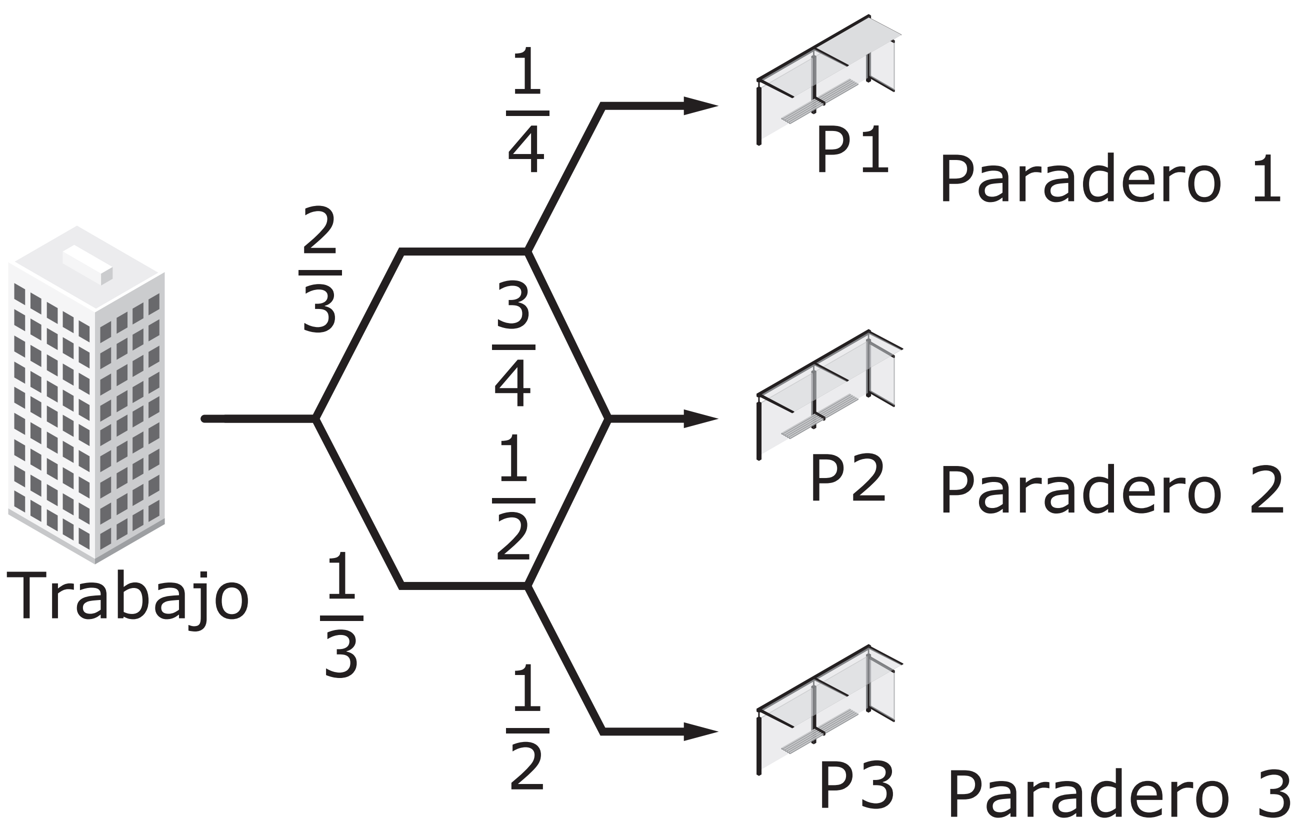
e. Se lanza una bolita por una máquina de Galton de cuatro niveles.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la bolita siempre vaya hacia la derecha?

- ¿Cuál es la probabilidad de que la bolita salga por uno de los extremos?

4. Resuelve el siguiente problema, y luego responde.

Un grupo de personas al salir de su trabajo se dirigen todos los días a tres paraderos diferentes, P1, P2 y P3, para regresar a sus casas. Para ello, usan diferentes rutas cuyas frecuencias relativas se muestran en el siguiente diagrama.



Al seleccionar a un trabajador al azar:

a. Explica una estrategia que permita calcular la probabilidad de que el trabajador se dirija al paradero P2.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el trabajador se dirija al paradero P1?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el trabajador no se dirija al paradero P1?

d. ¿Cuál es la probabilidad que el trabajador se dirija al paradero P2 o al P3?

e. ¿Hay algún paradero que tenga mayor probabilidad de ser elegido por los trabajadores?

Cuaderno de Actividades

Páginas 1815 a 1825

Cierre

- ¿Crees que es importante compartir y comparar los resultados con tus compañeros?, ¿por qué?

- ¿Piensas que los argumentos que realizas para fundamentar tus afirmaciones son entendidas por tus compañeros? Explica.

- ¿Cómo evaluarías tu desempeño a lo largo de la unidad? ¿Qué aspectos mejorarías?

SINTESIS

UNIDAD 1 - CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Lección 1 – Operatoria en los números racionales

- ¿Cómo resuelves operaciones con números racionales?

  Sean a, b, c, d $\in$ Z, con b $\neq$ 0, c $\neq$ 0 y d $\neq$ 0.

Adición

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \bullet d + b \bullet c}{b \bullet d}$$

Sustracción

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \bullet d - b \bullet c}{b \bullet d}$$

Multiplicación

$$\frac{a}{b} \bullet \frac{c}{d} = \frac{a \bullet c}{b \bullet d}$$

División

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \bullet d}{b \bullet c}$$

Lección 2 - Potencias

- ¿Cuáles son las propiedades de las potencias?

  $(\frac{a}{b})^0 = 1, \frac{a}{b} \in Q - \{0\}$

  $a^{-n} = \frac{a}{a^n}, a \in Z - \{0\}, n \in N$

  $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n , \frac{a}{b} \in Q - \{0\}, n \in N$

- ¿Cómo identificas un crecimiento o decrecimiento exponencial?

  Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q - \{0\}, n, m \in Z$

Multiplicación

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \bullet \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \bullet \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} \bullet \frac{c}{d}\right)^n$$

División

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n$$

Potencia de una potencia

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \bullet m}$$

- ¿Qué propiedades puedes aplicar para resolver operaciones con potencias?

Sea la potencia a n, con $a \in Z - \{0\}$ y $n \in N$.

Crecimiento exponencial

$a > 1 \rightarrow$ A medida que aumenta el valor de n, también aumenta el valor de a^n.

Decrecimiento exponencial

$0 < a < 1 \rightarrow$ A medida que aumenta el valor de n, disminuye el valor de a^n.

Lección 3 – Productos notables

- ¿Qué expresiones puedes utilizar para desarrollar productos notables?

Cuadrado de binomio

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Suma por su diferencia

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Producto de binomios con un término en común

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Lección 4 - Área de la superficie y volumen del cono

- ¿Qué fórmulas puedes utilizar para calcular el área y el volumen del cono?

Área de la superficie del cono

$$A_{total} = A_{basal} + A_{lateral}$$
$$= \pi r^2 + \pi rg$$
$$= \pi r(r + g)$$

Volumen del cono

$$V_{cono} = \bullet \pi r^2 h$$

Lección 5 – Sistema de ecuaciones lineales

- ¿Cómo puedes resolver un sistema de ecuaciones?

Método: igualdad

- Paso 1. Despejar la misma incógnita en las ecuaciones.

- Paso 2. Igualar las expresiones y resolver.

- Paso 3. Reemplazar el valor de la incógnita, obtenido en el paso anterior, en una de las ecuaciones del sistema y resolver.

- Paso 4. Verificar y escribir la solución.

Método: Sustitución

- Paso 1. Despejar una de las incógnitas en una ecuación.

- Paso 2. Reemplazar la expresión anterior en la otra ecuación y resolver.

- Paso 3. Reemplazar el valor de la incógnita, obtenido en el paso anterior, en una de las ecuaciones del sistema y resolver.

- Paso 4. Verificar y escribir la solución.

Método: Reducción

- Paso 1. Multiplicar una o ambas ecuaciones para que los coeficientes de una de las incógnitas sean inversos aditivos.

- Paso 2. Sumar los términos semejantes de las ecuaciones y resolver.

- Paso 3. Reemplazar el valor de la incógnita, obtenido en el paso anterior, en una de las ecuaciones del sistema y resolver.

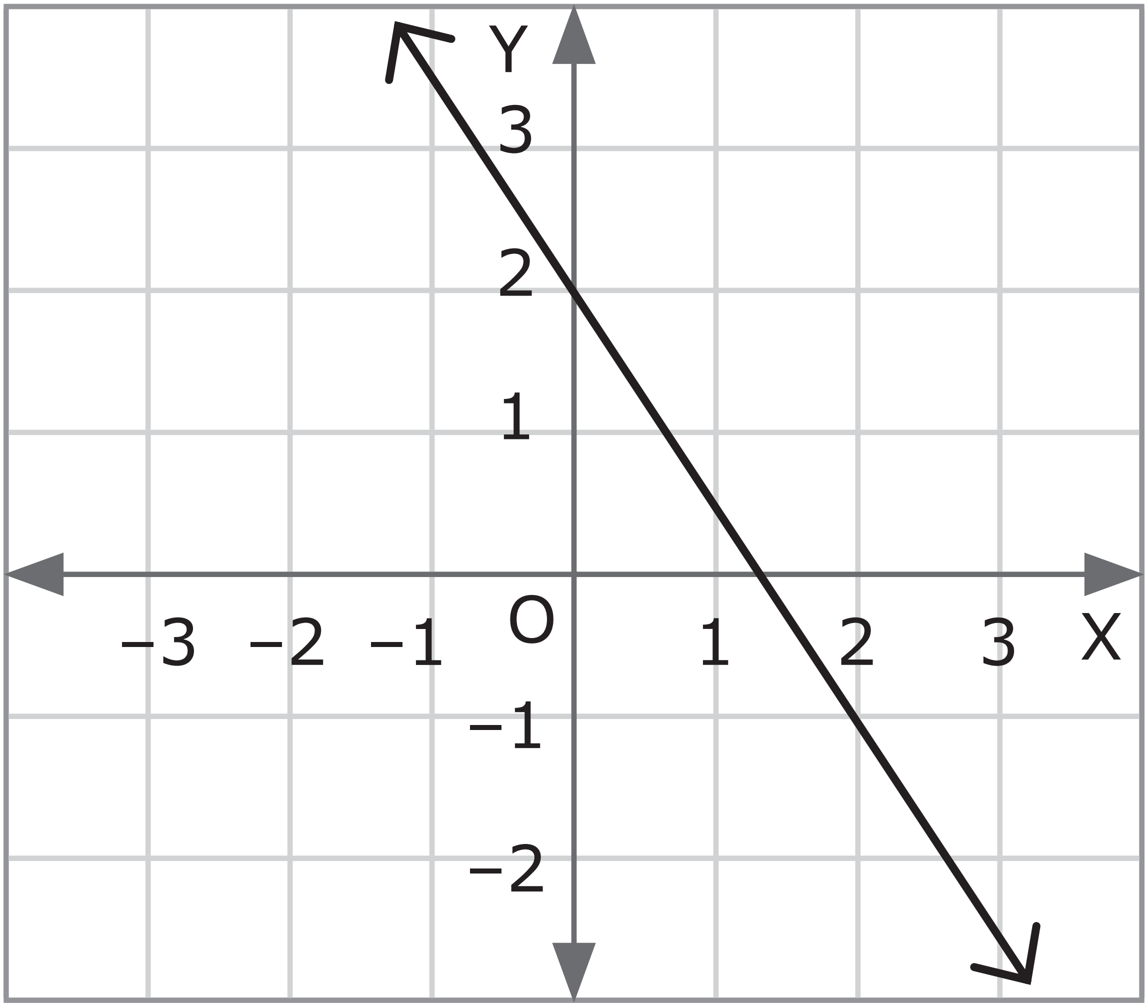
- Paso 4. Verificar y escribir la solución.

Lección 6 - Relaciones lineales en dos variables

- ¿Cuáles son las relaciones lineales en dos variables?
- De la forma $f(x, y) = ax + by$, con $a, b \in Q$.
- Se relaciona con una ecuación de la forma $ax + by = c$, con $a, b, c \in Q$, y se presenta con una recta en el plano cartesiano.
- En $ax + by = c$, con $a, b, c \in Q - \{0\}$, se tiene que:

$-\dfrac{a}{b} \rightarrow$ Pendiente de la recta.

$\frac{c}{d} \rightarrow$ Coeficiente de posición de la recta.

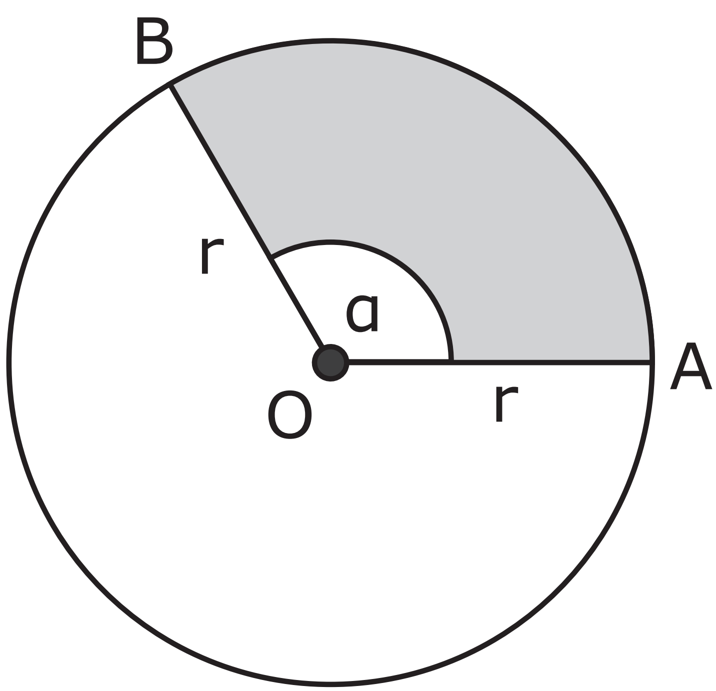


$L : 2y + 3x = 4$

Lección 7 - Perímetro y área de sectores y segmentos circulares

- ¿Qué fórmulas puedes utilizar para calcular el perímetro y el área de sectores y segmentos circulares?

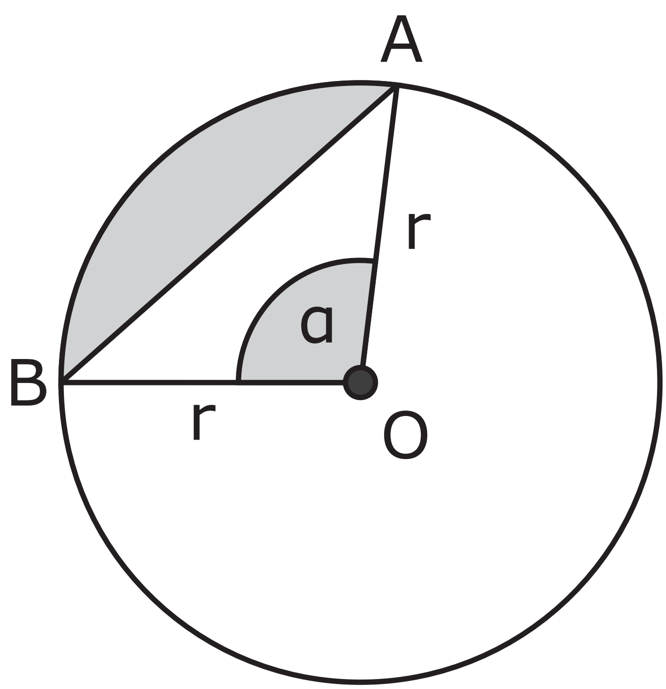
Sectores circulares



- Perímetro → $2\,r \cdot \pi \cdot \dfrac{\alpha}{360} + 2\,r$

- Área → $r^2 \cdot \pi \cdot \dfrac{\alpha}{360}$

Segmentos circulares



- Perímetro → $2\,r \cdot \pi \dfrac{\alpha}{360} + m(\overline{AB})$

- $\text{Área} \rightarrow r^2 \bullet \pi \bullet \dfrac{\alpha}{360} - \text{Área } (\Delta OAB)$

UNIDAD 3 - MEDIOAMBIENTE

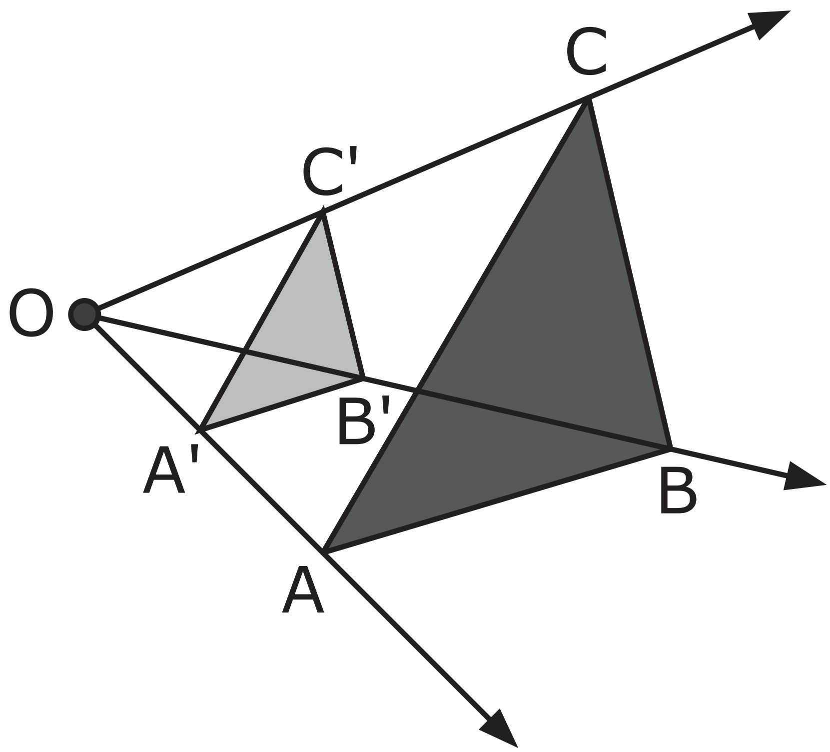
Lección 8 – Homotecia y teorema de Tales

- ¿Qué es la homotecia?

  Es una transformación geométrica mediante la cual se obtiene una figura de diferente o igual tamaño a la original, pero que conserva su forma y proporciones.

- ¿Qué es la razón de homotecia (k)?

Es el cociente entre la distancia del centro de homotecia (O) al vértice de la figura imagen y la distancia del centro de homotecia al vértice de la figura original.



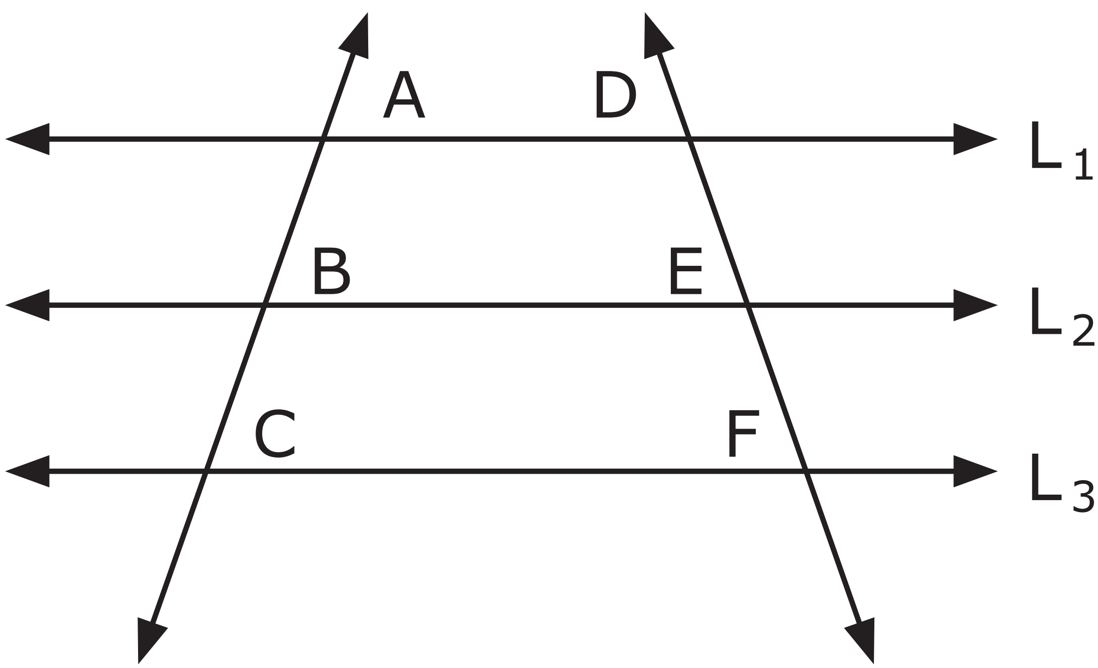
Además, la razón de longitud de dos segmentos homotéticos es igual a la razón de la homotecia.

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = k$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = k$$

- ¿Qué establece el teorema de Tales?

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

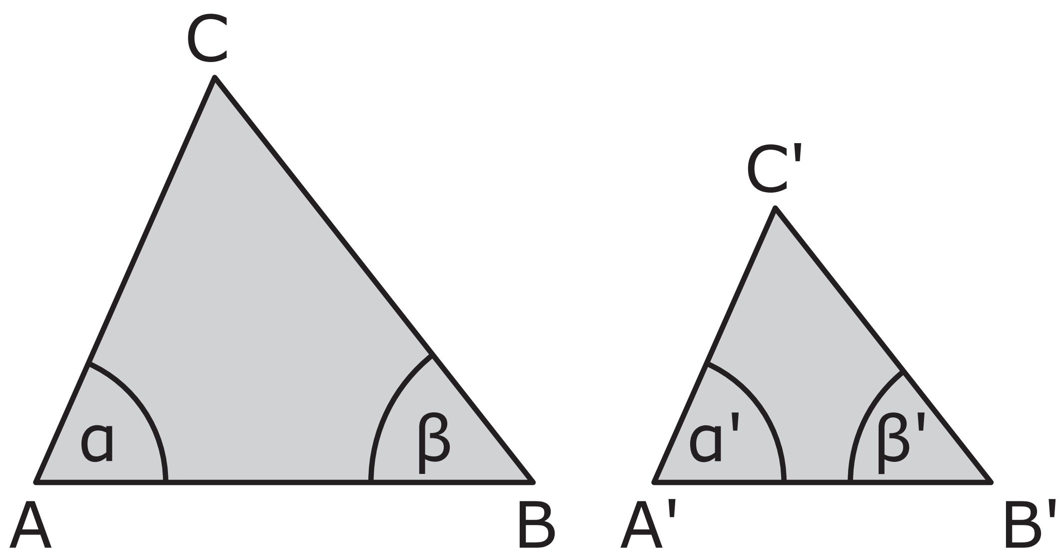


$L_1 // L_2 // L_3$

Lección 9 - Semejanza

- ¿Cuáles son los criterios de semejanza en triángulos?

Ángulo, ángulo (AA)

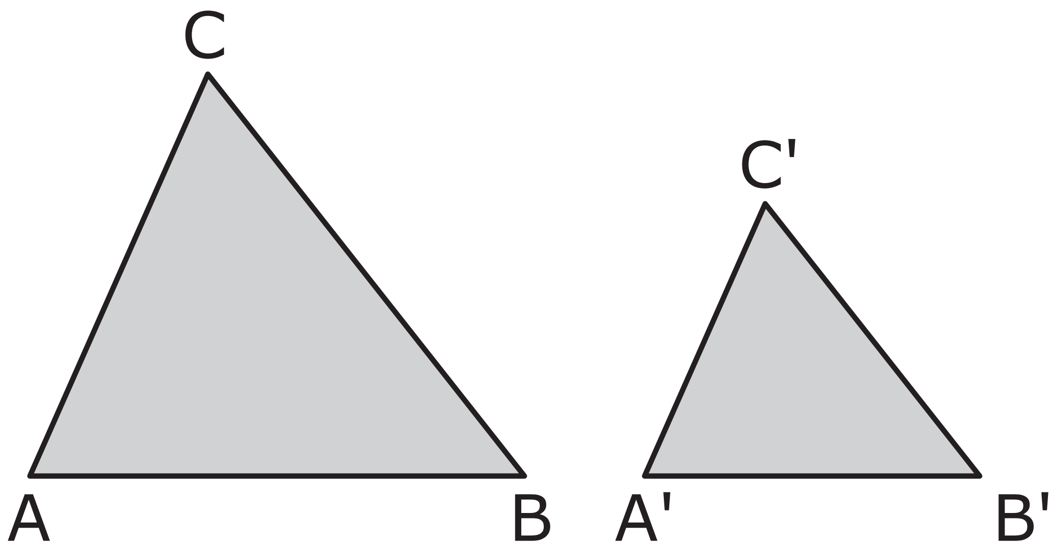


$$\alpha = \alpha'$$

$$\beta = \beta'$$

$$\Delta\ ABC \sim \Delta\ A'B'C'$$

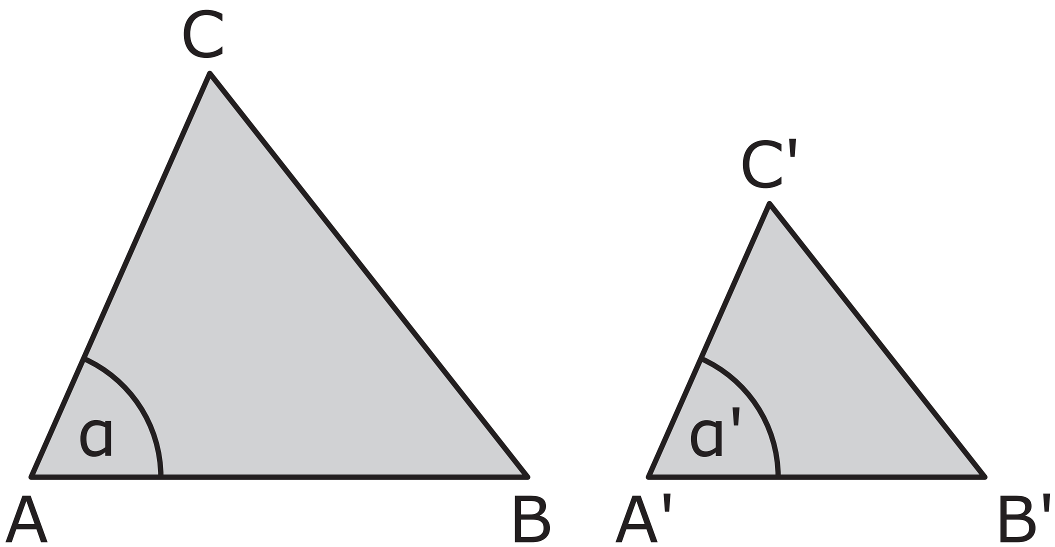
Lado, lado, lado (LLL)



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$$

$$\Delta\ ABC \sim \Delta\ A'B'C'$$

Lado, ángulo, lado (LAL)

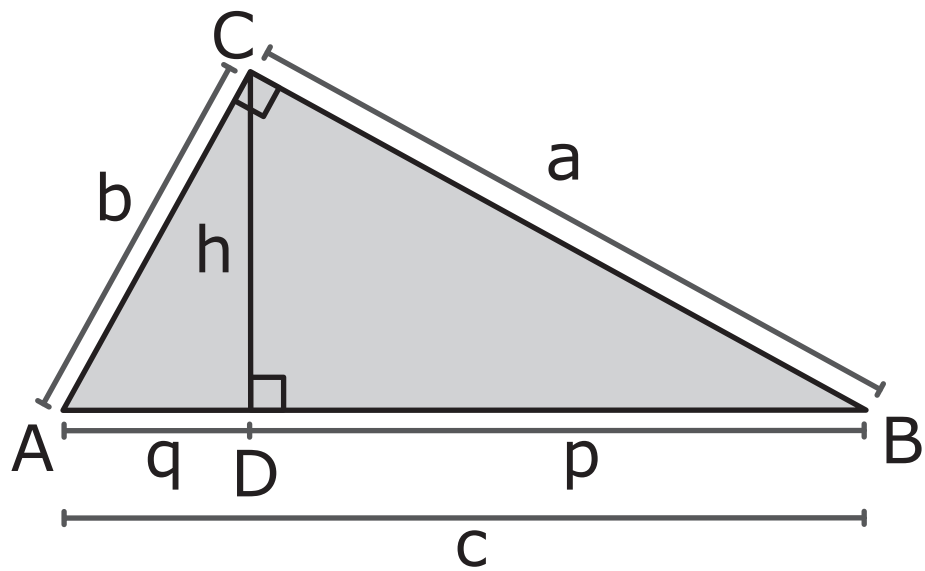


$$\alpha = \alpha'$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$$

$$\Delta\, ABC \sim \Delta\, A'B'C'$$

- ¿Cuáles son los teoremas de Euclides?



Referentes a los catetos

$a^2 = c \bullet p$

$b^2 = c \bullet q$

Referente a la altura

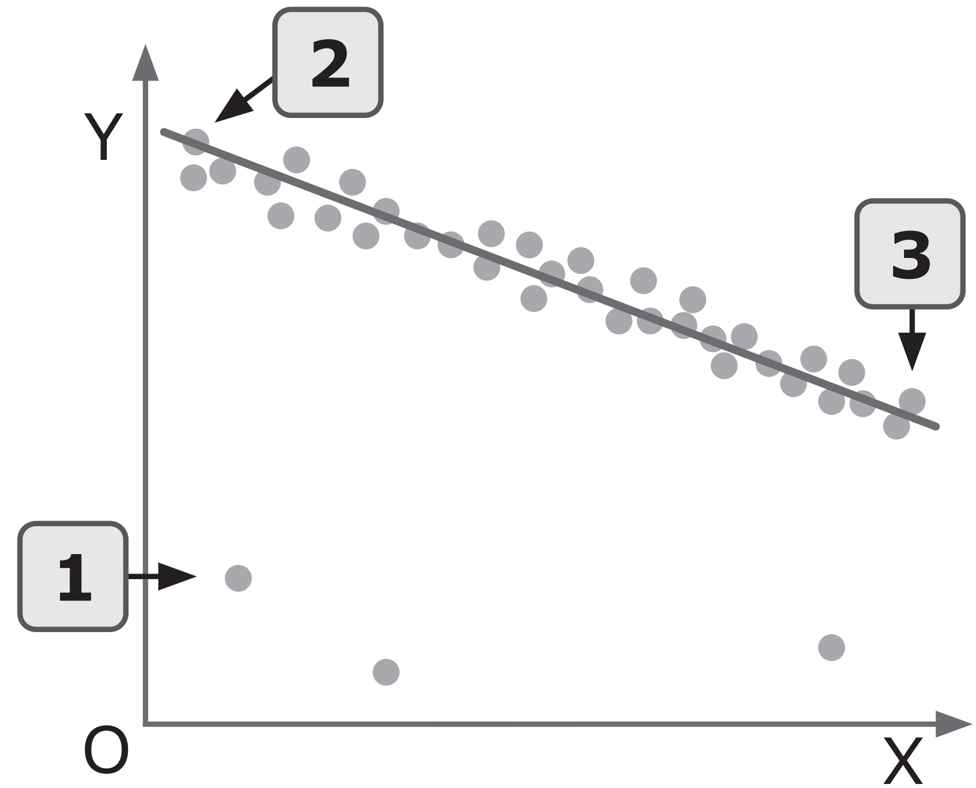
$h^2 = p \bullet q$

UNIDAD 4 - LOS DEPORTES

Lección 10 – Análisis de poblaciones

- ¿Cómo puedes interpretar una nube de puntos?

Las nubes de puntos permiten determinar la relación entre dos variables cuantitativas.



1- Punto aislado o atípico, ya que no sigue la tendencia de la mayoría de los puntos de la nube.

2- Pares ordenados (a, b), en los que a y b representan los valores de las variables cuantitativas en estudio.

3- Si los puntos están en torno a una recta, se dice que las variables tienen una relación lineal o están correlacionadas.

Lección 11 – Reglas de la probabilidad

- ¿Cuáles son las reglas aditiva y multiplicativa de la probabilidad?

Regla aditiva de la probabilidad

La probabilidad de que ocurra el evento A o el evento B se calcula por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si los eventos son disjuntos, entonces $P(A \cap B) = 0$

Regla multiplicativa de la probabilidad

La probabilidad de que ocurra el evento A y el evento B se calcula como:

$$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B \mid A)$$

Si los eventos son independientes, entonces

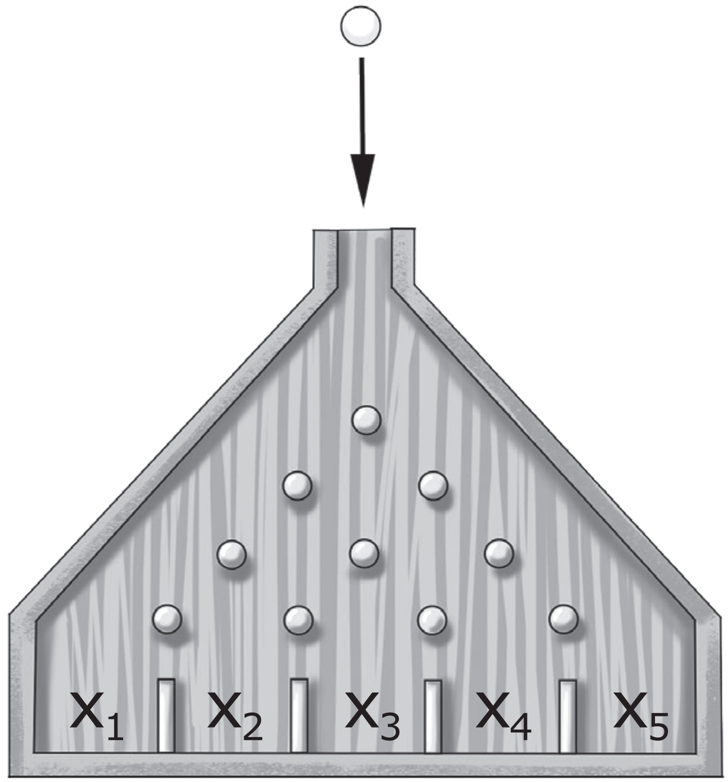
$$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$$

Lección 12 – Comportamiento aleatorio

- ¿Qué es un paseo aleatorio?

Es un recorrido en el que en cada etapa se tienen varias opciones para continuar, pero no se sabe cuál se tomará.

Un paseo aleatorio se puede representar con un diagrama de árbol, asignando probabilidad de ocurrencia a cada una de las etapas y aplicando las propiedades de la probabilidad.



La tabla de Galtón representa un paseo aleatorio.

GLOSARIO

A

Abscisa: valor que se representa en el eje horizontal o eje X en el plano cartesiano.

Altura: cada uno de los segmentos perpendiculares trazados desde un vértice de una figura al lado opuesto o a una prolongación de este.

Ángulo interior: es el formado por dos lados contiguos de un polígono y se encuentra dentro de este.

Arco de una circunferencia: parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos de ella.

Área: medida de una superficie.

B

Base de una potencia: corresponde al factor que se repite en una potencia.

C

Círculo: región o área del plano delimitada por una circunferencia.

Circunferencia: es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a una distancia r de un punto O.

Cuadrado: cuadrilátero cuyos cuatro ángulos interiores miden 90° y sus lados tienen la misma medida.

Cuadrilátero: región del plano limitada por cuatro segmentos, entre los cuales no hay tres colineales.

D

Decimal finito: número decimal con una cantidad finita de cifras decimales.

Decimal periódico: decimal infinito cuyo período comienza inmediatamente después de la coma.

Decimal semiperiódico: decimal infinito en el cual no todas las cifras de la parte decimal se repiten. La parte decimal que no se repite se llama anteperíodo.

Diámetro: cuerda de mayor longitud en una circunferencia.

E

Ecuación: igualdad entre expresiones algebraicas que solo se cumple para algunos valores de la incógnita.

Eje de simetría: recta que divide una figura en dos partes de igual forma y tamaño.

Evento: subconjunto del espacio muestral.

Experimento aleatorio: experimento en el que no se tiene certeza de lo que pasará. Por lo tanto, no se puede predecir su resultado.

Expresión algebraica: términos algebraicos relacionados entre sí mediante operaciones de adición o sustracción.

Exponente: término de una potencia que indica cuántas veces se repite la base.

F

Factor literal: parte no numérica de un término algebraico.

Fracción: de la forma $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$, donde el denominador (b) expresa la cantidad de partes iguales que representan la unidad, y el numerador(a) indica cuántas de ellas se toman.

Frecuencia absoluta: número de veces que se repite un determinado valor en la variable estadística que se estudia.

I

Incógnita: cada una de las variables que aparecen en una ecuación o inecuación que son desconocidas.

L

Longitud: distancia entre dos puntos.

M

Media aritmética ($\overline{x}$): promedio entre todos los datos de una distribución estadística.

Mediana (Me): valor que ocupa el lugar central en una distribución de datos.

N

Números enteros (Z): conjunto numérico formado por los números naturales (N), el cero y los inversos aditivos de los números naturales.

Número decimal: número formado por una parte entera y una parte decimal separada por una coma decimal.

Números negativos (Z^-): subconjunto de los números enteros compuesto por los inversos aditivos de los números naturales.

Número mixto: número representado por un número entero y por una fracción.

O

Ordenada: valor que se representa en el eje vertical (eje Y) en el plano cartesiano.

Origen: punto en el que se intersecan los ejes del plano cartesiano. Se representa con el punto (0, 0).

P

Paralelogramo: cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos.

Par ordenado: en el plano cartesiano corresponde a una dupla de elementos, el primero indica la abscisa y el segundo la ordenada.

Perímetro (P): longitud del borde de una figura. En un polígono se calcula como la suma de las medidas de sus lados.

Pi (π): número irracional que corresponde a la razón entre el perímetro (P) y el diámetro de un círculo.

Plano cartesiano: es el plano euclidiano provisto de un sistema de coordenadas en el que se distinguen dos ejes perpendiculares (rectas numéricas) que determinan cada punto en el plano.

Población: conjunto de individuos, objetos o fenómenos de los cuales se desea estudiar una o varias características.

Polígono: figura plana formada por una línea poligonal cerrada y su interior.

Polígono de frecuencias: gráfico que se obtiene al unir los puntos correspondientes a la marca de clase de cada intervalo.

Porcentaje: razón cuyo consecuente es 100. Se representa por el símbolo %.

Potencia: expresión usada para indicar la multiplicación de un factor por sí mismo una determinada cantidad de veces.

Probabilidad: posibilidad de ocurrencia de un evento. Toma valores entre 0 y 1, pero también se puede escribir como porcentaje.

Proporción: igualdad de dos razones.

Proporcionalidad directa: dos variables están en proporcionalidad directa si su razón es constante.

Proporcionalidad inversa: dos variables están en proporcionalidad inversa si su producto es constante.

R

Radio: segmento de recta que une el centro de una circunferencia con un punto de ella.

Razón: comparación de dos números mediante el cociente entre ellos.

Rectángulo: paralelogramo en el que sus ángulos interiores miden 90° y sus lados opuestos tienen la misma medida.

Reflexión: transformación isométrica en el plano que consiste en reflejar una figura a partir de una recta llamada eje de reflexión.

Regla de Laplace: forma de calcular la probabilidad de un evento, determinando el cociente entre los casos favorables y los casos posibles, en un experimento aleatorio, cuando sus resultados son equiprobables.

Rombo: paralelogramo cuyos lados son todos de igual medida y sus ángulos interiores opuestos son iguales (dos ángulos son agudos y los otros dos obtusos).

Romboide: paralelogramo en el que sus lados opuestos miden lo mismo y la medida de sus ángulos interiores opuestos es la misma.

T

Término algebraico: cada uno de los sumandos que aparecen en una expresión algebraica.

Trapecio: cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos.

V

Vector: segmento orientado determinado por su origen y su extremo. Se caracteriza por tener magnitud, dirección y sentido.