MACROTIPO

Matemática
1º Medio
Tomo IV

Autores
Bastián Galasso Díaz
Lesly Maldonado Rodríguez
Vivian Marambio Fuentes

Adaptador
Claudio Aguilera Téllez

Editorial Santillana

Centro de Cartografía Táctil
Universidad Tecnológica Metropolitana
Adaptación a Macrotipo.

Santiago de Chile
Año 2017

CENTRO DE CARTOGRAFÍA TÁCTIL
Universidad Tecnológica Metropolitana
Dieciocho 414
Teléfono: 27877392
Santiago - Chile

TOMO I
UNIDAD 1

Página

TOMO II

UNIDAD 2

Página

TOMO III
UNIDAD 3

Página

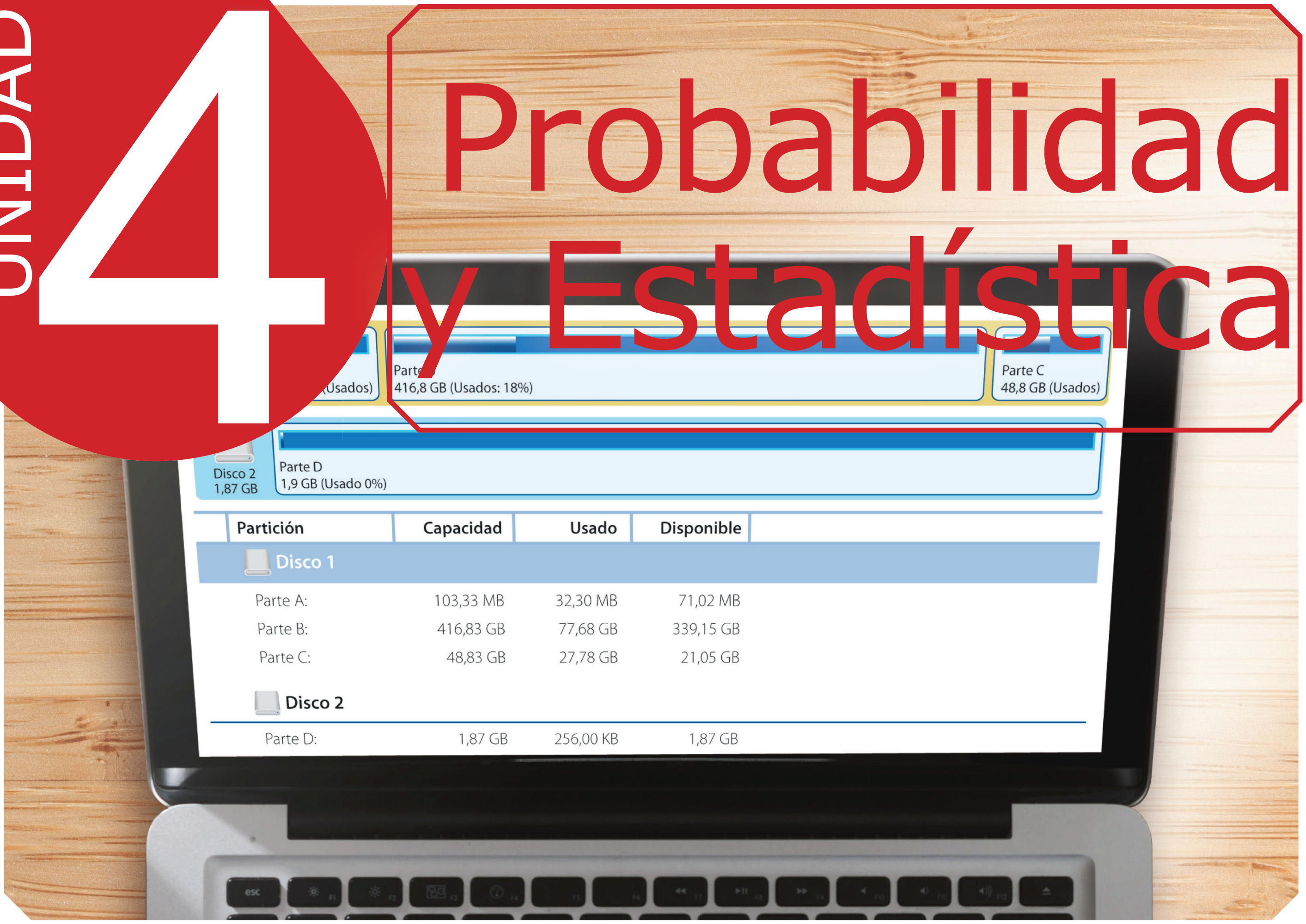
TOMO IV
UNIDAD 4

Página

Página

UNIDAD 4

Probabilidad y Estadística



La probabilidad y la estadística están presentes en cualquier situación en la que no exista certeza de sus posibles resultados. La estadística permite, a partir de datos, sacar conclusiones e incluso predecir resultados con alguna medida de confiabilidad. Por otro lado, la probabilidad es una manera de medir la incertidumbre de los resultados.

Al realizar encuestas, los datos recopilados los puedes representar en un gráfico para estudiarlos de mejor forma.

Estudiarás...

Tema 1: Comparación de muestras.

Tema 2: Propiedades de la probabilidad.

Tema 3: Comportamiento aleatorio.

Para que puedas...

Registrar y comparar distribuciones de dos caracteristicas o poblaciones.

Resolver problemas que involucran probabilidad.

Comprender el concepto de azar mediante experimentos y análisis estadísticos.

Al realizar juegos de azar, se puede determinar la probabilidad asociada a diferentes experimentos aleatorios.

Punto de partida

Te invitamos a responder las siguientes preguntas que te ayudarán a planificar tu aprendizaje en esta unidad.

1. ¿Cómo crees que se relacionan la estadística y la probabilidad? Explica.

____

____

2. ¿Qué situación o tema de tu interés crees que se pueda relacionar con estadística o probabilidad y con lo que estudiarás en esta unidad? ¿Por qué?

____

____

3. Respecto a lo que te interesa aprender, ¿qué meta te propones cumplir al finalizar esta unidad? ¿Cómo piensas cumplirla?

____

____

Actitud

Te invitamos a desarrollar esta unidad con una actitud crítica frente a informaciones, a valorar el aporte de los datos en la comprensión de la realidad social; y a ser responsable en el uso de las tecnologías. ¡Que tengas éxito en el cumplimiento de tus metas!

¿Cuánto sé? Evaluación inicial

Activa tus conocimientos previos y desarrolla las siguientes actividades de evaluación.

Medidas de tendencia central y posición

1. Lee la situación y responde.

En un colegio se realizó una prueba de habilidades de lectura a 20 estudiantes con problemas auditivos. Los puntajes obtenidos fueron:

42 26 22 30 44 22 30

26 38 22 30 22 22 22

26 30 20 44 36 26

a. Calcula la media, la mediana y la moda de los datos. Escribe una conclusión para cada medida.
(3 puntos)

Realiza tus cálculos

Conclusión:

b. Determina la cantidad de estudiantes que constituyen menos del 90% de los datos del estudio.
(1 punto)

Realiza tus cálculos

Respuesta:

c. Calcula el valor del dato que deja por debajo el 85% de los puntajes.
(1 punto)

Realiza tus cálculos

Respuesta:

d. Determina el valor de los cuartiles e interprétalo en su contexto.
(2 puntos)

Realiza tus cálculos

Respuesta:

Probabilidad de un evento

2. Supón que se lanza cuatro veces una moneda honesta (no se encuentra cargada).

a. Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio.
(2 puntos)

b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cuatro caras? (2 puntos)

Realiza tus cálculos

Respuesta:

c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un sello?
(2 puntos)

Realiza tus cálculos

Respuesta:

____

____

Verifica tus respuestas en el solucionario junto a un compañero y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1	Comprender y aplicar las medidas de tendencia central y de posicíon.		**Logrado:** 8 puntos o más. **Medianamente logrado:** 6 a 7 puntos. **Por lograr:** 5 puntos o menos
2	Aplicar el principio multiplicativo para calcular probabilidades.		
	Total		

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué conceptos crees que debes repasar antes de empezar esta unidad? ¿Qué estrategia usarás?

____

____

____

- ¿Por qué se puede asumir que una moneda es honesta? Explica.

____

____

____

____

TEMA 1

Comparación de muestras

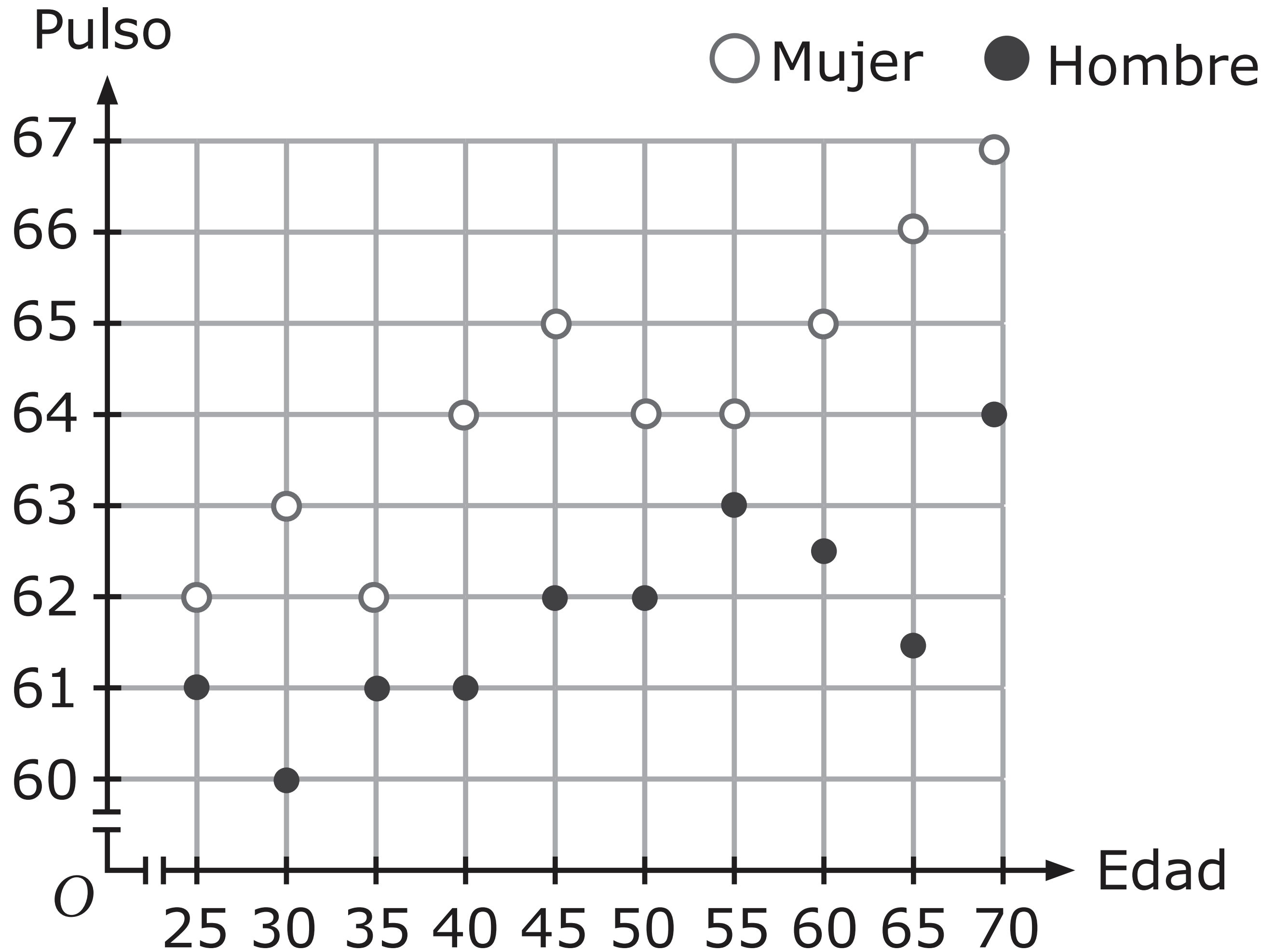
En esta sección recordarás lo que has estudiado en años anteriores y diseñarás una estrategia para desarrollar el Tema 1.

Recuerdo lo que sé

1. Lee la siguiente información.

En la ciudad de Santiago se eligió a 10 mujeres y 10 hombres y se les midió su pulso en reposo.

En el gráfico se representan los datos, donde cada punto muestra la información de la edad y pulso de una persona.



a. Escribe la información del pulso de todas las personas del estudio, por género.

Hombres:

____

Mujeres:

____

b. ¿La persona con mayor pulso es hombre o mujer? ¿Y la con menor pulso?

c. Calcula las medidas de tendencia central del pulso de hombres y mujeres, y luego da una interpretación de cada medida.

Realiza tus cálculos

Interpretación:

La moda, la mediana y la media son medidas de tendencia central. La moda corresponde al valor con mayor frecuencia, la mediana divide la distribución de los datos en dos partes iguales y la media se obtiene con el promedio de los datos

Diseño mi estrategia

2. Analiza cada caso y plantea una estrategia para desarrollar cada actividad.

El estudio busca establecer una relación, aproximada, entre la edad de una persona y su pulso a partir de los datos. Esta relación permitiría determinar cuál debería ser el pulso aproximado de una persona conociendo su edad.

a. ¿Se puede observar en el gráfico algún tipo de relación entre la edad y el pulso de una persona? Descríbela con tus palabras.

____

____

____

____

b. La relación entre la edad y el pulso, ¿es la misma para los hombres y las mujeres? Justifica.

____

____

____

____

c. A partir de los datos, ¿qué harías para determinar el pulso que debería tener una persona de 63 años o de 42 años? Explica tu estrategia.

____

____

____

3. Comenta tu estrategia con un compañero o compañera y luego escribe lo que te sirvió para mejorar la tuya.

____

____

____

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué dificultades tuviste para crear una estrategia? ¿Cómo podrías superarlas?

____

____

- ¿Qué conocimientos de años anteriores o de tu experiencia utilizaste en el análisis estadístico de los datos?

____

____

- ¿Qué otras variables estimas que se podrían relacionar en un estudio estadístico de tu interés? Da un ejemplo.

____

____

• ¿Crees que los datos del problema son reales? Justifica tu respuesta.

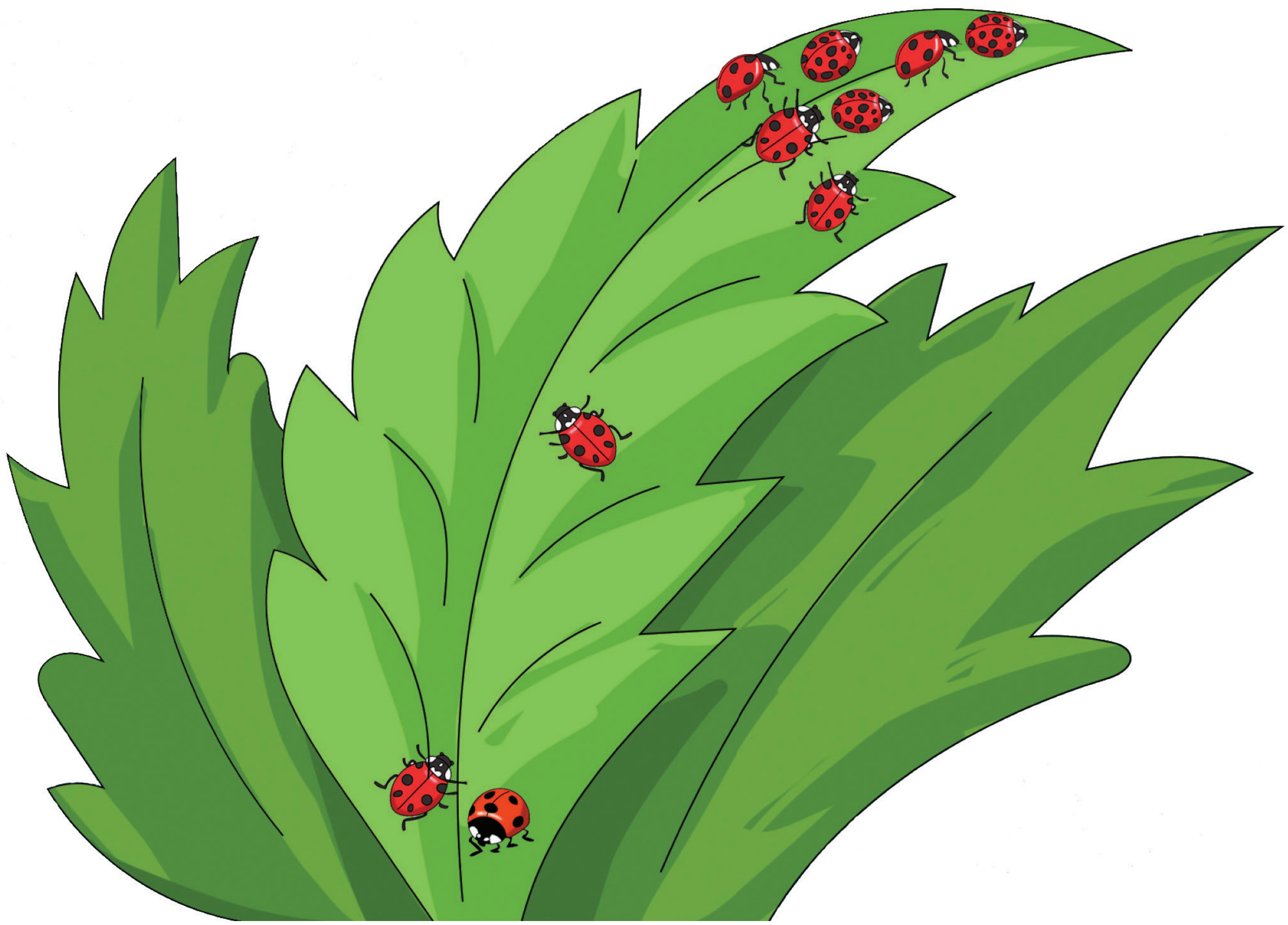
____

____

Relación entre dos variables cuantitativas

Objetivo: Registrar distribuciones de dos características distintas de una misma población en una nube de puntos.

Un veterinario especialista en insectos decidió estudiar a las chinitas. Fue a su jardín y observó a un grupo que vivía en la hoja de una planta.



- Describe con tus palabras cómo están distribuidas las chinitas.

- Si el veterinario pone otra chinita en la misma hoja, ¿dónde crees que se ubicaría?

___

___

- ¿Tu respuesta anterior quiere decir que se puede saber con certeza dónde se ubicará la chinita? Justifica tu respuesta.

___

___

___

- La distribución de las chinitas se asemeja a la representación por puntos en el plano usada en estadística para mostrar la posible relación entre dos variables y se conoce como nube de puntos o gráfico de dispersión.

Atención

Recuerda que una variable puede ser cuantitativa o cualitativa. Es cuantitativa cuando sus valores son numéricos, por ejemplo la estatura o la masa corporal, y cualitativa si sus valores son categorías no numéricas, como color de ojos o pelo.

Conceptos

- Una nube de puntos corresponde a la gráfica de un conjunto de pares ordenados en el plano cartesiano, donde las coordenadas de cada punto corresponden a una variable cuantitativa en estudio.

Las nubes de puntos se pueden presentar de muchas formas, por lo que identificar ciertas tendencias o comportamientos puede ayudar a obtener información sobre la relación que tienen las características estudiadas.

Atención

En ocasiones se utiliza el peso y la masa como términos equivalentes. Sin embargo no lo son, ya que el peso es una magnitud vectorial y la masa, un escalar.

Habilidad

Representar relaciones entre variables te ayudará a mejorar su comprensión y análisis.

Atención

En muchas ocasiones diremos que hay una tendencia lineal cuando se puede trazar una línea recta aproximada entre los puntos.

Ejemplo 1. La siguiente tabla corresponde a datos obtenidos mediante una encuesta que se les realizó a 10 personas sobre su masa corporal y edad.

Persona	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Edad	10	13	15	14	11	17	19	15	17	11
Masa corporal	28	34	43	40	31	52	63	42	53	31

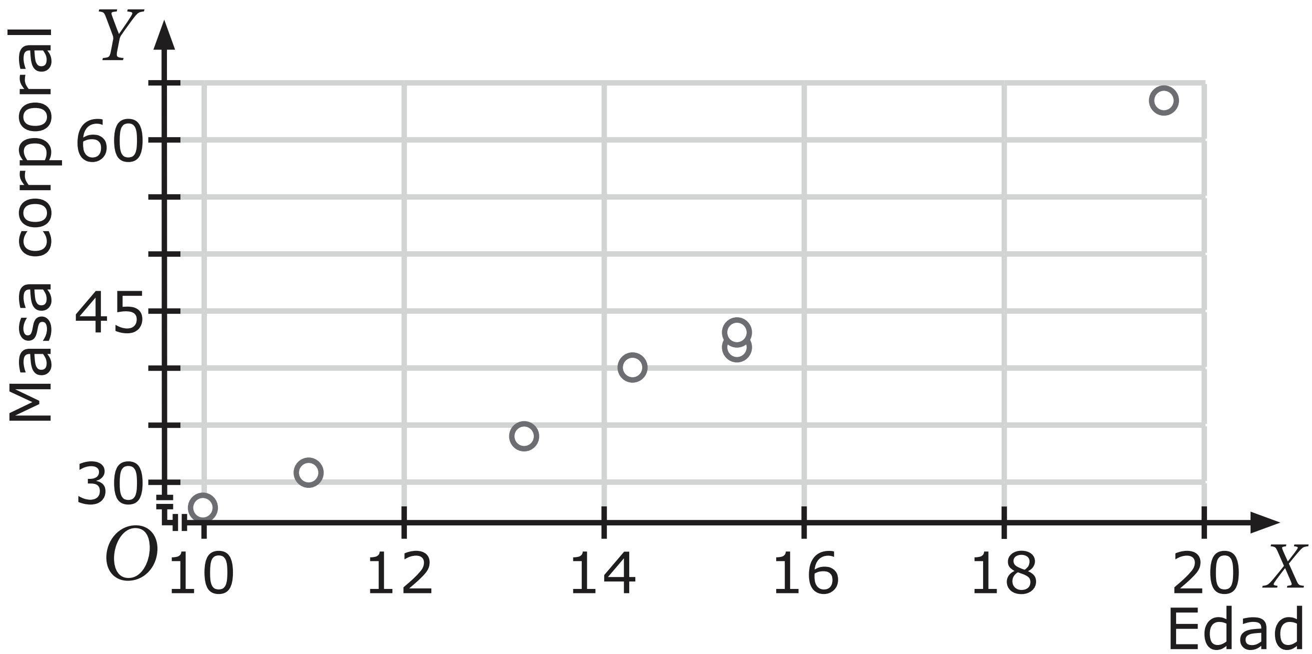
Representa los datos de la tabla en una nube de puntos.

Para graficar los datos, puedes seguir estos pasos:

Paso a Paso.

1. Debes generar los puntos que conformarán la nube, es decir, los pares ordenados (edad, masa corporal) para cada persona; por ejemplo, a la persona 1 le corresponde el par (10, 28) y a la persona, 5 el par (11, 31).

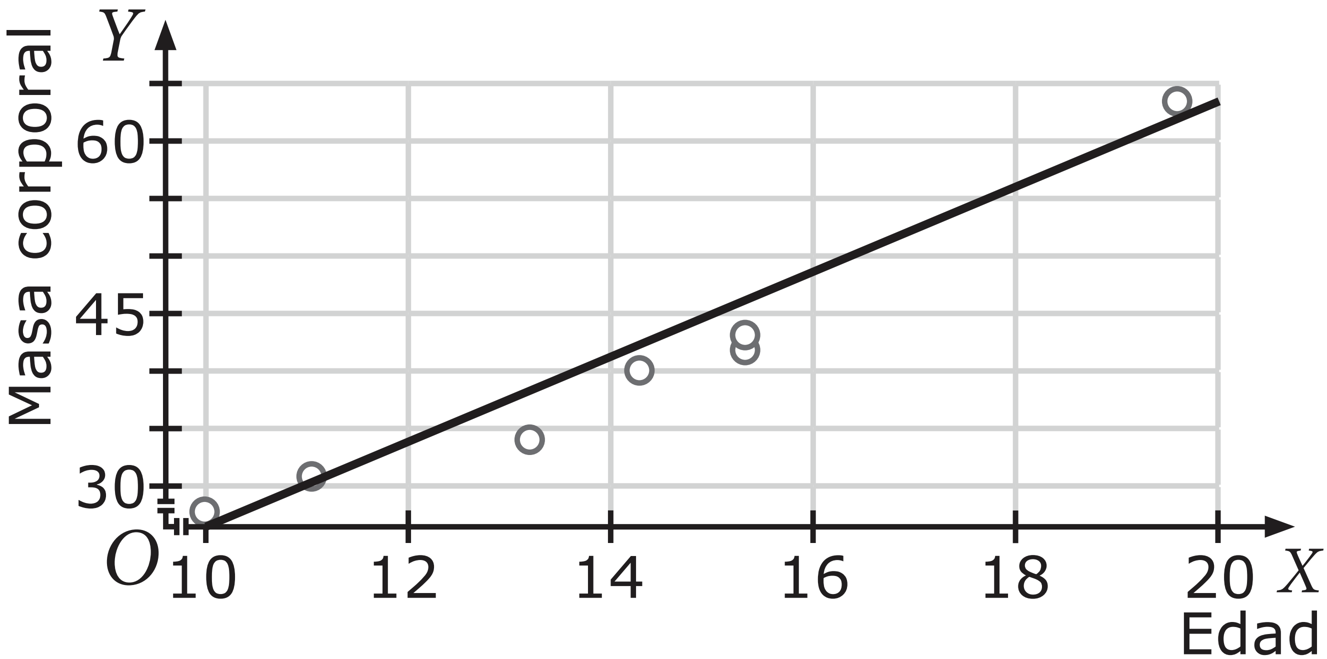
2. Construyes un plano cartesiano en el que el eje X representa la edad y el eje Y, la masa corporal. Luego, ubicas los puntos.



¿Se puede observar alguna relación entre las variables?

Se puede observar una tendencia lineal, es decir, que las variables se relacionan, aproximadamente, de manera proporcional.

A continuación se observa que se podría trazar una línea recta para aproximar dicha relación.



Conceptos

- Cuando una nube de puntos tiene una tendencia semejante a una recta o están en torno a una recta, diremos que las variables tienen una relación lineal o están correlacionadas linealmente.

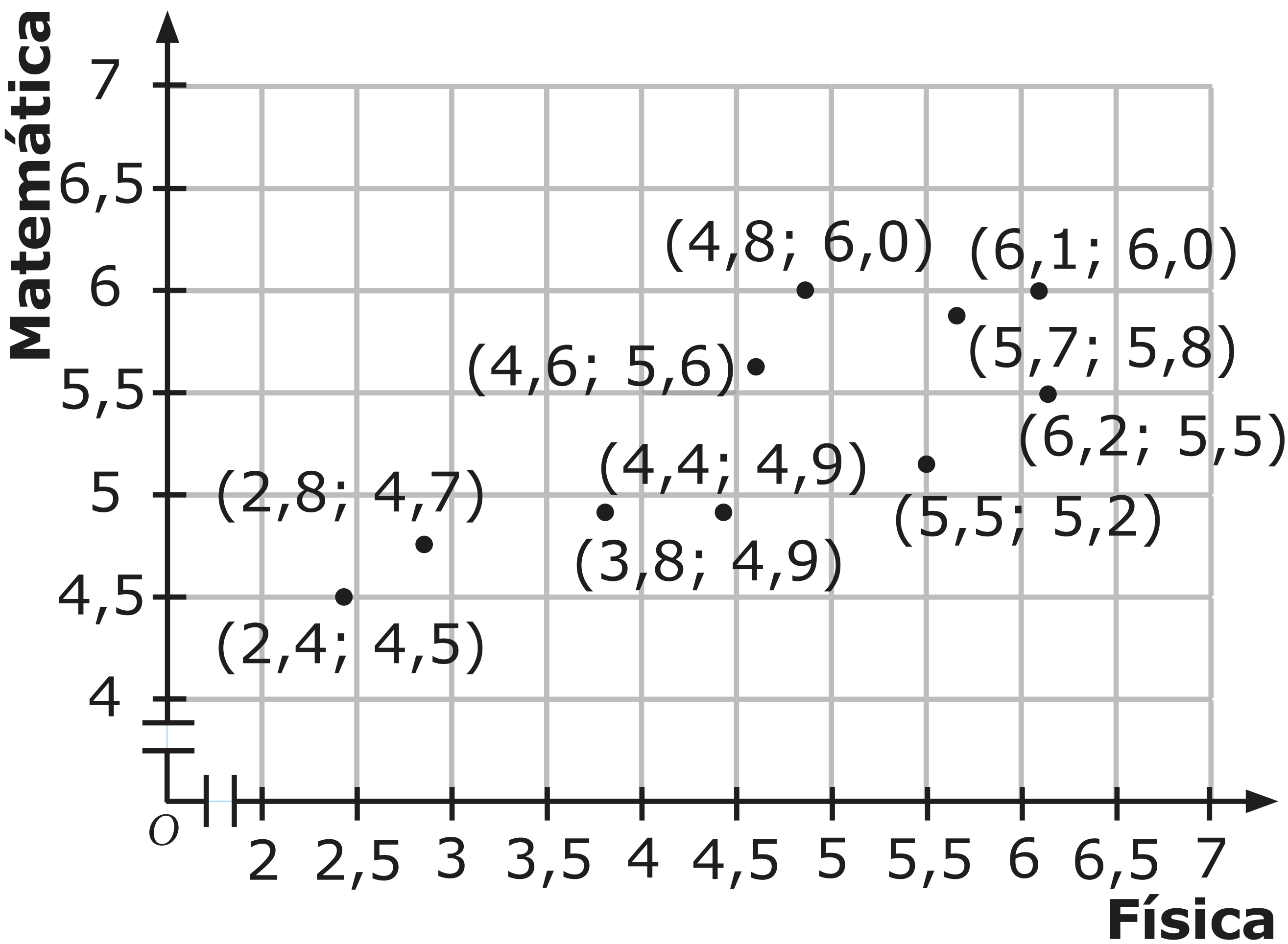
Actitud

Siempre cuestiona los datos o estudios que se presentan en los medios de comunicación, ya que puede que tengan errores de registro o de análisis.

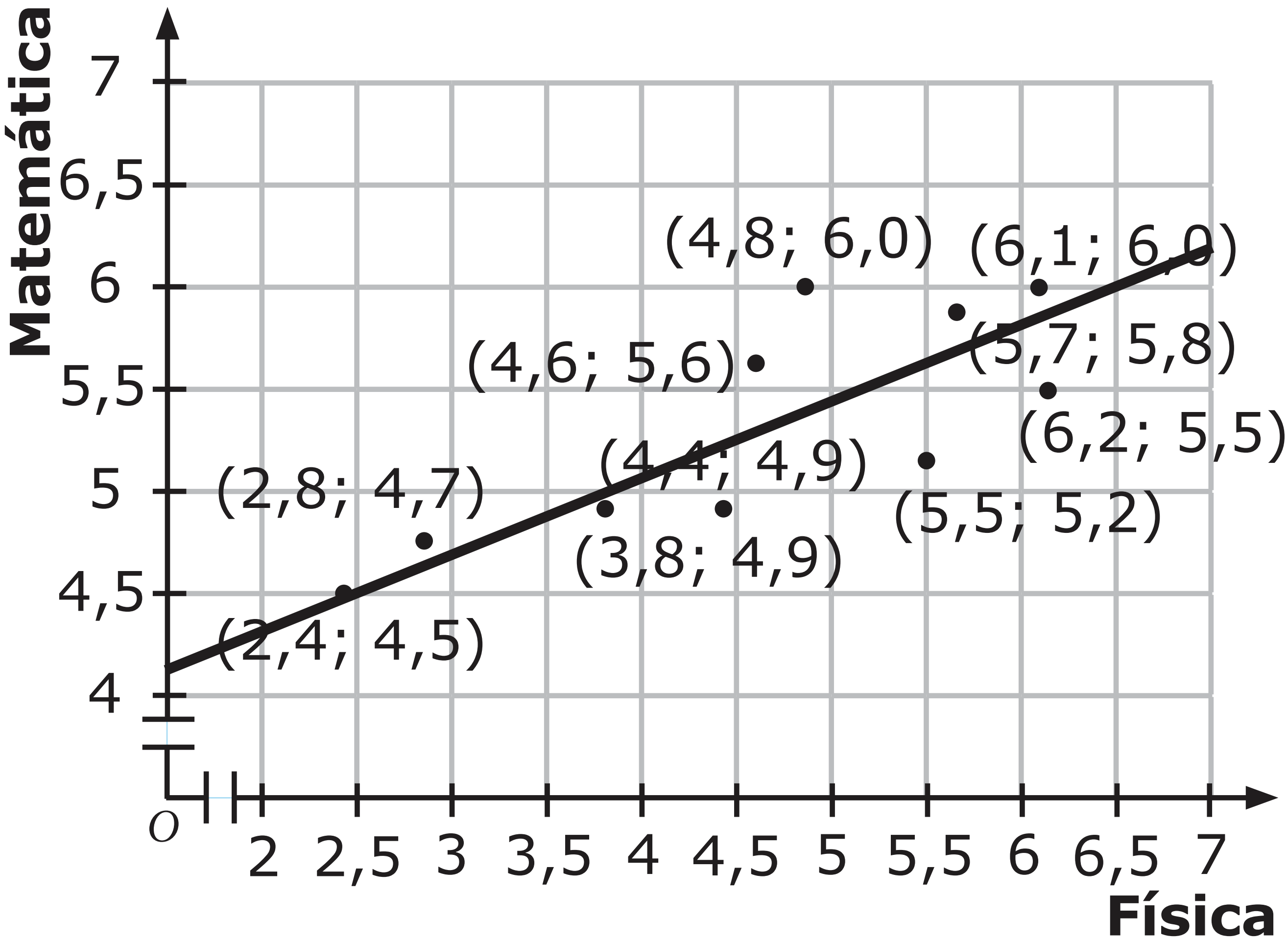
Ejemplo 2. Un estudiante ha tenido las calificaciones que se muestran en la tabla:

Física	6,1	2,8	5,5	4,6	4,8
	4,4	6,2	2,4	5,7	3,8
Matemática	6,0	4,7	5,2	5,6	6,0
	4,9	5,5	4,5	5,8	4,9

1. Al representar la información anterior en un plano cartesiano, considerando en el eje X las calificaciones obtenidas en Física y en el eje Y las calificaciones obtenidas en Matemática, se tiene lo siguiente:



2. Al trazar una recta que pase cerca de la mayoría de las calificaciones, se tiene:

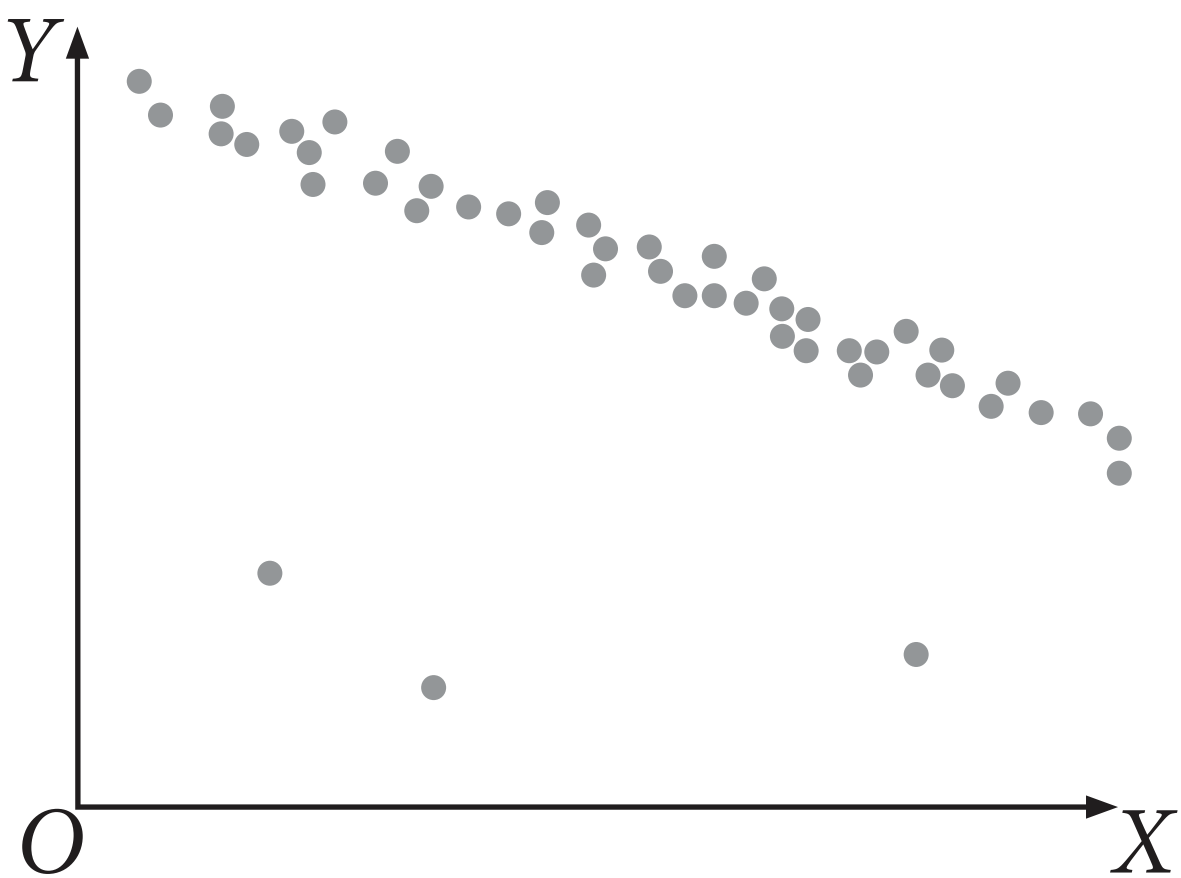


Respuesta: Ya que la mayoría de los puntos está cerca de la recta, entonces las calificaciones (variables) están correlacionadas linealmente.

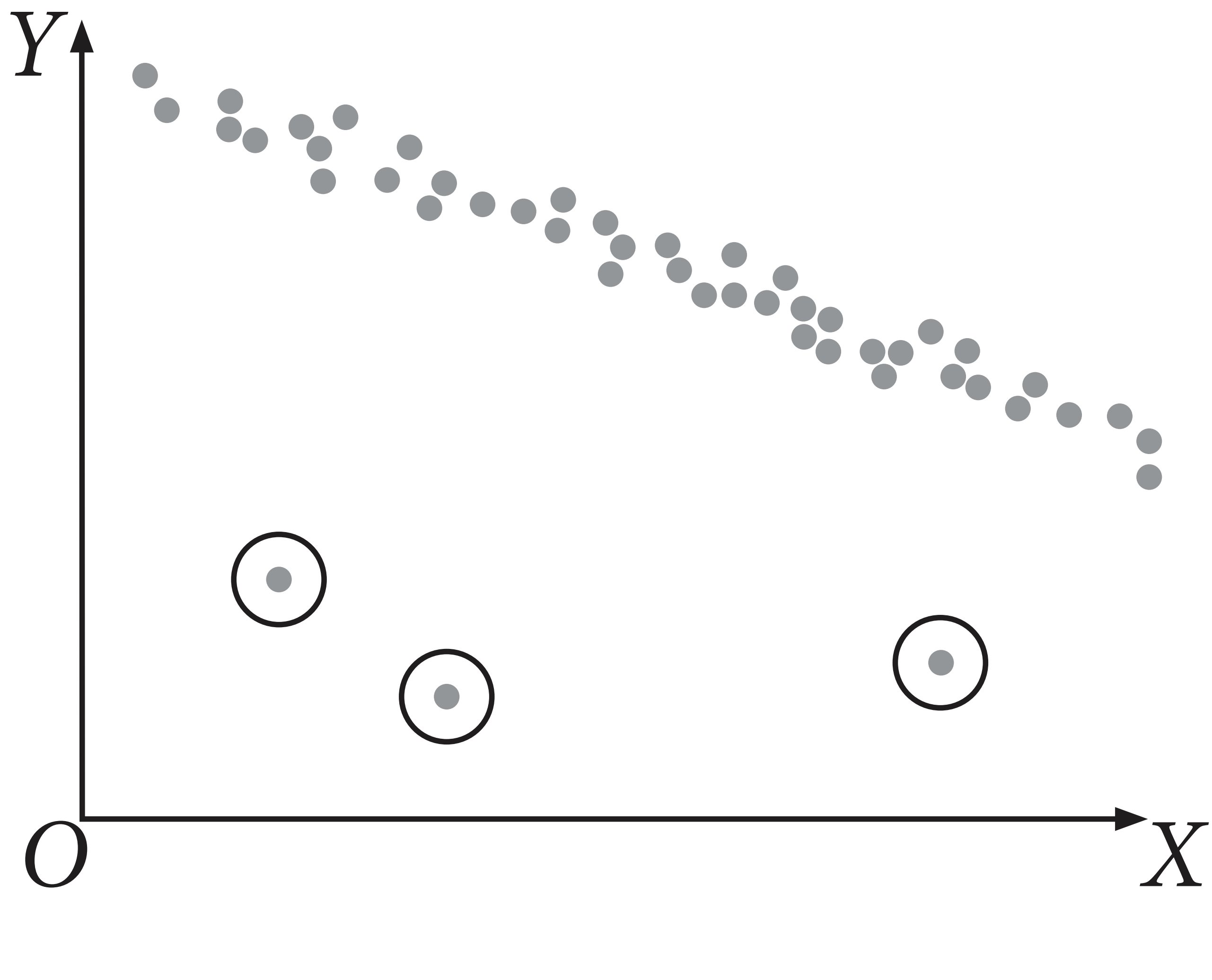
Conceptos:

- Diremos que un punto es aislado (punto atípico u outlier) si en el gráfico muestra un comportamiento muy distinto al de los demás puntos.

Ejemplo 3. Detecta los puntos aislados en la siguiente nube, luego enciérralos.



Los puntos en la nube siguen la forma de una recta, salvo aquellos tres que se encuentran más cercanos al eje X y se marcan en la imagen.



Con ello hemos identificado los puntos atípicos.

- Dibuja una recta lo más próxima a todos los datos sin considerar los puntos aislados.

- Si se dibuja una recta considerando los puntos aislados, ¿crees que la tendencia se ve afectada? Justifica tu respuesta.

- Si en una situación donde se relacionan dos variables el gráfico de dispersión presenta puntos aislados, ¿la medida de cada variable cambia si se quitan dichos puntos? Da un ejemplo

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

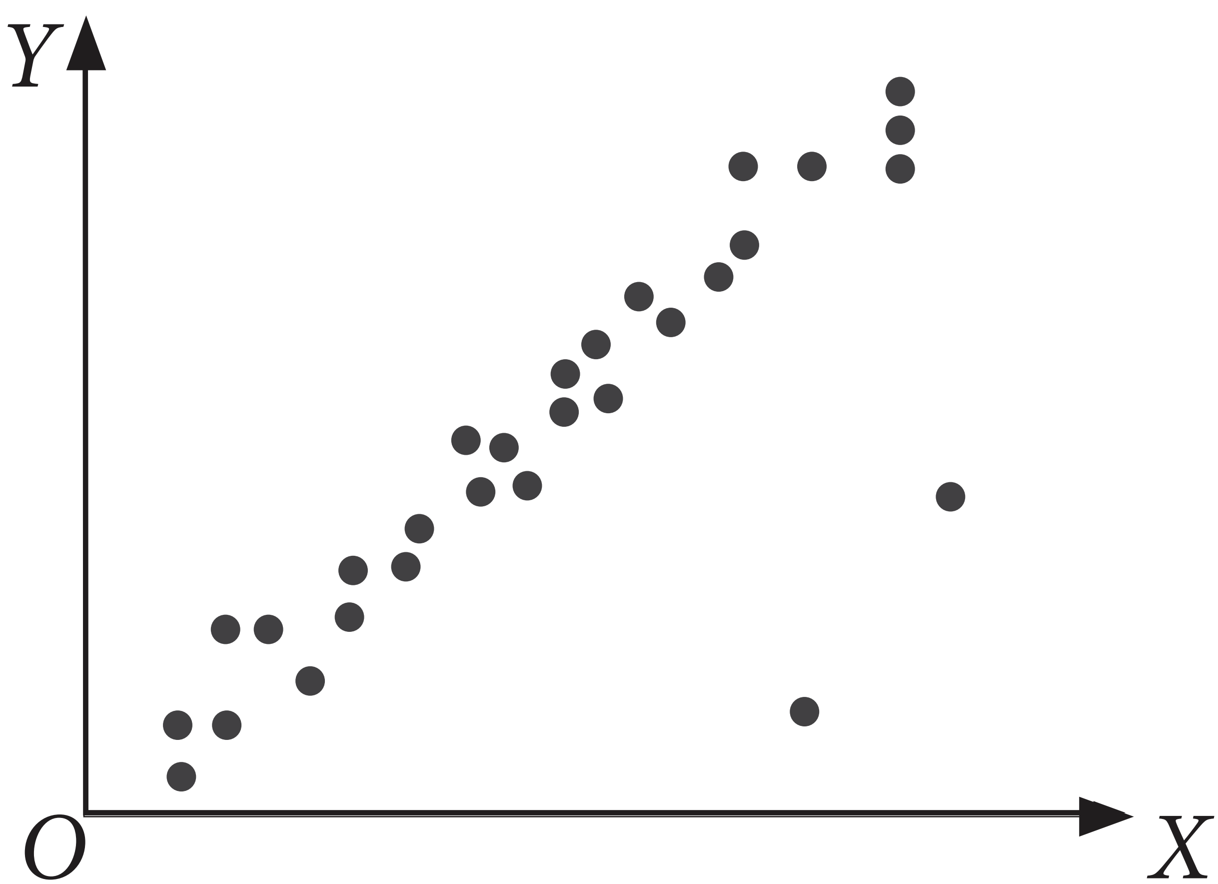
1. Representa los siguientes datos como nube de puntos.

a. {(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8), (9, 9), (12, 3), (1, 3)}
b. {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7)}
c. {(1, 0), (10, 3), (3, 10), (4, 4), (8, 7), (9, 1), (2, 10)}
d. {(0, 1), (2, 6), (3, 2), (5, 6), (2, 2), (3, 1), (6, 2)}

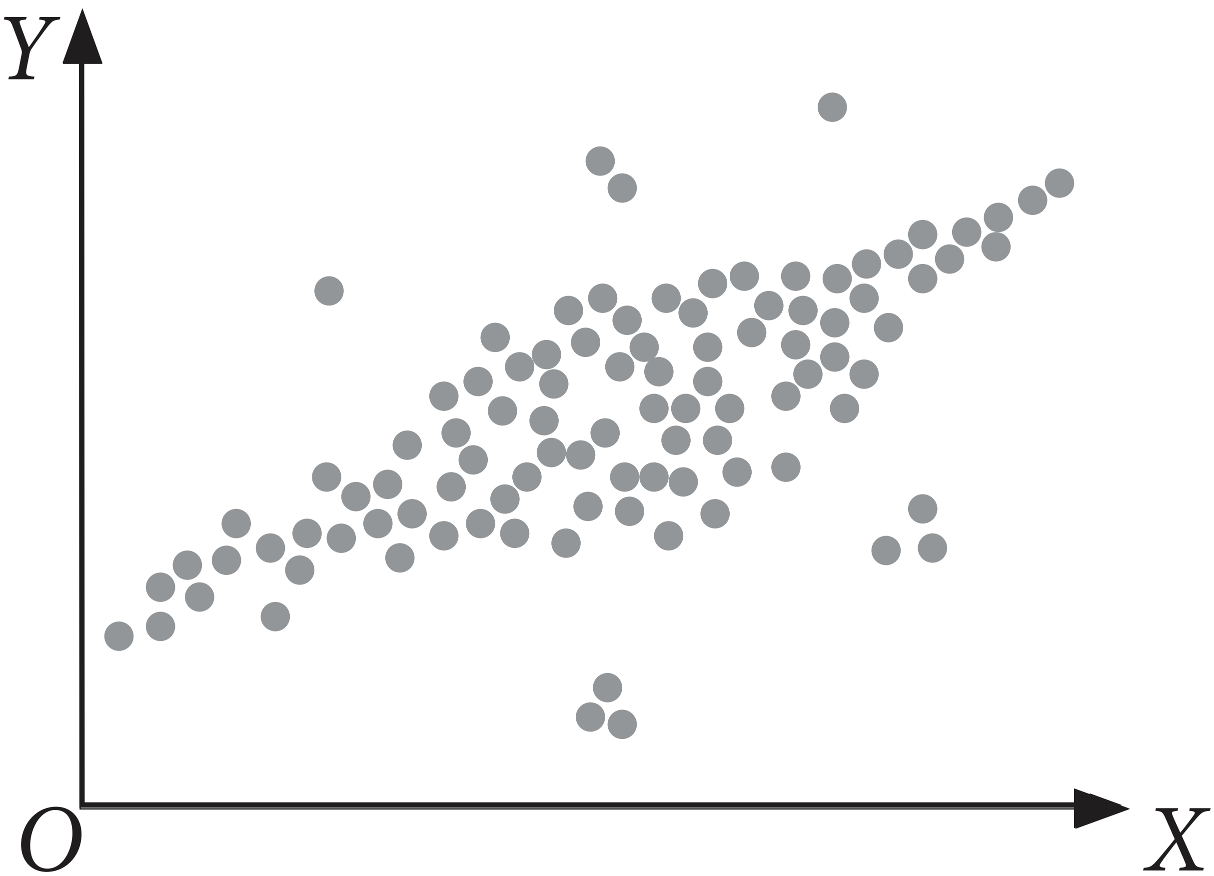
2. En cada una de las nubes del ítem anterior, determina si los puntos siguen algún patrón o parecen estar distribuidos al azar.

3. En las siguientes nubes de puntos, decide si se puede establecer alguna relación entre las variables. En el caso de que tu respuesta sea afirmativa, determina si la relación es lineal y si existen puntos atípicos. Justifica tu respuesta.

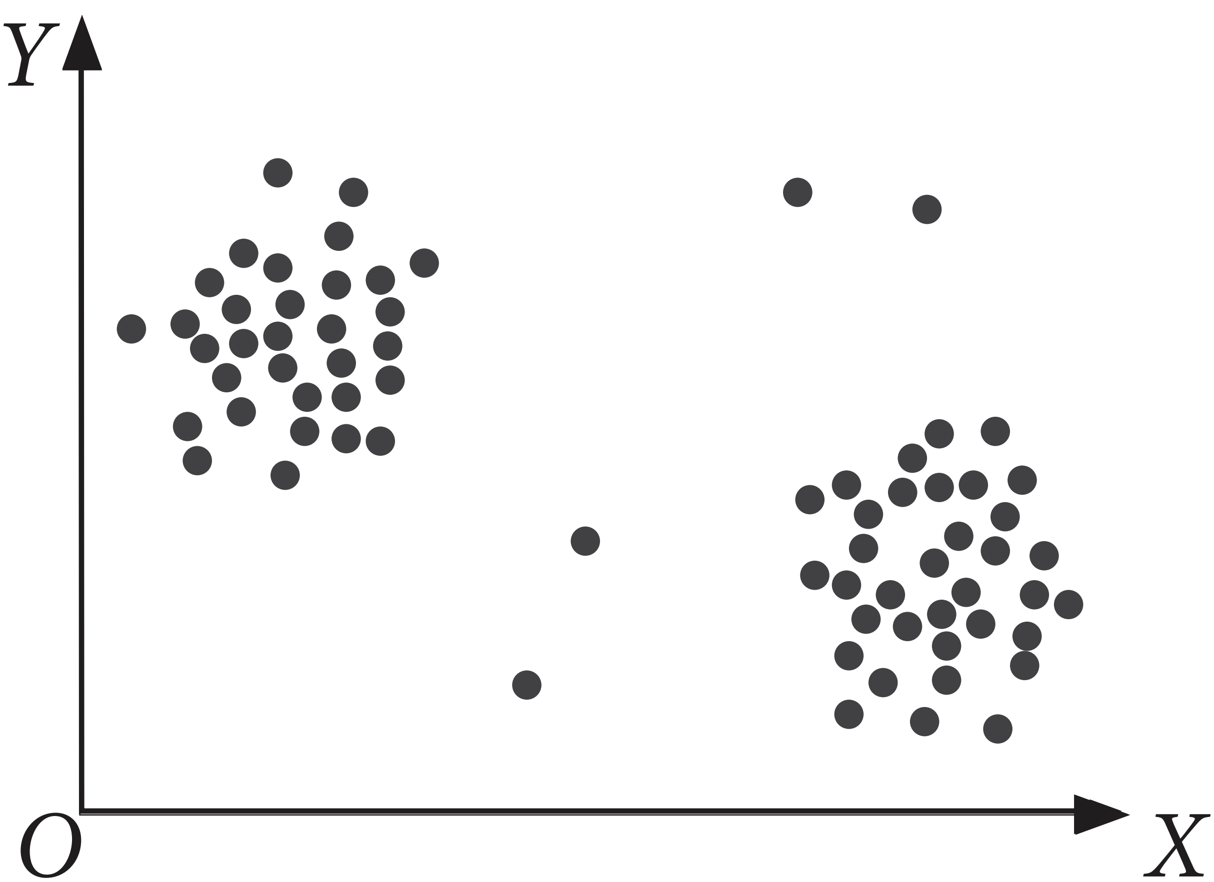
a.



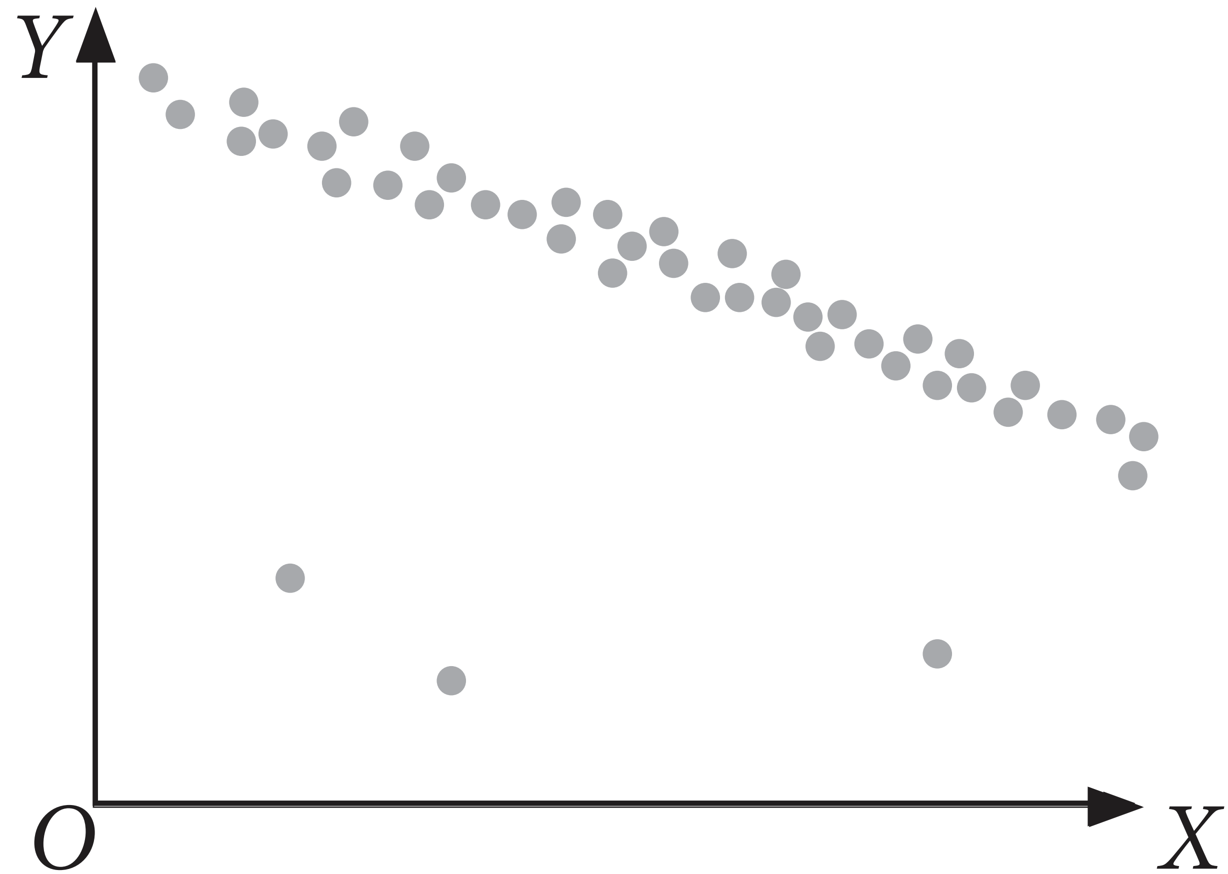
b.



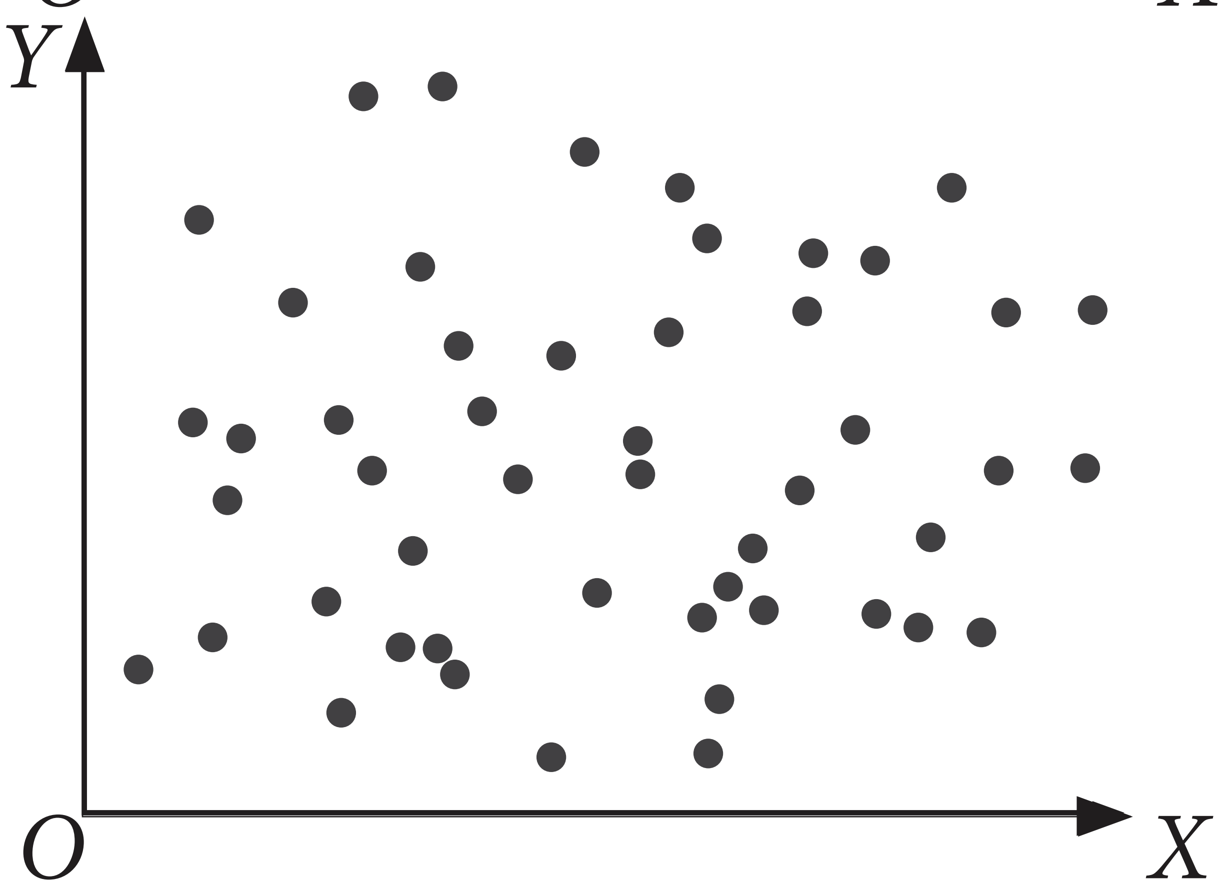
c.



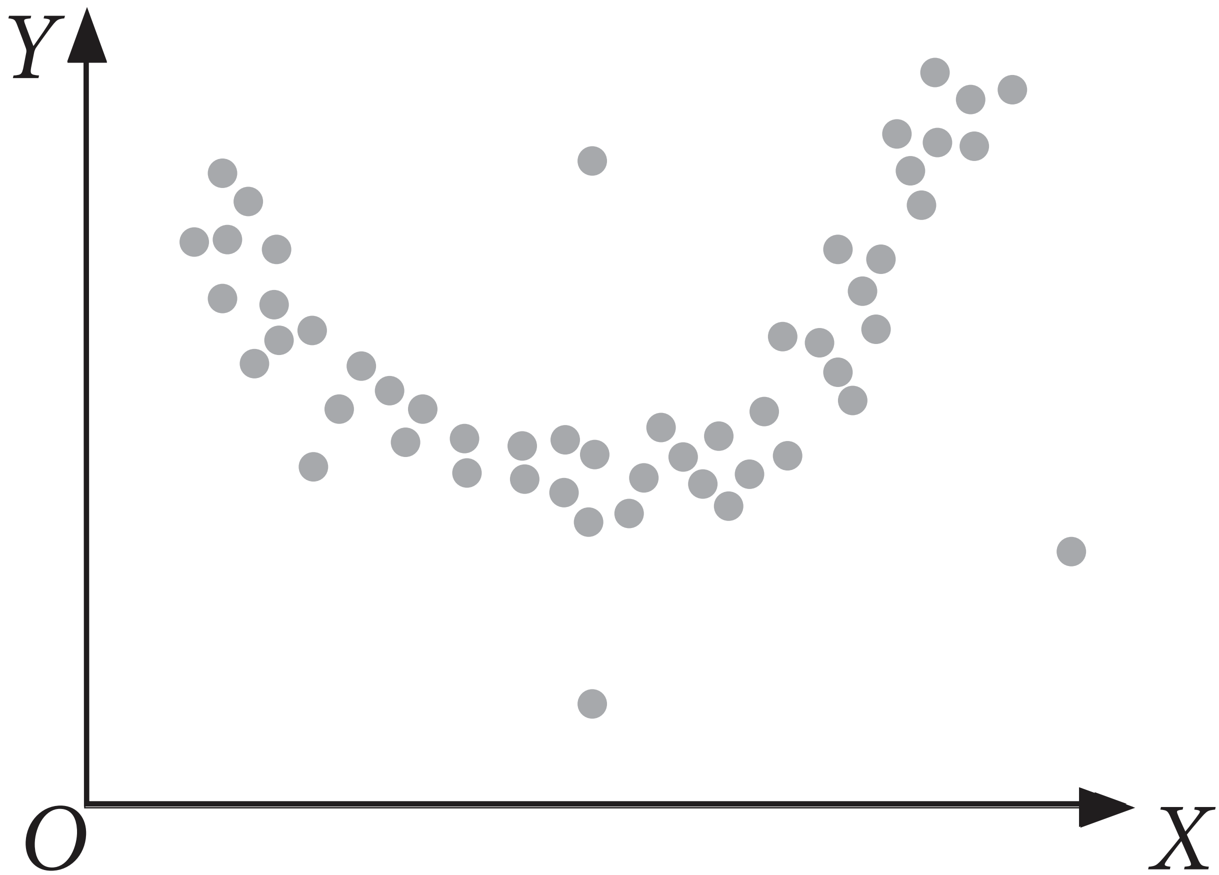
d.



e.



f.



4. Junto con un compañero o compañera, realiza la siguiente actividad.

a. Cada uno elija una variable cuantitativa distinta para analizar y apliquen una encuesta a cada uno de sus compañeros.

b. Organicen los datos en un gráfico de dispersión.

c. Verifiquen si existe correlación entre las características que eligieron. En caso de que no la haya, ¿observan algún otro tipo de relación en los datos?
d. Repitan la actividad anterior un par de veces consultando a otras personas. ¿Varían sus conclusiones al cambiar la muestra?

5. Lee la situación y responde.

Doña Martina es dueña de una panadería y está muy interesada en saber si el monto de sus ventas diarias tiene alguna relación con la cantidad de clientes que van a la panadería en el día. Para ello, registró durante una semana la cantidad de clientes diarios y la recaudación de sus ventas (en miles de $) cada día y elaboró la siguiente tabla:

Cantidad de clientes	Recaudación (en miles de $)
82	125
58	90
50	68
65	95
100	155
115	175
85	115

a. Construye una nube de puntos para los datos (utilizando una graduación conveniente del plano cartesiano).

b. Describe brevemente el comportamiento que se observa en la nube de datos.

c. ¿Se puede verificar la conjetura que tenía doña Martina en términos de la relación clientes y recaudación? ¿Cuál sería dicha relación?

d. ¿Observas datos atípicos? Explica.

e. ¿Crees que una semana de registro de datos es suficiente para verificar la conjetura de doña Martina? Justifica tu respuesta.

f. ¿Crees que tiene sentido hablar de datos atípicos en esta situación?

g. ¿Qué harías tú para que doña Martina pueda tener una respuesta más confiable a su conjetura respecto de la relación de clientes y montos de venta?

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Te cuestionaste los datos que aparecieron en las actividades? ¿Averiguaste más sobre los temas? Explica.

____

____

____

- ¿Crees que el estudio de la relación entre dos variables podría variar si se cambia la muestra en estudio? Justifica tu respuesta.

____

____

____

Relación entre dos variables cualitativas

Objetivo

• Registrar distribuciones de dos características distintas, de una misma población, en una tabla de doble entrada.
En un estudio se quiere determinar si es más probable que un niño tenga asma si tiene padres fumadores que aquel cuyos padres no son fumadores. La tabla de frecuencias resume los resultados.

Tabla de frecuencias

Tipo de familia	Frecuencia
Padres fumadores e hijo con asma	280
Padres fumadores e hijo sin asma	45
Padres no fumadores e hijo con asma	32

Padres no fumadores e hijo sin asma	143

Tabla de contingencia

	Padres fumadores	**Padres no fumadores**
Hijo con asma		
Hijo sin asma		

Conexión con biología

El asma es una enfermedad del sistema respiratorio que causa la inflamación de las vías respiratorias, lo que produce dificultad al respirar.

- Completa la tabla de contingencia a partir de la tabla de frecuencias.

- Según los datos, ¿cuál sería la conclusión del estudio? ¿En qué tabla te fijaste?

____

____

- Escribe una diferencia entre las tablas. Considera, por ejemplo, la cantidad de variables y sus categorías.

____

____

- Cuando se requiere analizar dos características se utilizan las tablas de doble entrada, ya que permiten organizar los datos de forma ordenada y conveniente.

Atención

Los posibles valores de una variable cualitativa reciben el nombre de categorías. Por ejemplo, la variable sexo presenta las categorías hombre y mujer.

Conceptos

- Una tabla de doble entrada o tabla de contingencia es aquella que sirve para contar la cantidad de individuos u objetos con dos tipos de características o variables cualitativas.
- Una tabla de doble entrada está conformada por filas y columnas. Las filas están formadas por las categorías de una variable, y las columnas, por las de la otra variable.

En cada una de las casillas formadas se ubica la cantidad de datos que tienen ambas características simultáneamente.

Conexión con Geografía

El país se divide política y administrativamente en regiones, provincias y comunas. Para la realización de censos y encuestas se utiliza la división en áreas urbana y rural. Para saber más, ingresa a los siguientes links:

http://www19.iadb. org/intal/intalcdi/PE/ 2011/08534.pdf

http://www.subdere. gov.cl/documentacion/ regiones-provincias-ycomunas-de-chile

Ejemplo 1. Considera la siguiente tabla de datos:

Tipo de individuo	Frecuencia
Hombre en zona rural	12
Hombre en zona urbana	54
Mujer en zona rural	16
Mujer en zona urbana	48

Representa la tabla de frecuencias en una tabla de doble entrada y escribe conclusiones a partir de ella.

Para representar la tabla de frecuencias en una tabla de doble entrada puedes seguir estos pasos:

Paso a paso.

1. Identificas las características o variables que se deben relacionar. En este ejemplo, las características son el género y la zona donde se habita, por lo que la tabla tendrá la siguiente forma:

	Rural	**Urbana**
Hombre		
Mujer		

2. Completa las casillas de los cruces con los datos correspondientes

	Rural	**Urbana**
Hombre	12	54
Mujer	16	48

3. Escribe conclusiones a partir de la tabla de contingencia.

En el estudio se consideró a 64 mujeres y 66 hombres. La cantidad de personas en una zona rural es 28, mientras que en la zona urbana es 102. Tanto en hombres como en mujeres hay mayor concentración de personas en la zona urbana.

Actitud

Muchos estudios estadísticos tienen por objetivo ser una base en la toma de decisiones, por lo que deben ser rigurosos y críticos. Cuando realices actividades estadísticas, persigue esta actitud..

- ¿La información presente en una tabla de doble entrada se puede representar con una nube de puntos? Comenta con un compañero.

- ¿Cuándo usarías una tabla de doble entrada en vez de una nube de puntos para representar la relación entre dos variables? Comenta con un compañero o compañera.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. La siguiente tabla de doble entrada muestra las preferencias en deportes (individual y en equipo) de 40 estudiantes de un colegio.

	Futbol	Balonmano	Basquetbol
Natación	2	5	3
Tenis	6	7	8
Correr	1	2	6

Calcula las siguientes probabilidades; para ello, considera que se escoge a un estudiante al azar.

a. La probabilidad de que al estudiante le guste el fútbol y el tenis.
b. La probabilidad de que al estudiante le guste el balonmano y correr.
c. La probabilidad de que al estudiante le guste el tenis.
d. La probabilidad de que al estudiante le guste el básquetbol y el tenis o correr
Lee la situación y responde.

Una persona quiere realizar un estudio para saber cuál es el medio de transporte más usado en la Región Metropolitana. Para ello se encuestó a 40 personas de la zona norte de la región y a 40 de la zona sur y se obtuvieron los siguientes resultados:

Zona norte

M	M	T	A	A	A	M	B
B	T	T	M	A	M	T	T
B	B	A	M	T	T	T	B
M	M	A	B	B	T	T	T
M	M	A	A	M	T	B	M

Zona sur

A	M	T	A	M	T	M	T
A	A	T	B	T	M	T	T
T	B	M	M	T	T	T	B
M	T	A	B	B	B	B	T
M	M	M	A	A	T	B	T

A: Automóvil, **M:** Metro, **T:** Transantiago
B: Bicicleta

a. Identifica las variables consideradas en el estudio.

b. Construye una tabla de doble entrada para los datos anteriores.

c. ¿Cuál es el transporte más usado en la zona norte?

d. ¿Cuál es el transporte más usado en la zona sur? ¿Coincide con el de la zona norte?

e. Calcula la probabilidad de que una persona de la zona norte prefiera andar en bicicleta. ¿Coincide con la probabilidad de que una persona de la zona sur prefiera andar en bicicleta?

f. ¿Cuál es el transporte más usado en la Región Metropolitana?

3. De la página web http://datos.gob.cl/ se puede obtener mucha información de estudios o encuestas del Gobierno de Chile. A continuación se muestra información obtenida de esta página.

Defunciones según grupo de edad, por región, gran grupo de causas de muertes y sexo. Chile, 2010

	Total	<1	1 a 4	5 a 9	10 a 19	20 a 44	45 a 64	65 a 79	80 y mas
Hombres	52.237	1.038	717	111	661	5.047	12.255	17.722	15.232
Mujeres	45.693	824	141	77	306	2.067	7.207	13.265	21.806

104

a. ¿Por qué crees que los datos fueron presentados en una tabla de doble entrada?

b. ¿Cómo piensas que se obtuvieron los datos? Averigua y comprueba si estabas en lo correcto.

c. ¿Qué porcentaje de las personas que fallecieron en ese año tenía menos de 20 años?

d. ¿Qué grupo etario y de qué sexo fue el que tuvo mayor registro de decesos?

e. ¿De qué otra manera se podrían haber representado los datos? Explica tu respuesta.

f. Si al año siguiente se siguiera con este mismo patrón, ¿qué tan probable es que una persona fallecida sea una mujer de edad mayor o igual que 65 años?

g. ¿Observas alguna relación entre la edad y el sexo en la cantidad de defunciones? Explica tu respuesta.

Actitud

Cuando uses información oficial o de un autor, debes indicar y citar de manera adecuada las fuentes que utilizaste. Hay muchas formas de hacer esto. Averigua algunas.

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué ventajas tienen los gráficos de dispersión y tablas de doble entrada respecto de los gráficos de barras simples y tablas de frecuencias?

• ¿Las respuestas y conclusiones que sacaste en las actividades fueron fundadas en los datos y procedimientos matemáticos o en tu intuición o conocimiento previo? Justifica tu respuesta.

Comparación de dos poblaciones

Objetivo

• Comparar poblaciones mediante gráficos de dispersión para dos variables utilizando puntos con colores o separando la nube con una recta de manera intuitiva.

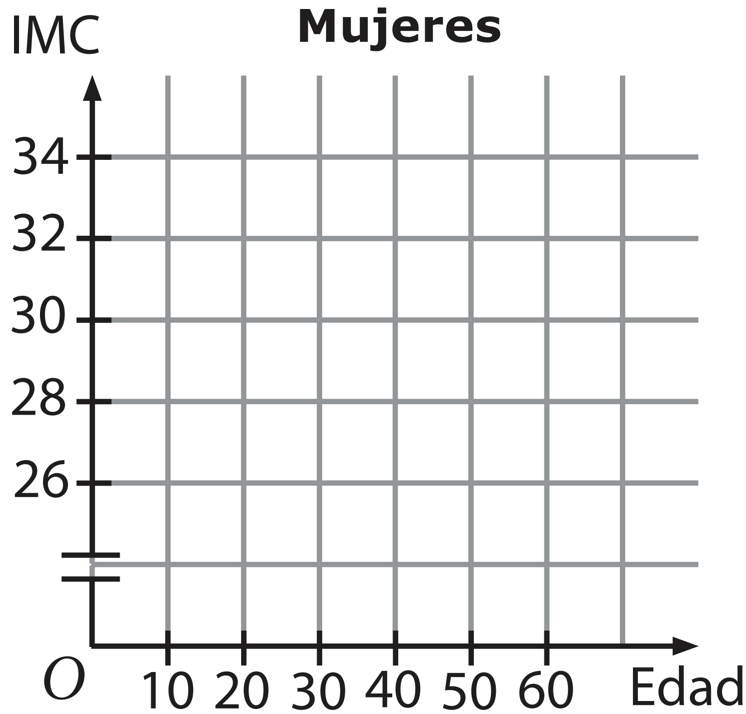
De una población se extrae una muestra de 12 hombres y 12 mujeres, a los cuales se les preguntó su edad y se les midió el IMC (índice de masa corporal).

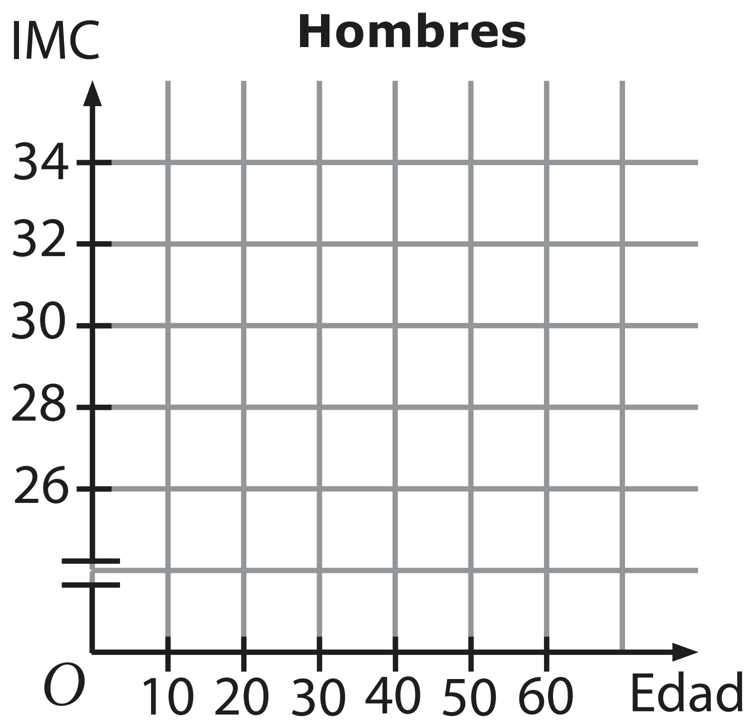
Los datos se registraron en las siguientes tablas.

Mujer	**Edad**	**IMC**
1	34	29
2	45	31
3	18	27
4	23	28
5	29	30
6	36	29
7	57	34
8	20	30
9	45	27
10	31	29
11	54	31
12	41	25

Hombre	Edad	IMC
1	22	19
2	39	25
3	25	22
4	40	21
5	28	20
6	32	31
7	1	24
8	33	22
9	44	21
10	19	16
11	58	26
12	51	24

- Representa, para los hombres y para las mujeres, las variables Edad - IMC en una nube de puntos.





Habilidad

Representar de diversas formas un concepto matemático te ayudará a mejorar su comprensión.

• Escribe una conclusión sobre la relación IMC - Edad en hombres y mujeres a partir de las tablas.

Hombres ______________________________
____
____

Mujeres ______________________________
____
____

• Escribe una conclusión sobre la relación IMC - Edad en hombres y mujeres a partir de las nubes de puntos que construiste. ¿Siguen algún patrón?

Hombres ______________________________

____

____

Mujeres ______________________________

____

____

• A partir de las tablas o de las nubes, compara la relación IMC - Edad de los hombres y mujeres. Escribe una conclusión.

____

____

• ¿Qué dificultad presenta la forma en que se muestran los datos al momento de hacer comparaciones de las poblaciones? Explica.

• Propón una forma de representar los datos para poder realizar una comparación de las poblaciones de manera sencilla.

Conexión con salud

Existen muchos métodos para identificar si se tiene exceso de masa corporal, pero entre los más utilizados está el llamado índice de masa corporal (IMC), que es la razón que existe entre la masa corporal medida en kilogramos, y el cuadrado de la estatura medida en metros.

$$\textbf{IMC} = \frac{\textbf{Masa corporal (kg)}}{\textbf{Estatura}^2\ \textbf{(m3)}}$$

Actitud

Cuando realices análisis estadísticos, fundamenta usando herramientas matemáticas

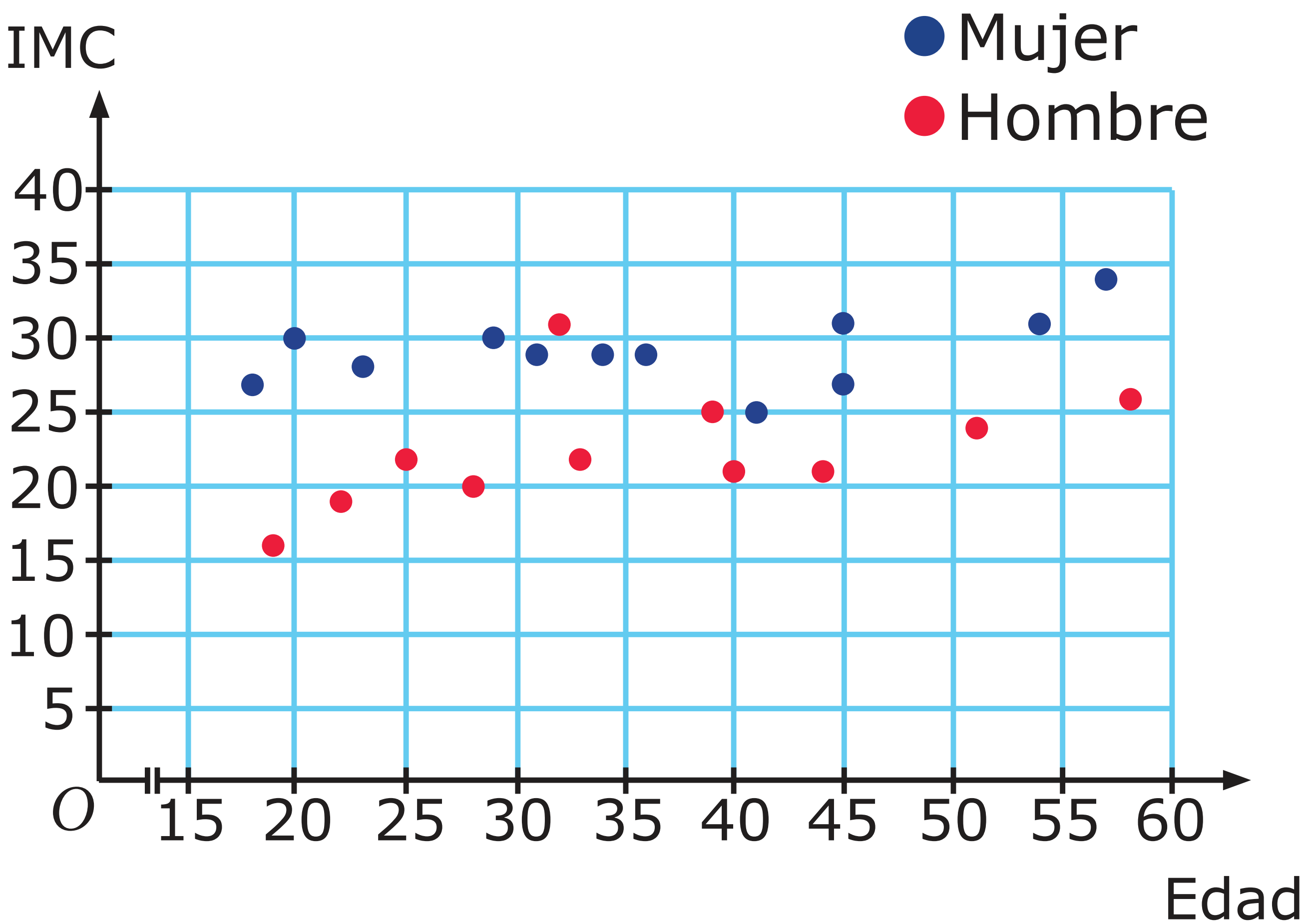
Conceptos

- Una nube de puntos permite realizar comparaciones entre dos poblaciones cuando se relacionan dos variables cuantitativas. Para esto, basta con representar los datos de ambas poblaciones en el mismo gráfico, con distintos colores para distinguirlas, y en la misma escala.

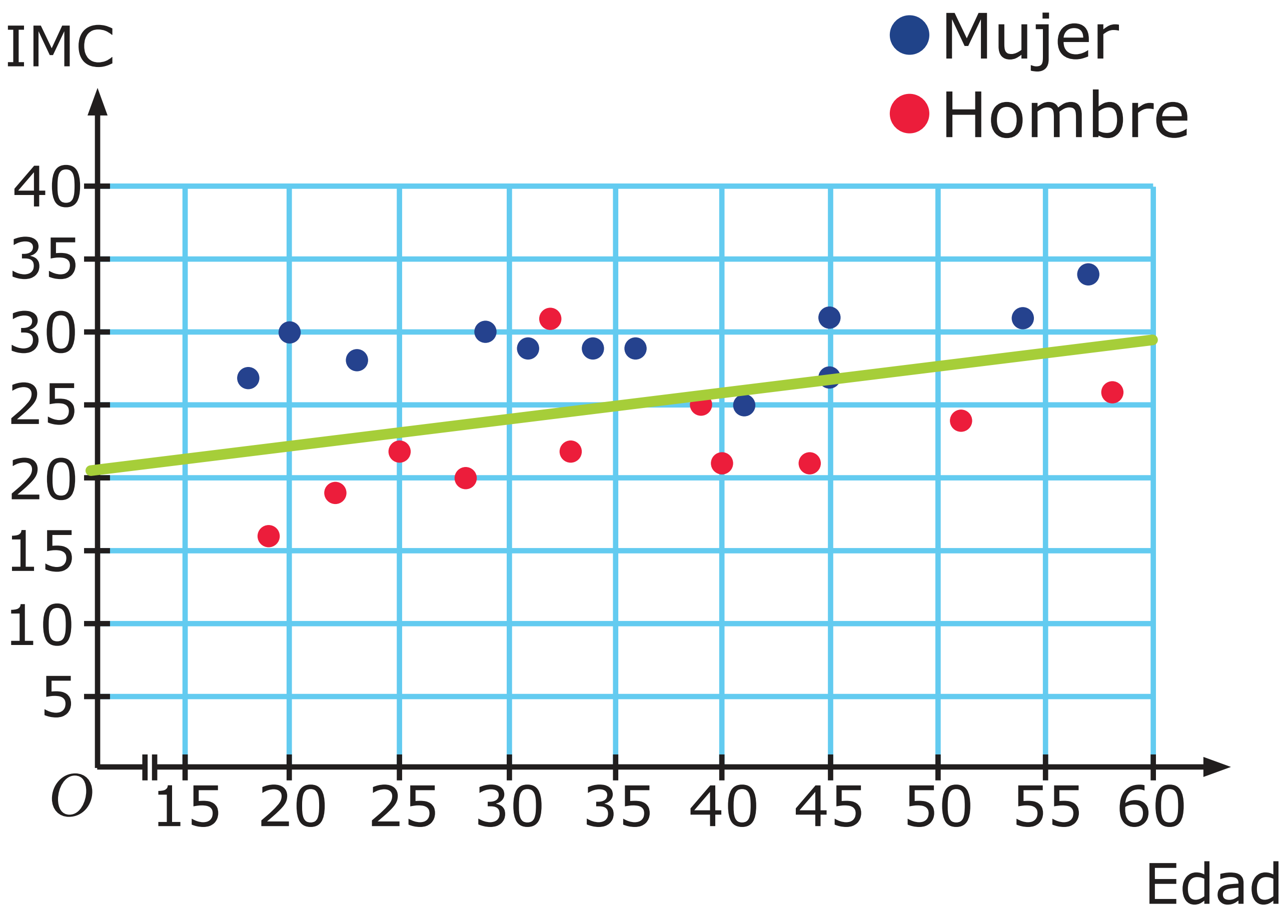
Ejemplo 1. Con los datos de la actividad inicial, genera una nube de puntos para dos características usando dos colores y luego determina si existe una correlación.

Paso a paso.

1. La nube de puntos queda como sigue



2. Puedes trazar una recta de forma intuitiva que separe ambas nubes de puntos para compararlas.

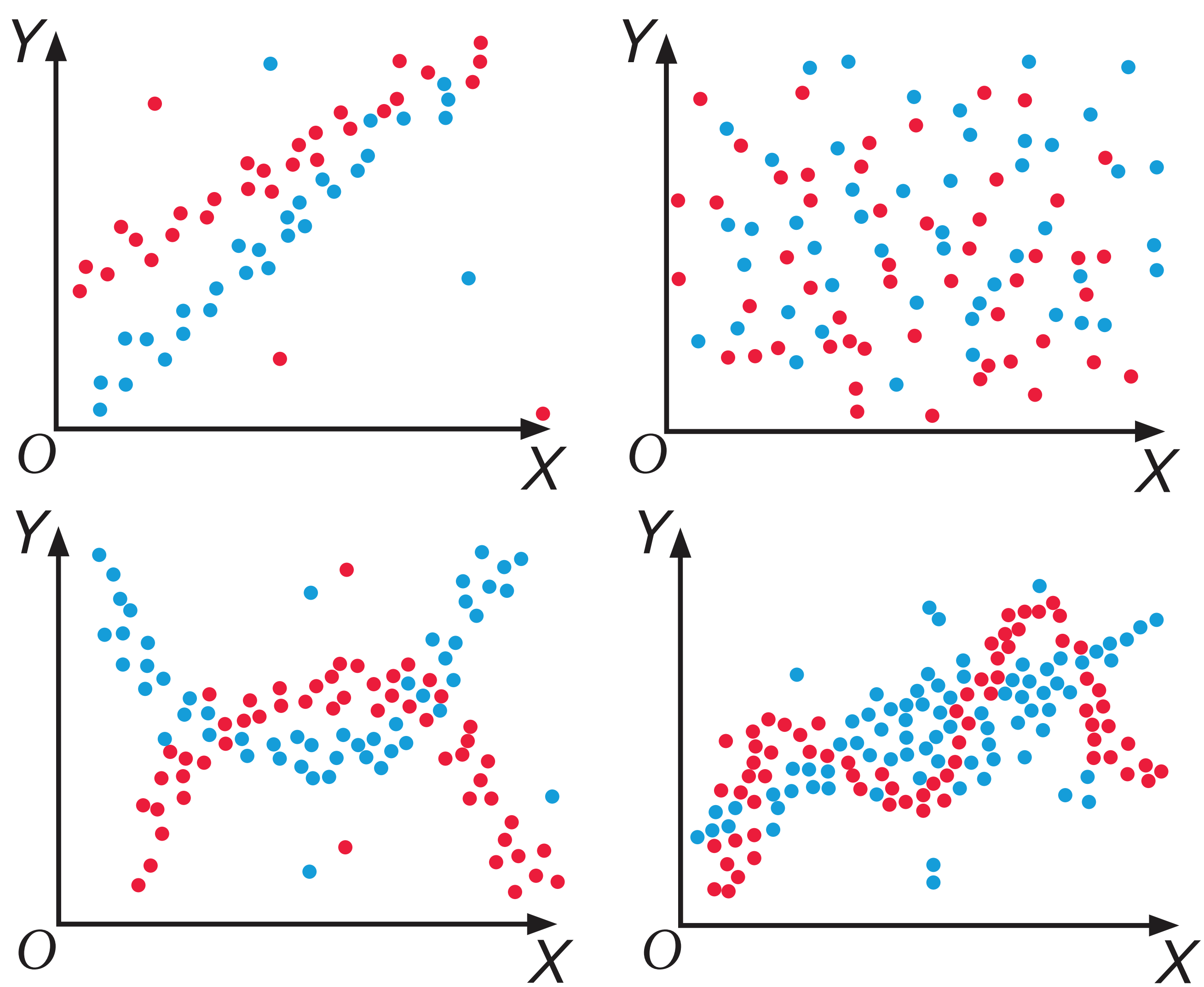


Respuesta: En este caso, podemos concluir que el IMC de la mujer es, en general, mayor que el de los hombres para las mismas edades. Se puede observar que existe correlación lineal.

Ejercicios

Ahora te proponemos ejercicios en los que podrás practicar y aplicar los conceptos y procedimientos estudiados.

1. Observa las siguientes nubes de puntos.



a. Dibuja una línea que, de forma intuitiva, creas que separa de mejor manera los puntos rojos de los puntos azules.

b. Determina si existe o no correlación para los puntos azules y rojos. Justifica tu respuesta en cada caso.

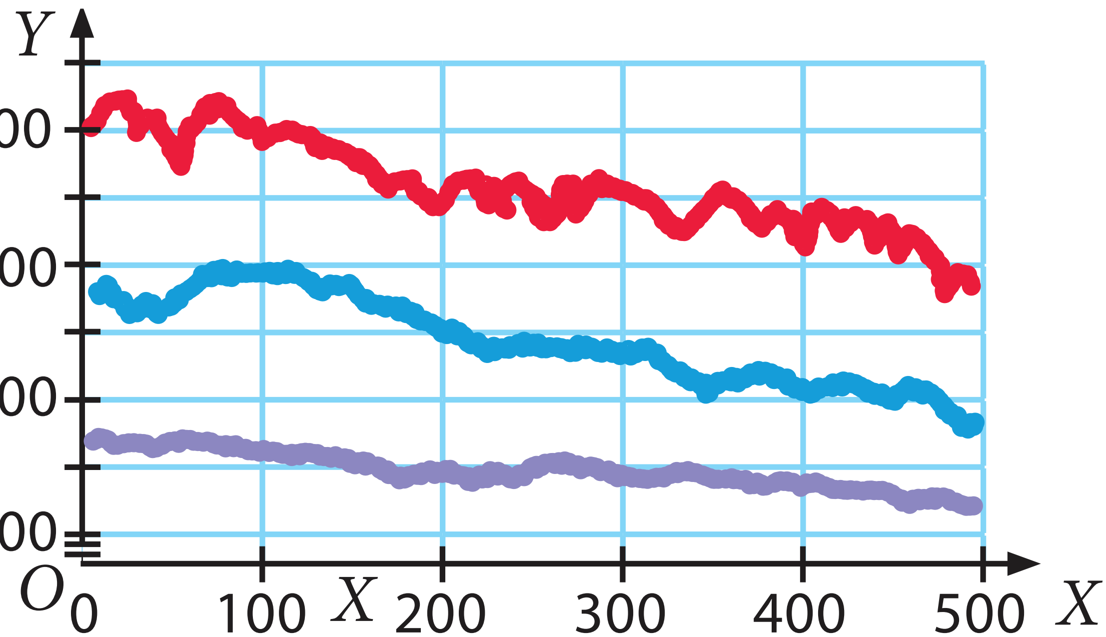
c. Marca, en cada nube, aquellos puntos que consideres aislados. ¿Existe alguna relación entre los puntos aislados rojos y los azules? Explica.

2. Economía

Lee la información y responde.

El mercado bursátil o accionario es un mecanismo mediante el cual dueños de grandes empresas dan la posibilidad a otras personas para que sean parte de ella mediante la compra de sus acciones, para así obtener mayores recursos y poder realizar inversiones.

El gráfico muestra tres índices de precios de acciones en distintos países, los cuales se presentan como nube de puntos.



a. Para cada nube de puntos (roja, azul y morada) traza una recta que represente su tendencia.

b. ¿Cómo es la tendencia de las rectas que obtuviste?

c. Traza también una recta de distinto color a las anteriores que, según tu criterio, separe de mejor manera la nube roja de la azul, y la nube azul de la morada.

d. ¿Qué puedes concluir a partir de lo hecho antes?

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué herramienta estadística matemática utilizaste para analizar la tendencia de datos?

___

___

- ¿Por qué es necesario graficar la información de dos poblaciones en un mismo gráfico?

___

___

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 1

Desarrolla las siguientes actividades de evaluación que te permitirán reconocer lo que has estudiado en este tema.

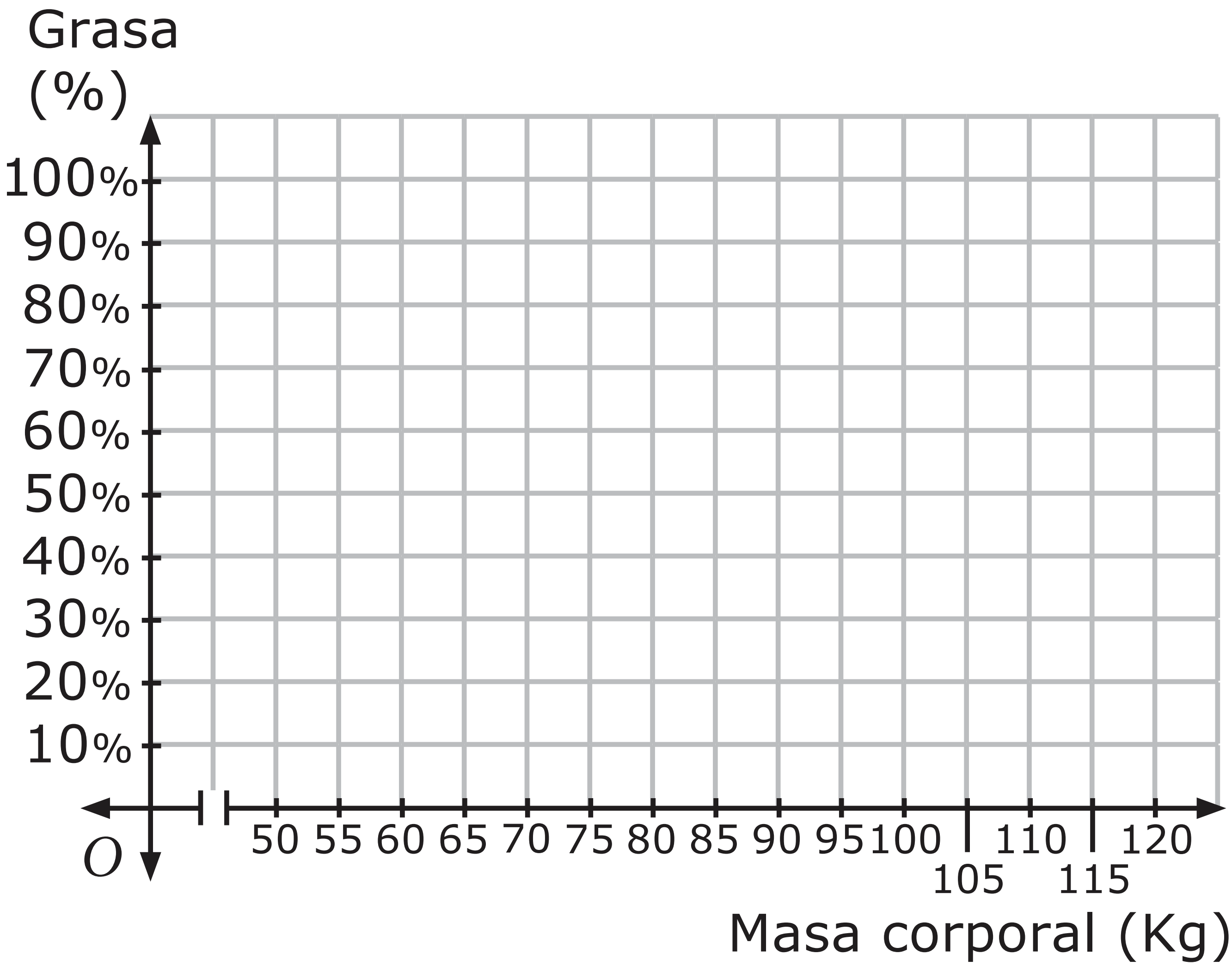
1. Lee la situación y responde.
La tabla muestra el registro de la masa corporal y porcentaje de grasa corporal de una muestra de 20 personas (10 hombres y 10 mujeres). Todas las mujeres tienen la misma talla, al igual que los hombres.

Mujer	Grasa	Masa Corporal
1	20 %	54
2	25%	56
3	30%	60
4	29%	60
5	17%	57
6	35%	65
7	26%	55
8	28%	57
9	23%	56
10	10%	71

Hombre	Grasa	Masa corporal
1	17%	70
2	20%	72
3	12%	70
4	18%	74
5	22%	74
6	34%	92
7	4%	117
8	15%	67
9	22%	72
10	23%	75

a. Representa en una nube de puntos la relación entre la masa corporal y el porcentaje de grasa de las mujeres y de los hombres utilizando distintos colores. (3 puntos)

Porcentaje vs masa corporal



b. ¿Qué puedes deducir a partir de lo que se observa en el gráfico en términos de correlación entre las variables? Explica tu respuesta.
(1 punto)

c. Traza una línea (para cada uno de los grupos de puntos) que mejor represente la relación entre las variables masa corporal y porcentaje de grasa. (1 punto)

____

____

d. ¿Se observan puntos aislados en los gráficos obtenidos? Márcalos y da una posible explicación sobre la presencia de ellos. (2 puntos)

____

____

e. ¿Se puede trazar una línea que separa los dos grupos de puntos? En caso afirmativo, dibújala en el gráfico, de lo contrario explica por qué no es posible. (1 punto)

f. ¿Se puede a partir de lo observado deducir que las mujeres, en general, poseen mayor grasa que los hombres? Justifica su respuesta. (1 punto)

g. La información mostrada, ¿se puede representar en una tabla de doble entrada? Explica tu respuesta. (1 punto)

Verifica tus respuestas en el solucionario junto a un compañero y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1a, 1b y 1g	Registrar distribuciones de dos características distintas en una nube de puntos.		**Logrado:** 6 puntos o más. **Medianamente logrado:** 4 a 5 puntos. **Por lograr:** 3 puntos o menos.
1c, 1d, 1e y 1f	Comparar poblaciones mediante gráficos de dispersión para dos atributos de muestras.		
	Total		

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Utilizaste la estrategia planteada al inicio de este tema? ¿Cuáles otras usaste?

- ¿Has cumplido tus metas iniciales? ¿Qué has hecho para cumplirlas? ¿Qué debes mejorar?

- ¿Es más útil un gráfico de dispersión o una tabla de doble entrada? Justifica tu respuesta.

TEMA 2

Propiedades de la probabilidad

En esta sección recordarás lo que has estudiado en años anteriores y diseñarás una estrategia para desarrollar el Tema 2.

Recuerdo lo que sé

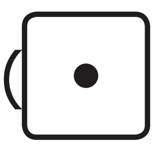
Lee la siguiente información.

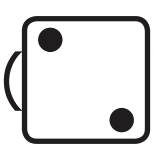
Alejandro se encuentra con su amiga Natalia, quien trae dos dados de 6 caras, numeradas del 1 al 6. Natalia le comenta que un dado es honesto (no está cargado) y el otro es un dado especial, ya que la probabilidad de obtener un número x al lanzarlo es $\frac{x}{21}$.

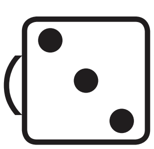
1. ¿Cuál es el espacio muestral de lanzar un dado?

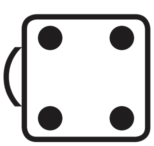
El espacio muestral (Ω) es el conjunto de los resultados posibles de un experimento aleatorio. Por ejemplo, al lanzar una moneda, sus resultados posibles son cara o sello.

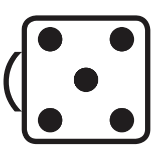
2. Para el dado honesto, aplica la regla de Laplace para determinar la probabilidad de cada resultado posible.

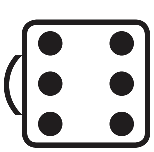
a. $P($  $) =$ ☐

b. $P($  $) =$ ☐

c. $P($  $) =$ ☐

d. $P($  $) =$ ☐

e. $P($  $) =$ ☐

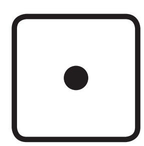
f. $P($  $) =$ ☐

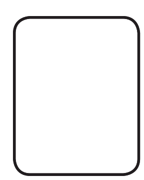
La regla de Laplace permite calcular la probabilidad de un evento cuando los resultados del experimento son equiprobables y el espacio muestral es finito. La probabilidad de un evento *A* se calcula por:

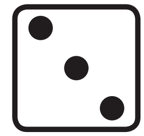
$$P(\mathbf{A}) = \frac{\textbf{Casos favorables}}{\textbf{Casos totales}}$$

$$= \#\mathbf{A}/\#\Omega$$

3. Considera el dado especial de Natalia y completa cada afirmación.

a. La probabilidad de obtener  es _______.

b. La probabilidad de obtener un  es $\frac{5}{21}$.

c. La probabilidad de obtener un  es menor que la probabilidad de obtener un ☐ .

4. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos veces el dado honesto se obtenga un puntaje igual a 2 en el primer lanzamiento y un puntaje igual a 5 en el segundo?

Realiza tus cálculos

Tu respuesta:

Diseño mi estrategia.

Analiza cada caso y plantea una estrategia para desarrollar cada actividad.

5. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar el dado especial de Natalia se obtenga un número par?

Plantea tu estrategia:

Respuesta:

6. A partir del problema anterior, responde las siguientes preguntas.

a. ¿Cuál es la principal dificultad del problema anterior?

b. Si en vez de considerar el dado especial de Natalia se considera el dado honesto y se pide calcular la misma probabilidad del ítem 5, ¿cómo cambia tu estrategia de cálculo? Explica tu respuesta.

Plantea tu estrategia:

Respuesta:

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿En qué otro ámbito crees que se utilicen las probabilidades? ¿Por qué razón piensas que se usan?

____

____

- ¿Qué dificultades tuviste en las actividades anteriores? ¿Cómo podrías resolverlas?

____

____

- ¿Qué conocimientos previos utilizaste?

____

____

Unión e intersección de eventos

Objetivos:

- Elaborar o completar diagramas de árbol.
- Determinar la unión y la intersección de eventos de un experimento aleatorio.

Se lanza un dado de cuatro caras numerado del 0 al 3, y luego una moneda honesta tantas veces como el número que se obtenga en el dado, es decir, si sale 0 no se lanza la moneda, si sale 1 la moneda se lanza una vez, y así sucesivamente.

Escribe el espacio muestral (Ω) correspondiente al experimento. ¿Cuántos elementos tiene?

El espacio muestral tiene _____ elementos.

• Describe los eventos que consideran la obtención de al menos dos caras.

- Considera el evento A, que corresponde a que en el dado se obtuvo un 3 y en los lanzamientos de la moneda, 3 caras; y el evento B, que corresponde a que en el dado se obtuvo un 3 y en los lanzamientos de la moneda, tres sellos. ¿Cuál es el evento que corresponde a que en el dado se haya obtenido un 3 y en los lanzamientos de la moneda, tres sellos o tres caras? ¿Cómo se relaciona con el evento A y el B?

Atención

Una moneda o un dado se dice honesto si no está cargado

Conceptos

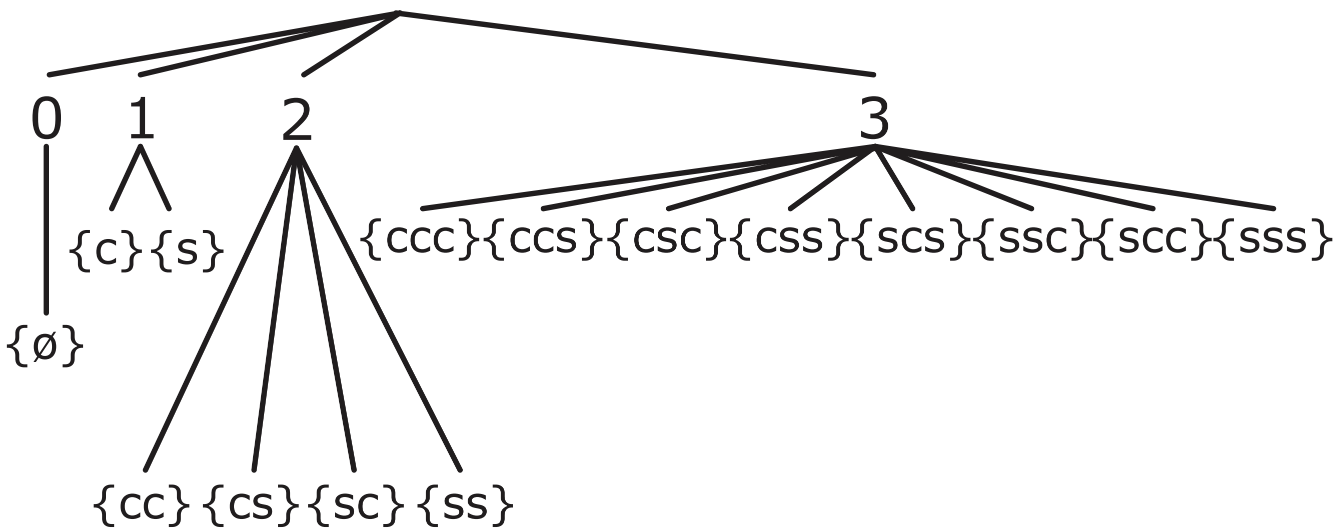
- Dados dos eventos A y B, se define el evento unión de A y B como aquel en el que cada elemento pertenece a A o pertenece a B, es decir, a uno de los dos eventos o a ambos.

- Simbólicamente se denota por $A \cup B$.

Ejemplo 1. Considera que los resultados del experimento aleatorio de la actividad inicial son equiprobables. Usa la regla de Laplace para calcular la probabilidad de la unión de los eventos C y D, en que C corresponde a los resultados, cuyo lanzamiento del dado se obtuvo 2 y D, a los resultados que tienen por lo menos dos sellos.

Para responder a la pregunta, puedes seguir estos pasos:

1. Construyes un diagrama de árbol para conocer los posibles resultados del experimento. Recuerda que cada rama representa un resultado.



El espacio muestral tiene 15 elementos, es decir, $\#\Omega = 15$.

2. Identificas los elementos de cada evento.

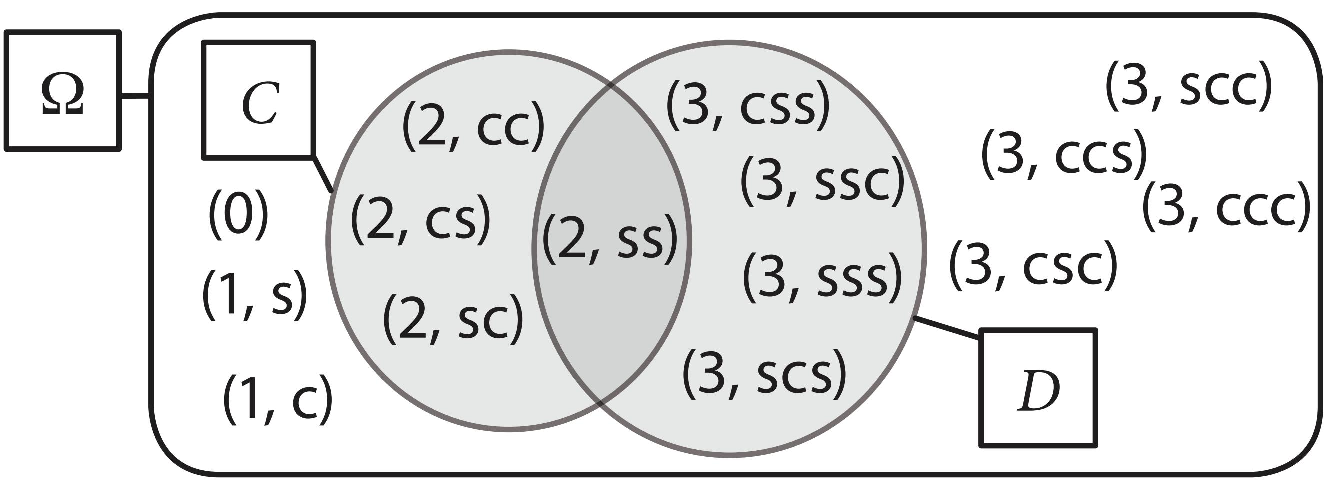
C = {(2, cc), (2, cs), (2, sc), (2, ss)}

D = {(2, ss), (3, css), (3, scs), (3, ssc), (3, sss)}

3. Describes la unión de los eventos, es decir, el conjunto que tiene los elementos de ambos eventos.

$$C \cup D = \{(2, cc), (2, cs), (2, sc), (2, ss), (3, css), (3, scs), (3, ssc), (3, sss)\}$$

El evento $C \cup D$ tiene 8 elementos, es decir, $\#(C \cup D) = 8$. El siguiente diagrama representa los eventos, su unión y el espacio muestral.



4. Aplicas la regla de Laplace para calcular la probabilidad de la unión.

$$P(C \cup D) = \frac{\#(C \cup D)}{\#\Omega} = \frac{8}{15}$$

Atención

La suposición de que el dado y la moneda sean honestos permite asumir que los resultados del experimento son equiprobables.

Atención

El diagrama usado para representar el espacio muestral y los eventos se llama diagrama de Venn.

Conceptos

- Dados dos eventos A y B, se define el evento intersección de A y B como aquel en que cada uno de sus elementos pertenece a A y pertenece a B, es decir, todos los elementos comunes de A y B.

- Simbólicamente se denota por $A \cap B$.

Habilidad

Cuando construyes diagramas en situaciones problemas estás desarrollando la habilidad de representar.

Ejemplo 2. Considera los eventos C y D del ejemplo 1, en el que C corresponde a los resultados en cuyo lanzamiento del dado se obtuvo 2 y D, a los resultados que tienen por lo menos dos sellos. Calcula la probabilidad de la intersección de los eventos. Para responder a la pregunta, puedes seguir estos pasos:

Paso a paso.

1. A partir del diagrama del ejemplo 1, se tiene que el espacio muestral tiene 15 elementos, es decir, $\#\Omega = 15$.

2. Del ejemplo 1 se tienen los elementos de cada evento.

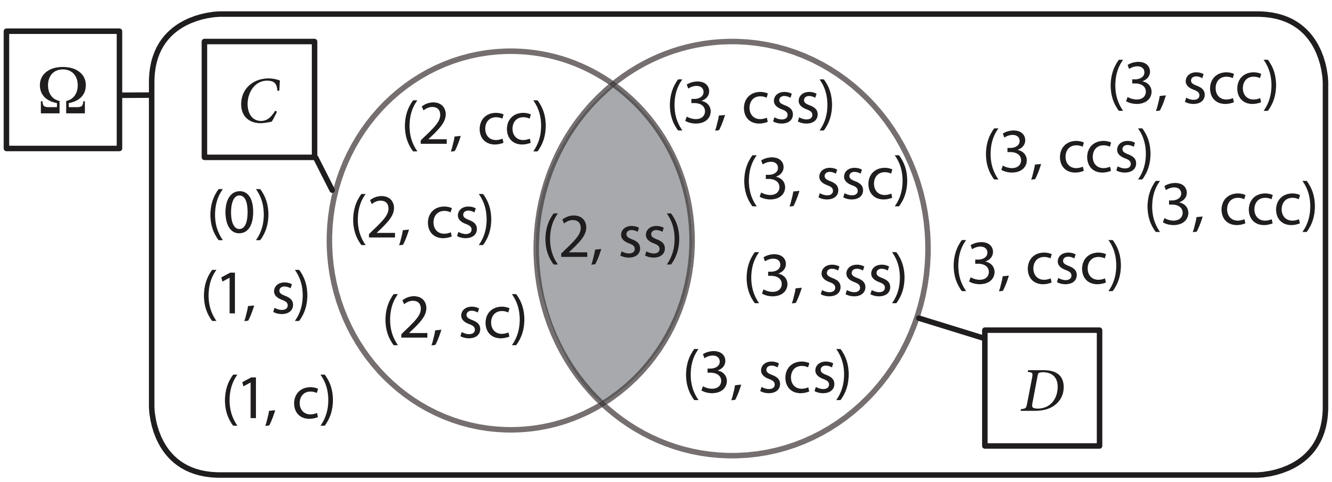
$C = \{(2, cc), (2, cs), (2, sc), (2, ss)\}$

$D = \{(2, ss), (3, css), (3, scs), (3, ssc), (3, sss)\}$

3. Describes la intersección de los eventos, es decir, el conjunto que tiene los elementos comunes de ambos eventos.

C ∩ D = {(2, ss)}

El evento C ∩ D tiene 1 elemento, es decir, #(C ∩ D) = 1. El siguiente diagrama representa los eventos, su intersección y el espacio muestral.



4. Aplicas la regla de Laplace para calcular la probabilidad de la intersección.

$$P(C \cap D) = \#(C \cap D)/\ \#\Omega = \frac{8}{15}$$

- ¿Cómo crees que facilita el cálculo de probabilidades el uso de un diagrama de Venn? Comenta con un compañero o compañera.

- ¿Qué evento tiene más elementos, la unión o la intersección? ¿Siempre se cumple una de estas relaciones? Justifica tu respuesta.

Conceptos

En problemas de planteo, la unión de eventos está asociada a la disyunción o. Por otra parte, la intersección de eventos se asocia con la conjunción y. En el siguiente ejemplo se muestra el uso de estas conjunciones y su relación con la unión e intersección de eventos.

Ejemplo 3. Considera el experimento de lanzar dos veces un dado honesto de seis caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea 6 y que en el primer lanzamiento se obtenga mayor puntaje que en el segundo?

Paso a paso.

Para responder la pregunta, puedes seguir estos pasos:

1. Identificas el espacio muestral. Lo puedes representar por un conjunto de pares ordenados, donde la primera coordenada representa el puntaje del primer lanzamiento y la segunda, la del segundo.

Ω = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

El espacio muestral tiene 36 posibles resultados, es decir, $\#\Omega = 36$.

2. Describes los eventos involucrados en el problema. El evento E_1 está formado por todos aquellos resultados en los cuales la suma de los puntos en los dados es 6.

$$E_1 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

El evento E_2 considera los pares en que la primera coordenada es mayor que la segunda.

$$E_2 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$$

3. Para resolver el problema debes calcular la probabilidad de que ocurran el evento E_1 y el evento E_2, es decir, su intersección.

$$E_1 \cap E_2 = \{(4, 2), (5, 1)\}$$

El evento $E_1 \cap E_2$ tiene 2 elementos, es decir, $\#(E_1 \cap E_2) = 2$.

4. Aplicas la regla de Laplace para calcular la probabilidad de la intersección.

$$P(E_1 \cap E_2) = \#(E_1 \cap E_2)\ \#\Omega = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Respuesta: La probabilidad de que la suma de los puntos sea 6 y que en el primer lanzamiento se obtenga mayor puntaje que en el segundo es $\frac{1}{18}$.

Atención

Si la pregunta del problema hubiera requerido calcular la probabilidad de ocurrencia del evento E_1 o del E_2, se tendría que determinar la unión de los eventos.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Considera el siguiente experimento aleatorio:

Se lanza una moneda. Si sale sello se lanza un dado y termina el experimento. Si sale cara, se lanza nuevamente la moneda y se analiza el resultado. Esto se repite a lo más 4 veces si sale cara consecutivamente.
Construye un diagrama de árbol para representar el experimento aleatorio y calcula las siguientes probabilidades usando la regla de Laplace.

a. La probabilidad de obtener un puntaje mayor que 4.

b. La probabilidad de obtener 3 caras.

c. La probabilidad de obtener 3 caras o un número primo de puntos.

d. La probabilidad de obtener un puntaje igual a 1.

e. La probabilidad de obtener un 3 o un 4.

f. La probabilidad de obtener un 1, un 4 o un sello.

g. Si en el primer lanzamiento de moneda salió una cara, la probabilidad de obtener un número menor que 3.

h. Si en el primer y segundo lanzamiento se obtuvo una cara, la probabilidad de obtener un número impar.

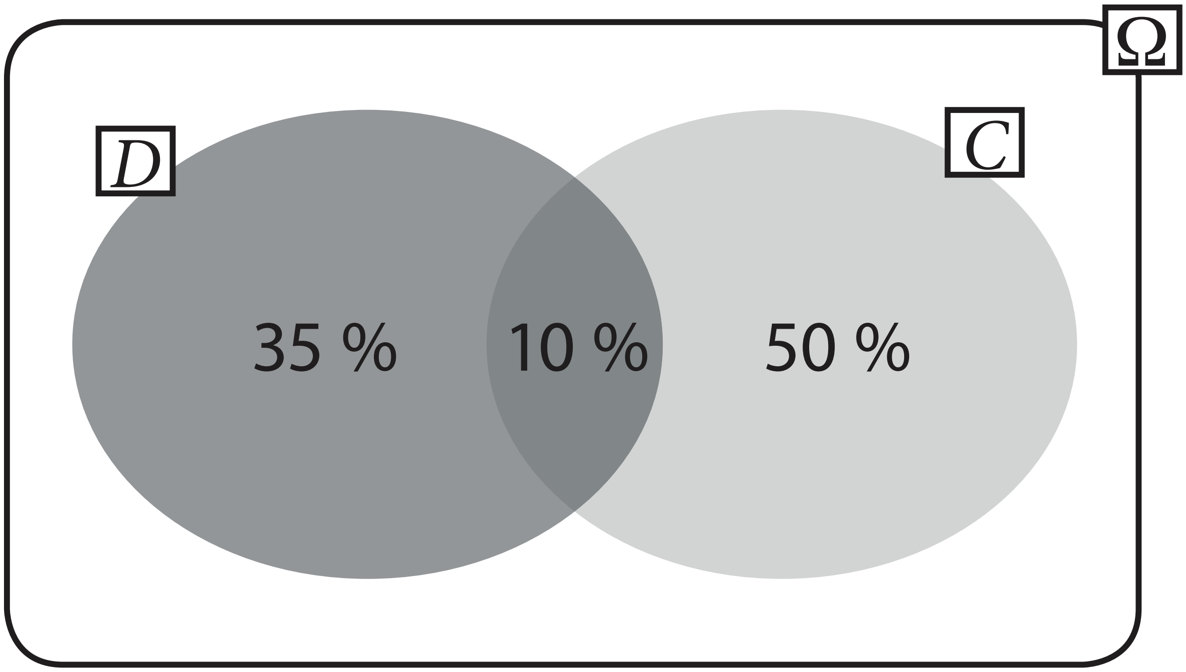
2. Julia realiza el experimento aleatorio de extraer cuatro tarjetas (A, B, Z, O) de la bolsa, una tras otra, y ver la palabra que resulte, tenga o no sentido.

a. Usa un diagrama de árbol para determinar todas las posibles palabras que se pueden formar.
b. Describe el evento de las palabras que empiezan con la letra B. Nómbralo por E_1.
c. Describe el evento de las palabras que terminan con la letra Z. Nómbralo por E_2.
d. Describe el evento correspondiente a la unión de los eventos E_1 y E_2.
e. Describe el evento correspondiente a la intersección de los eventos E_1 y E_2.
f. Calcula la probabilidad de los eventos E_1, E_2, $E_1 \cup E_2$ y $E_1 \cap E_2$.
g. ¿Observas alguna relación entre las probabilidades obtenidas? Descríbela.

3. Lee la información y responde.

El diagrama de Venn que se muestra presenta la información que registró una tienda de calzado femenino. Dicha información está relacionada con los diferentes medios de pago que utilizan sus clientes al adquirir alguno de sus zapatos.

Los pagos que se registraron fueron hechos con tarjeta de crédito o con tarjeta de débito, de tal forma que C es el evento en que la persona paga con tarjeta de crédito y D es el evento en que la persona paga con tarjeta de débito.



Calcula la probabilidad de que al seleccionar uno de los clientes al azar, este haya pagado con:

a. Tarjeta de crédito.
b. Tarjeta de débito.
c. Tarjeta de débito una parte, y la otra con tarjeta de crédito.
d. Cualquier otra forma de pago diferente a tarjeta de crédito o tarjeta de débito.
e. Tarjeta de crédito o con tarjeta de débito.

Se sabe que quienes hicieron un pago diferente a tarjeta de débito o de crédito usaron dinero en efectivo. Teniendo en cuenta esta nueva condición, halla la probabilidad de que:

f. El pago fuese con tarjeta de crédito o en efectivo.
g. El pago fuese con tarjeta de débito o en efectivo.

Reflexiona sobre tu trabajo

• ¿Qué representación te parece mejor para el cálculo de probabilidades: los diagramas de árbol o los diagramas de Venn? Justifica tu respuesta.

____

____

• ¿Qué estrategia fue la que más usaste para el cálculo de probabilidades en las actividades? ¿Por qué?

____

____

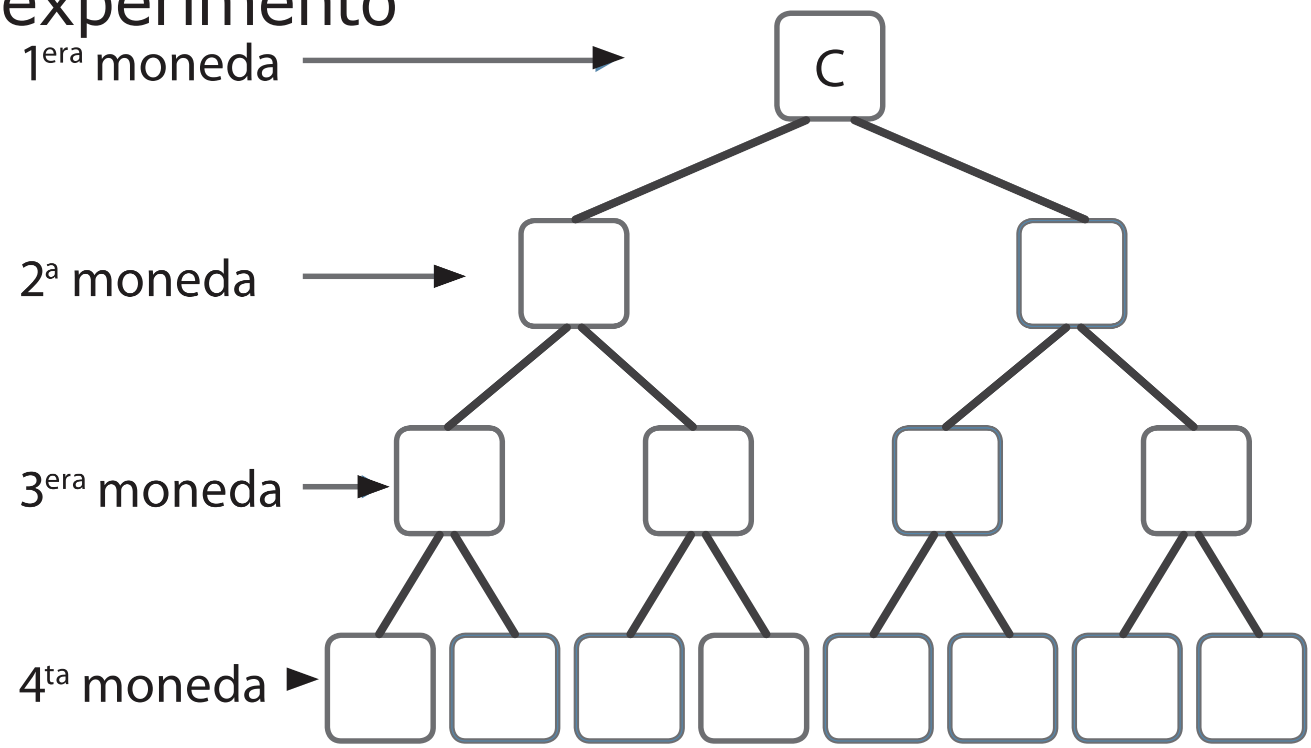
Objetivo:

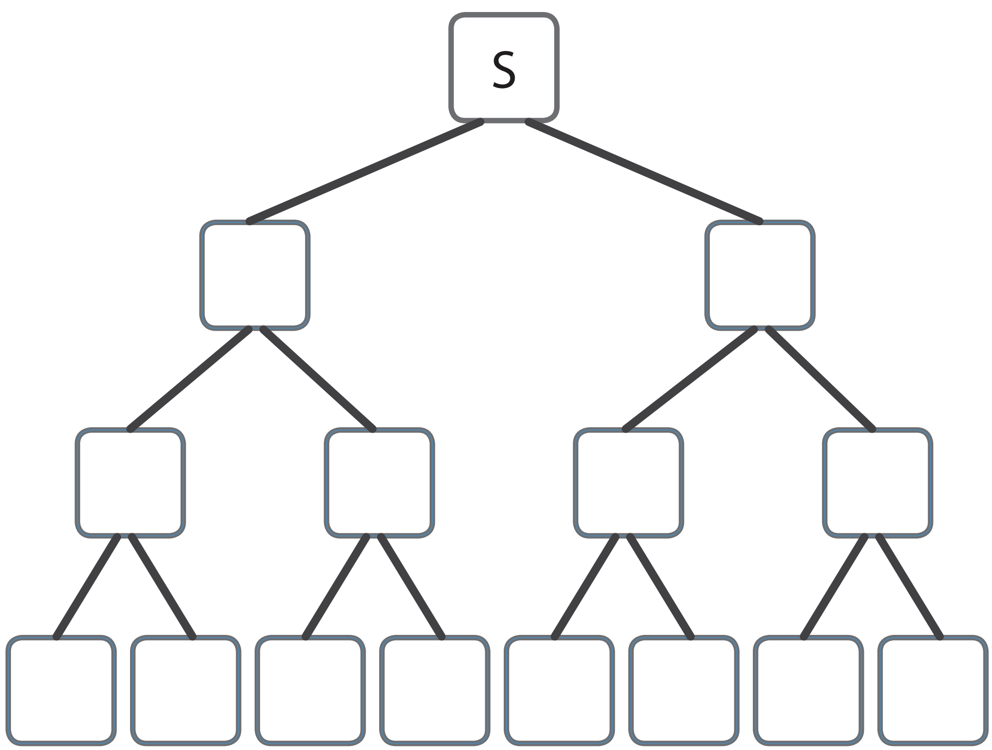
• Desarrollar la regla de probabilidad aditiva y aplicarla en la resolución de problema.

Reglas aditivas de la probabilidad

Un profesor de Matemática, con el objetivo de enseñar probabilidades, toma cuatro monedas honestas de su bolsillo y las tira sobre la mesa.

• Completa el diagrama de árbol para representar el espacio muestral del experimento





• ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral? ¿Se puede decir que cada resultado es equiprobable? Justifica tu respuesta.

____

____

• Considera el evento A, en el que en todas las monedas se obtuvo cara, y el evento B, en el que todas resultaron sello. Calcula las siguientes probabilidades, usando la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \qquad P(B) = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$P(A \cup B) = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \qquad P(A \cap B) = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

- ¿Cómo se relacionan las probabilidades anteriores?

____

____

- ¿Crees que la relación anterior es una regla general? Si tu respuesta es afirmativa, justifícala usando un esquema, en caso contrario, da un ejemplo.

____

____

Cada resultado posible del experimento aleatorio es un evento. En muchos textos los llaman eventos elementales. Por su estructura, estos eventos no tienen elementos en común. A continuación, veremos la relación entre eventos que no tienen elementos en común y la probabilidad de la unión.

Conceptos

- Dos eventos son **disjuntos** si no tienen elementos en común, es decir, no pueden ocurrir de manera simultánea, entonces la intersección entre los eventos es vacía.

- Si los eventos son **disjuntos**, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

- La probabilidad del evento que no tiene elementos (vacío) es cero, es decir, $P(\varnothing) = 0$.

- En general, la **probabilidad de la unión** de eventos se calcula como:
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- A estas propiedades se las conocen como **reglas aditivas de la probabilidad**.

Ejemplo 1. Se extrae al azar una carta de una baraja inglesa. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta extraída sea un trébol o una J de corazón?

Paso a paso
Para resolver el problema, puedes seguir estos pasos.

1. Identificas los eventos involucrados. En este caso son: El evento A, como aquel en que la carta extraída fue una J de corazón. El evento B, como aquel en que la carta extraída fue un trébol.

2. Verificas si los eventos son disjuntos. Para esto, debes determinar si los eventos pueden ocurrir de forma simultánea. En este caso, la respuesta es no, porque una carta no puede ser trébol y corazón a la vez, es decir, los eventos son disjuntos.

3. Por lo anterior, la probabilidad de la unión de los eventos será calculada simplemente por $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

4. Calculas la probabilidad de cada evento, $P(A) = \dfrac{1}{52}$ y $P(B) = \dfrac{13}{52}$.

Entonces,

$$P(A \cup B) = \frac{1}{52} + \frac{13}{52} = \frac{14}{52} = \frac{7}{26}$$

Respuesta: La probabilidad de que la carta extraída sea un trébol o una J de corazón es $\dfrac{7}{26}$.

¿Por qué cuando los eventos no son disjuntos se debe restar la intersección de los eventos? Comenta con un compañero o una compañera. Puedes realizar un esquema con un diagrama de Venn para comprender la idea.

Si se quiere calcular la probabilidad de la unión de tres eventos, ¿cómo crees que sería la fórmula en el caso de que sean eventos disjuntos y en el caso de que no lo sean? Comenta con un compañero o una compañera.

Atención

La baraja inglesa es un conjunto de naipes o cartas formado por 52 unidades repartidas en cuatro pintas, cada una con 13 cartas: trébol, corazón, diamante y picas; y 2 comodines. En este texto consideraremos la baraja sin comodines

Ejemplo 2. Se extrae al azar una carta de una baraja inglesa. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta extraída sea un trébol o una J?

Paso a paso.

A diferencia del ejemplo anterior, la J puede tener cualquier pinta. Para resolver el problema, puedes seguir estos pasos.

1. Identificas los eventos involucrados. En este caso son: El evento C, como aquel en que la carta extraída fue una J. El evento B, como aquel en que la carta extraída fue un trébol.

2. Verificas si los eventos son disjuntos. Para esto, debes determinar si los eventos pueden ocurrir de forma simultánea. En este caso, la respuesta es sí, porque la carta extraída puede ser una J de trébol, es decir, los eventos no son disjuntos.

3. Por lo anterior, la probabilidad de la unión de los eventos será calculada simplemente por

$$P(C \cup B) = P(C) + P(B) - P(C \cap B).$$

4. Realizas los cálculos.

$$P(C) = \frac{4}{52}, \ P(B) = \frac{13}{52}, \ P(C \cap B) = \frac{1}{52}.$$

$$\text{Entonces, } P(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52}$$

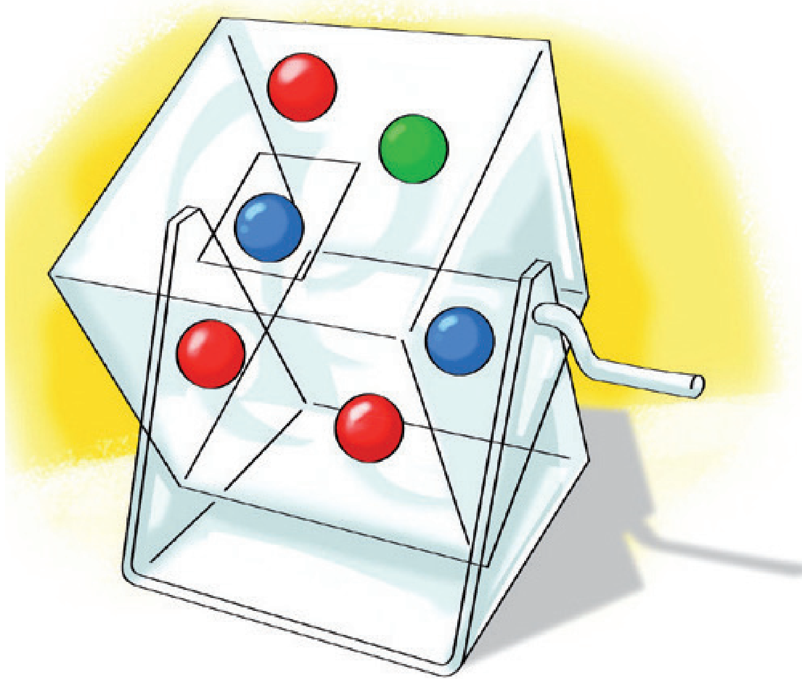
$$= \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

Respuesta: La probabilidad de que la carta extraída sea un trébol o una J es $\frac{4}{13}$.

Habilidad

El ejemplo 3 se puede resolver aplicando directamente la regla de Laplace, sin embargo conocer y usar nuevas estrategias y propiedades desarrolla tu habilidad de resolver problemas.

Ejemplo 3. Observa la tómbola de la imagen. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola verde o una roja?



Paso a paso.

Para resolver el problema, puedes seguir estos pasos.

1. Identificas los eventos involucrados. El evento A se puede definir como aquel en que la bola extraída es verde y el evento B, como aquel en que la bola extraída es la roja.

2. Determinas si los eventos son disjuntos. Los eventos son disjuntos, ya que una bola no puede tener dos colores.

3. La probabilidad de la unión de los eventos será calculada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

4. Realizas los cálculos considerando que los resultados del experimento son equiprobables y se puede usar la regla de Laplace.

$$P(A) = \frac{1}{6} \text{ y } P(B) = \frac{3}{6},$$

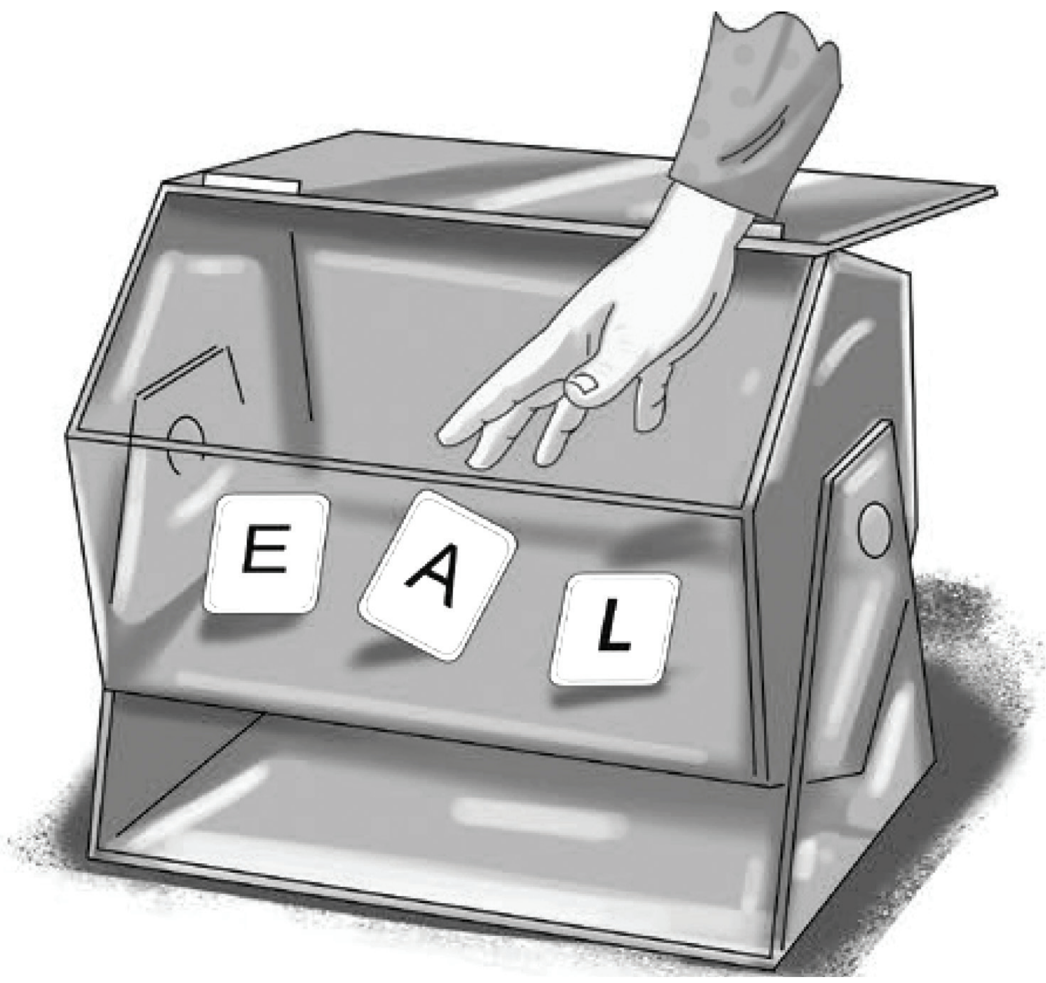
por lo que $P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Respuesta: La probabilidad de que la bola extraída sea verde o roja es $\frac{2}{3}$.

Conceptos

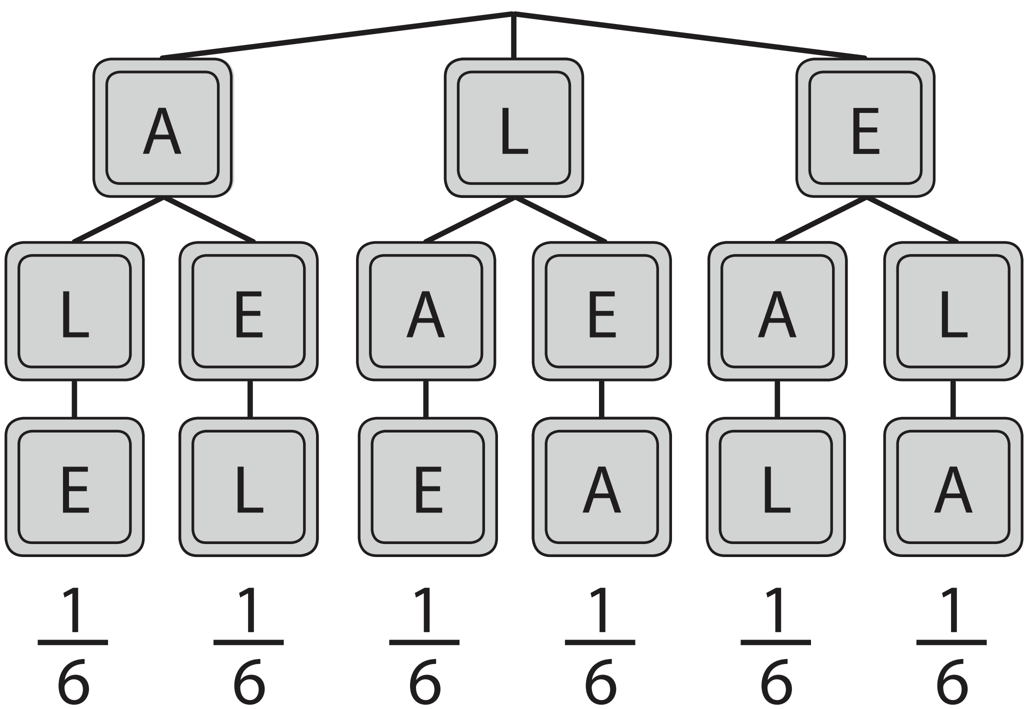
- Cuando el experimento aleatorio se puede representar mediante un diagrama de árbol, cada resultado representado por ramas distintas es un evento disjunto de los demás. Por lo tanto, la probabilidad de la unión de eventos de cada rama es la suma de las probabilidades de cada una.

Ejemplo 4. Francisca extrae, sin mirar, una tras otra, todas las tarjetas de la tómbola para formar una palabra, con o sin sentido, en el orden que aparecen. ¿Cuál es la probabilidad de que la palabra extraída termine con la letra A o con la L?



Para responder a la pregunta del problema, puedes seguir estos pasos:

1. Representas los resultados en un diagrama de árbol.



2. Cada rama del árbol representa un posible resultado de la extracción, es decir, un evento elemental disjunto de los demás. Como hay seis posibles palabras, la probabilidad de cada uno es de $\frac{1}{6}$.

3. Defines los eventos. El evento A corresponde a que la palabra formada termine con la letra A, y el evento B, a que la palabra formada termine con la letra M. Se debe calcular $P(A \cup B)$.

4. Calculas la probabilidad de cada evento. Como cada evento está formado por eventos elementales disjuntos, la probabilidad de cada uno se calcula como la suma de las probabilidades de los eventos elementales.

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

$$P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Como A y B también son disjuntos, la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades.

$$P(A \cup B) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Respuesta: La probabilidad de que la palabra formada termine con la letra A o con la letra L es $\frac{2}{3}$.

Visita la web:

Para saber más sobre las propiedades de la probabilidad, visita el siguiente sitio web: *http://www.hrc.es/bioest/Probabilidad_14.html*

Actitud

Recuerda que las respuestas y soluciones a problemas deben estar justificadas por tus conocimientos matemáticos.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Se lanzan dos dados honestos en una mesa lisa. Calcula la probabilidad de los siguientes eventos.

a. Que la suma de los puntos sea 8.
b. Que la suma de los puntos sea 10.
c. Que la suma de los puntos sea 8 o 10.
d. Que se obtenga el mismo puntaje en ambos dados.
e. Que la suma de los puntos sea 8 o que se obtenga igual puntaje en ambos dados.
f. Que la suma de los puntos sea menor que 7 o que se obtenga igual puntaje en ambos dados.

g. Que la suma de los puntos sea 8 o se obtenga al menos un número primo de puntos en uno de los dados.
h. Que la suma de los puntajes sea un número primo o en ambos dados se obtenga el mismo puntaje.
i. Que la suma de los puntajes sea un número par o un número primo.

2. Resuelve los siguientes problemas.

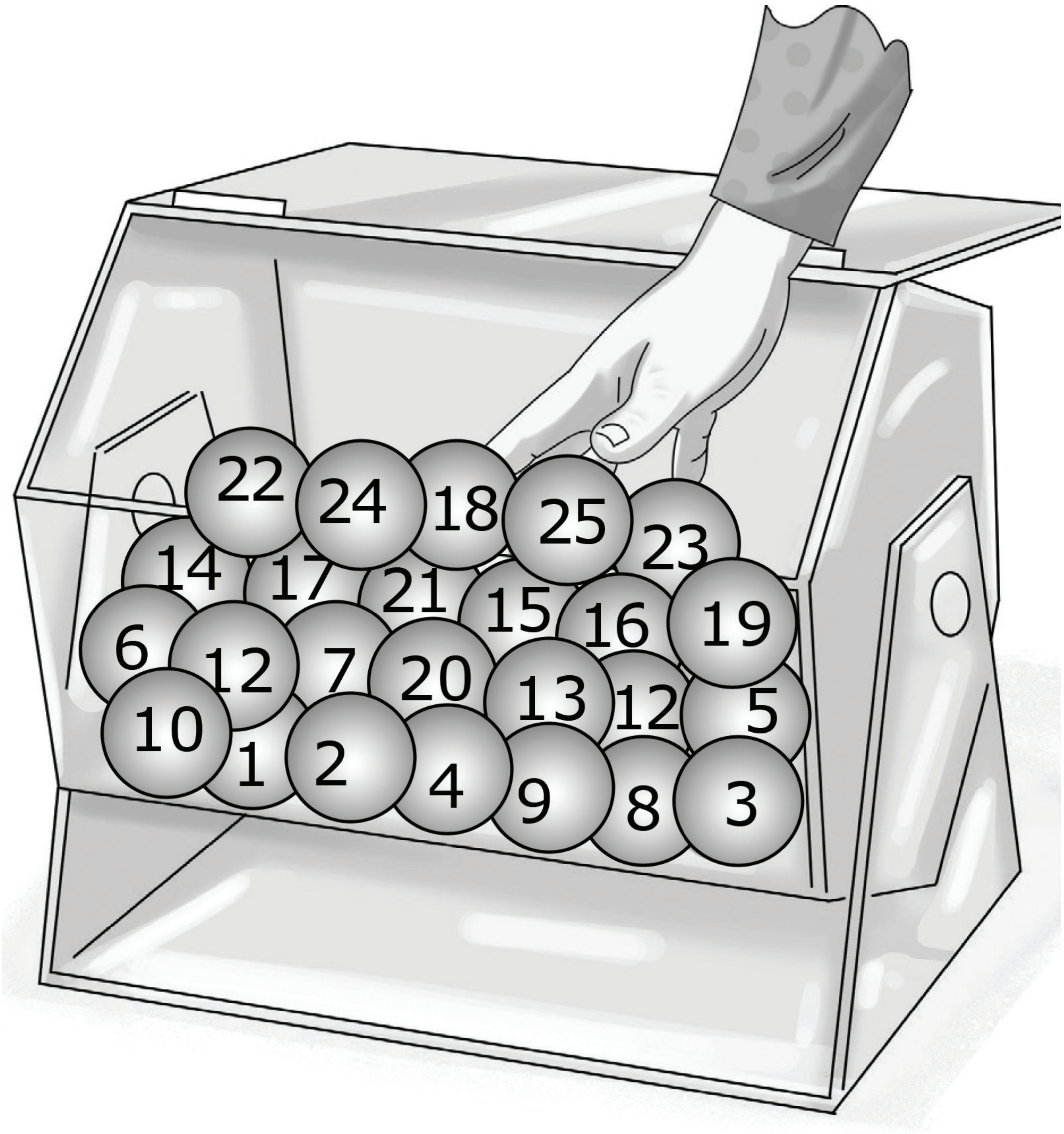
a. Se extrae una bolita al azar de la tómbola.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la bolita sea un número par o un múltiplo de 4?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la bolita sea un número mayor que 10 o menor que 20?

- ¿Cuál es la probabilidad de que la bolita sea un número primo o un múltiplo de 3?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la bolita sea un divisor de 20 o un múltiplo de 6?

b. Si Daniela lanza dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que los puntajes sean distintos o iguales?

c. Se lanzan cuatro monedas y se observan sus resultados. Luego, se quitan todas las monedas en que se obtuvo cara y se dejan aquellas en las que se obtuvo un sello. ¿Cuál es la probabilidad de que una vez terminado el experimento queden al menos dos monedas?


22
24
18
25
23
14
17
21
15
16
19
6
12
7
20
13
12
5
10
1
2
4
9
8
3

3. Lee la situación y responde.

El encargado de un taller mecánico debe realizar la mantención de un camión minero, y para ello debe seleccionar a 3 de entre sus 5 mecánicos para llevar a cabo el trabajo: Juana, José, Bastián, Rodrigo y Gabriela. El encargado considera que todos sus mecánicos son capaces de efectuar el trabajo, por lo que decide seleccionarlos al azar mediante un sorteo.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo sea conformado por Gabriela, Rodrigo y Juana?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que Juana o Rodrigo queden seleccionados?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que Gabriela no quede en el equipo pero Bastián sí?

4. Lee la situación, observa la tabla y luego responde. Para pintar un muro, el dueño le dice al pintor que puede pintarlo de rojo, azul o verde, y que él decida. El pintor, entonces, toma un dado honesto de seis caras, lo lanza y anota el puntaje obtenido. Luego lo vuelve a lanzar y entonces decide el color de la siguiente manera:

- Pintará rojo si el segundo lanzamiento fue menor que el primero.
- Pintará azul si el segundo lanzamiento fue igual al primero.
- Pintará verde si el segundo lanzamiento fue mayor que el primero. A continuación, se muestran los resultados obtenidos al lanzar dos dados:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

a. ¿Cuál es la probabilidad de que lo pinte rojo?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que lo pinte verde?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que lo pinte azul?

d. Si en el primer lanzamiento obtuvo un 6, ¿cuál es la probabilidad de que lo pinte rojo?

Reflexiona sobre tu trabajo

• ¿Cuántas estrategias distintas usaste para justificar el cálculo de probabilidades en los distintos problemas?

___

___

• ¿Qué estrategias te resultaron más complejas? ¿Por qué? Comenta con un compañero o una compañera para que puedas aclarar tus dudas.

___

___

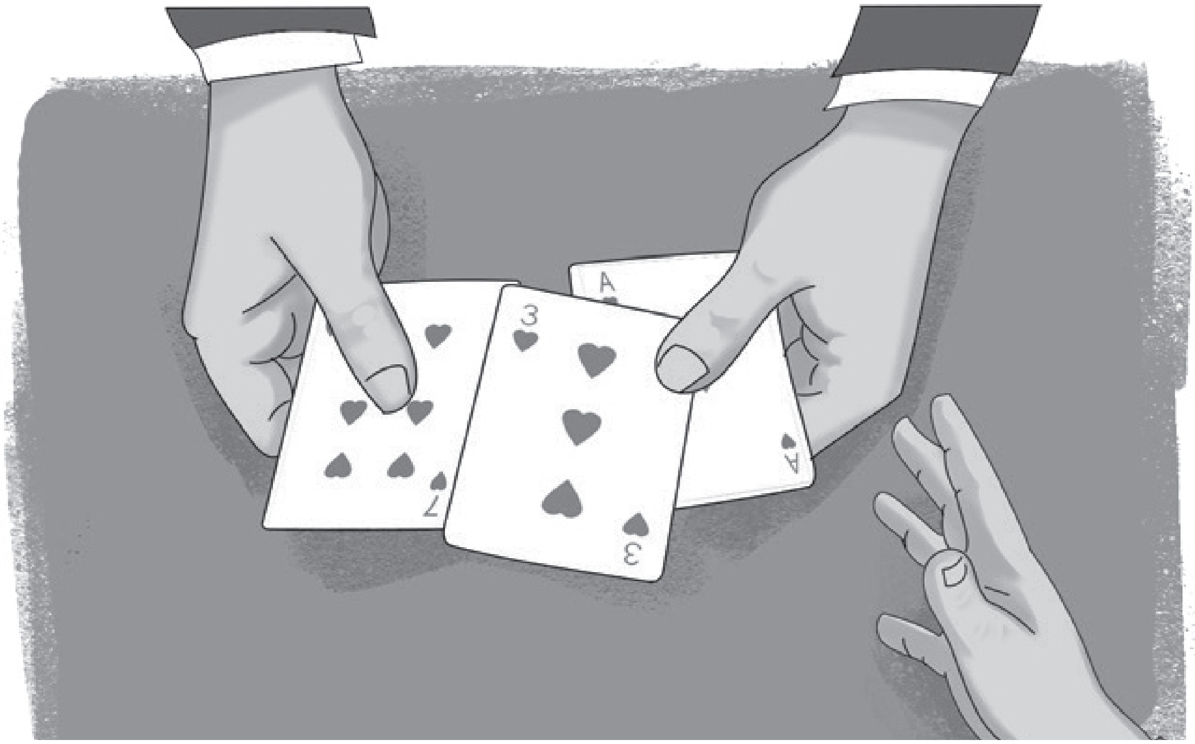
Reglas multiplicativas de la probabilidad

Objetivo:

• Desarrollar la regla multiplicativa de las probabilidades y aplicarla en la resolución de problemas.

Un mago pide extraer dos cartas sin reposición de las que muestra, es decir, sin devolverlas al mazo después de la extracción. Considera los siguientes eventos:

A: En la primera extracción obtener un as.
B: En la segunda extracción obtener un 7.



- Escribe el espacio muestral del experimento como un conjunto de pares ordenados en que la primera coordenada representa la primera extracción, y la segunda coordenada, la segunda extracción.

- Escribe los elementos del evento intersección entre A y B.

• ¿Cuál es la probabilidad del evento $A \cap B$?

$$P(A \cap B) = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

• Si consideras solo la primera etapa del experimento, ¿cuál es la probabilidad del evento A?

La probabilidad del evento A es $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$.

• Supón que se ha dado la ocurrencia del evento A en la primera etapa. En la segunda etapa, ¿cuál es la probabilidad del evento B?

La probabilidad del evento B es $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$.

• ¿Observas alguna relación entre las probabilidades de los eventos A, B y la intersección de los eventos? Comenta con un compañero.

Habilidad

Cuando construyes diagramas estás desarrollando la habilidad de representar.

La probabilidad de la intersección de dos eventos se puede relacionar con el producto de probabilidades.

Atención

El evento A|B se lee A dado B.

Conceptos

- La probabilidad de la intersección de dos eventos A y B se calcula como:

  $P(A \cap B) = P(B) \bullet P(A|B)$,

  donde $P(A|B)$ corresponde a la probabilidad del evento A dada la ocurrencia del evento B. Se conoce como probabilidad condicional.

- Dos eventos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$, o en forma equivalente, dos eventos son independientes si la realización de uno no afecta la probabilidad del otro, es decir, $P(A|B) = P(A)$.

- Estas propiedades se conocen como reglas multiplicativas de la probabilidad.

Ejemplo 1. Paso a paso.

Se lanza un dado honesto de seis caras. Se definen los siguientes eventos:

- **A:** El puntaje obtenido es un número mayor que 2.

- **B:** El puntaje obtenido es un número menor que 5. Calcula la probabilidad del evento A|B donde:

1. Describes el espacio muestral y los eventos.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$A = \{3, 4, 5, 6\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

El evento A|B corresponde a los elementos de A dado que ocurrió B, es decir, A|B= {3, 4}, ya que en el contexto de que ocurrió B el espacio muestral se reduce a 4 elementos, de los cuales solo 2 pertenecen a A.

2. Sin aplicar una fórmula, obtienes que $P(A|B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

3. Para aplicar la fórmula, se debe conocer: $P(A) = \frac{4}{6}$ $P(B) = \frac{4}{6}$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6}$$

4. Aplicas la fórmula.

$$P(A|B) = \backslash P(A \cap B)//P(B) = \frac{2}{6} : \frac{4}{6} = \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Respuesta: La probabilidad del evento A|B es 0,5.

En la situación inicial, si el mago pidiera la extracción de las cartas pero con reposición, es decir, después de sacar la carta se devuelve a la mano.

- ¿El experimento aleatorio es el mismo?

- ¿Cuáles son las probabilidades de los eventos descritos? ¿Cómo se relacionan con la probabilidad de la intersección?

- ¿Son los eventos independientes? ¿Por qué?

El experimento aleatorio de la situación inicial se puede describir como una sucesión de experimentos aleatorios. La ocurrencia del evento A en la primera etapa influía en la ocurrencia del evento B de la segunda, por lo que los eventos no eran independientes, y calculaste la probabilidad condicional. Ahora veremos un ejemplo de eventos independientes.

Atención

Recuerda que las ramas de un diagrama de árbol representan eventos elementales, disjuntos entre sí, por lo que la probabilidad de la unión de estos eventos es la suma de las probabilidades.

Ejemplo 2. Considera el experimento de lanzar dos veces una moneda al aire y observar el resultado que se obtiene.

Considera los siguientes eventos:

A: En el primer lanzamiento se obtiene una cara.
B: En el segundo lanzamiento se obtiene una cara. Los eventos A y B, ¿son independientes?

1. Describes el espacio muestral y los eventos.

$\Omega = \{cc, cs, sc, ss\}$
$A = \{cc, cs\}$
$B = \{sc, cc\}$
$A \cap B = \{cc\}$

2. Calculas la probabilidad de los eventos A, B y de su intersección.

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

3. Compruebas que los eventos sean independientes usando la definición:

$$P(A) \bullet P(B) = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A \cap B)$$

Respuesta: Los eventos son independientes. Esto también se refleja en el hecho de que los resultados de lanzar una moneda no tienen relación con los resultados obtenidos en otros lanzamientos.

Conceptos

- Un **diagrama de árbol** permite representar un experimento aleatorio de varias etapas, como la extracción sucesiva de cartas, el lanzamiento sucesivo de monedas y la extracción sucesiva de bolas de una tómbola.

- En un diagrama de árbol se pueden asignar probabilidades en cada etapa considerando la ocurrencia de la etapa anterior, es decir, verificando si los resultados entre etapas son independientes.

- La probabilidad de una rama del árbol se obtiene como el producto de las probabilidades sucesivas obtenidas en cada etapa, es decir, se aplican las **reglas multiplicativas de la probabilidad**.

- Recuerda que las ramas de un diagrama de árbol representan eventos elementales, disjuntos entre sí, por lo que la probabilidad de la unión de estos eventos es la suma de las probabilidades, es decir, se aplican las **reglas aditivas de la probabilidad**.

Atención

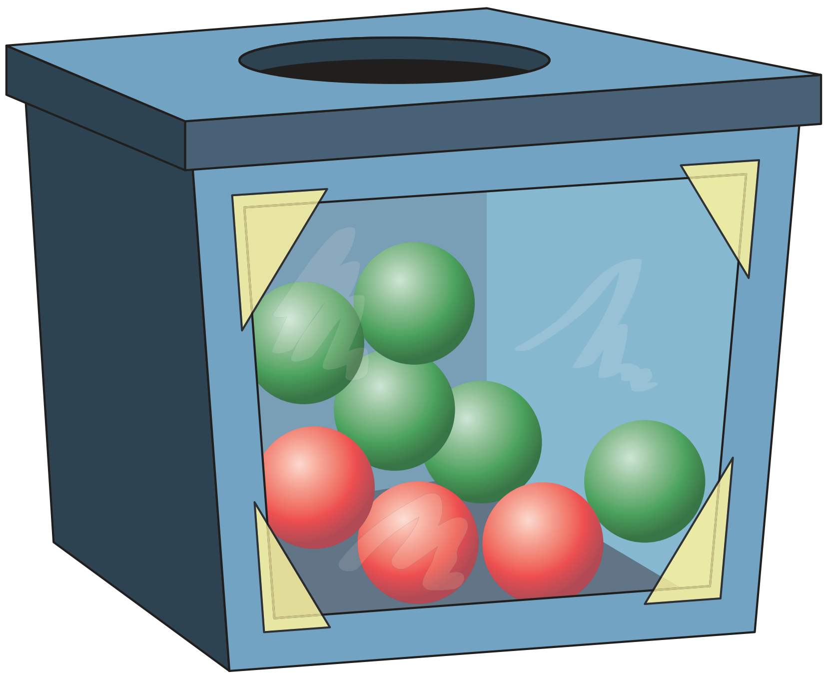
En general, los resultados de lanzamientos sucesivos de monedas y dados son independientes en cada etapa. No así cuando se extraen bolas de una tómbola o cartas de un mazo sin reposición, ya que al extraer una bola o una carta, en la siguiente etapa, las probabilidades de los resultados posibles cambian.

Ejemplo 3. Se extrae una bolita al azar de una urna como la de la imagen. Se observa su color y luego se devuelve agregando otras 7 bolitas del mismo color. Considera los eventos A y B.

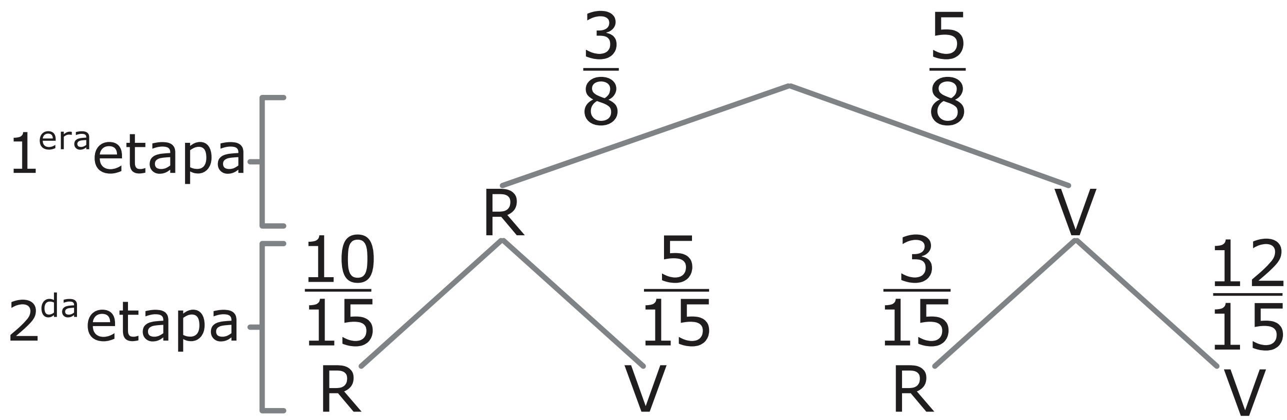
- **A:** En la primera extracción se obtiene una bolita roja.

- **B:** En la segunda extracción se obtiene una bolita roja.

¿Son independientes los eventos A y B?



1. Usando un diagrama de árbol, en cada etapa debes asignar las probabilidades correspondientes según las características del experimento en esa etapa. El siguiente diagrama de árbol representa las probabilidades de los resultados de cada etapa, donde R corresponde al color rojo y V, al color verde.



La probabilidad del evento A es $\frac{3}{8}$, porque en la primera etapa hay 8 bolitas y solo 3 son rojas.

La probabilidad del evento B se obtiene considerando las dos ramas cuya segunda etapa considere una bola roja.

En cada rama se multiplican las probabilidades y luego se suman.

$$P(B) = \frac{3}{8} \bullet \frac{10}{15} + \frac{5}{8} \bullet \frac{3}{15} = \frac{2}{8} + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{3}{8}$$

La probabilidad de la intersección se consigue considerando la rama que cumple con la descripción de ambos eventos, es decir, que en ambas extracciones salga una bolita roja.

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8} \bullet \frac{10}{15} = \frac{1}{4}$$

2. Compruebas si los eventos son independientes usando la definición

$$P(A) \bullet P(B) = \frac{3}{8} \bullet \frac{3}{8} = \frac{9}{64} \neq$$

$$= P(A \cap B)$$

Explica con tus palabras cuándo la probabilidad de la intersección de dos eventos es igual al producto de las probabilidades.

¿Crees que se podría usar un diagrama de Venn para representar un experimento en varias etapas? Justifica tu respuesta.

Atención

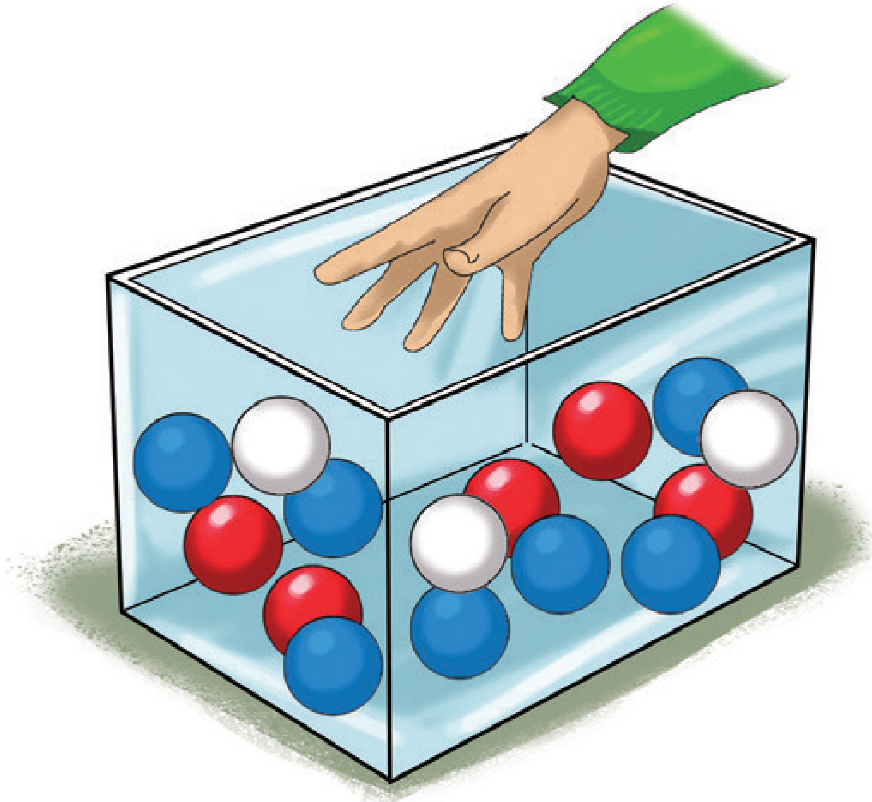
Supón que en una urna se tienen **b** bolas blancas y **r** bolas rojas. Un experimento aleatorio consiste en seleccionar una bola al azar y regresarla a la urna junto con **c** bolas del mismo color. Dicho experimento se conoce como la urna de Polya.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Claudia extrae sin mirar una bolita de la urna que se muestra en la imagen, anota su color y la devuelve. Luego, vuelve a sacar otra y anota su color.

a. Da un ejemplo de dos eventos independientes.
b. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolitas sean del mismo color?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolitas sean de colores distintos?
d. ¿Cómo cambian las probabilidades anteriores si el experimento se realiza sin devolver la bolita a la urna?
e. Si las bolitas no se devuelven a la urna, los eventos que planeaste en el ítem a, ¿siguen siendo independientes?



2. Lee los siguientes pronósticos del tiempo y responde.

- Si no llueve el día domingo entonces se tendrá un 30% de probabilidad de lluvia para el día lunes.

- Si llueve el día domingo entonces se tendrá un 60% de probabilidad de lluvia para el lunes.

a. Los eventos ‹›llueve el día domingo›› y ‹›llueve el día lunes››, ¿son independientes?

b. Calcula la probabilidad de que llueva el día lunes. Puedes usar un diagrama de árbol.

3. Una persona se encuentra en la calle, a 3 pasos de su casa, y decide efectuar el siguiente experimento: toma una moneda y la lanza al aire. Si obtiene una cara, avanza un paso y si obtiene un sello, retrocede un paso.

a. El evento «al quinto lanzamiento la persona avanza un paso», ¿es independiente de los resultados que haya obtenido en los cuatro lanzamientos anteriores?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona llegue a su casa después de 3 lanzamientos?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona llegue a su casa después de 4 lanzamientos?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona se encuentre a 6 pasos de su casa después de 4 lanzamientos?

e. ¿Es probable que la persona nunca llegue a su casa realizando este experimento? Justifica tu respuesta.

4. Lee la situación.

En cierto país existen tres partidos políticos: A, B y C. En cada proceso de elecciones, se tiene que:

- Existe un 30 % de probabilidades de que los que votaron en el proceso anterior por A ahora lo hagan por B, y un 70% de que mantengan el voto.

• Existe un 20 % de probabilidades de que los que votaron en el proceso anterior por B ahora lo hagan por A, un 30% de que ahora lo hagan por C y un 50% de que mantengan su voto.

• Existe un 10 % de probabilidades de que los que votaron en el proceso anterior por C ahora lo hagan por A y un 90% de que mantengan su voto.

Responde las siguientes preguntas considerando que en la primera elección que se realizó en dicho país un individuo decidió su voto al azar.

a. Los eventos «en la primera elección votó por A» y «en la segunda elección votó por B», ¿son independientes?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que en la 3era elección el individuo vote por C?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que en la 2da elección el individuo vote por B?
d. Si en la 1era elección el individuo votó por B, ¿cuál es la probabilidad de que en la 3era elección vote por A?

5. Resuelve el siguiente desafío matemático.

Considera el intervalo [0, 1], esto es, todos los números que son mayores o iguales que 0 y menores o iguales que 1. También considera el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, ambos contenidos en [0, 1].

Si se define la probabilidad de escoger un subintervalo del [0, 1] como su largo (es decir, punto final menos punto inicial), entonces muestra que los intervalos

$\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ son independientes.

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué estrategias nuevas usaste para resolver problemas de probabilidad? Descríbelas.

____

____

- Explica cómo se relacionan las propiedades de la unión, intersección y los diagramas de árbol

____

____

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 2

Desarrolla las siguientes actividades de evaluación que te permitirán reconocer lo que has estudiado en este tema.

1. Analiza la situación y responde.

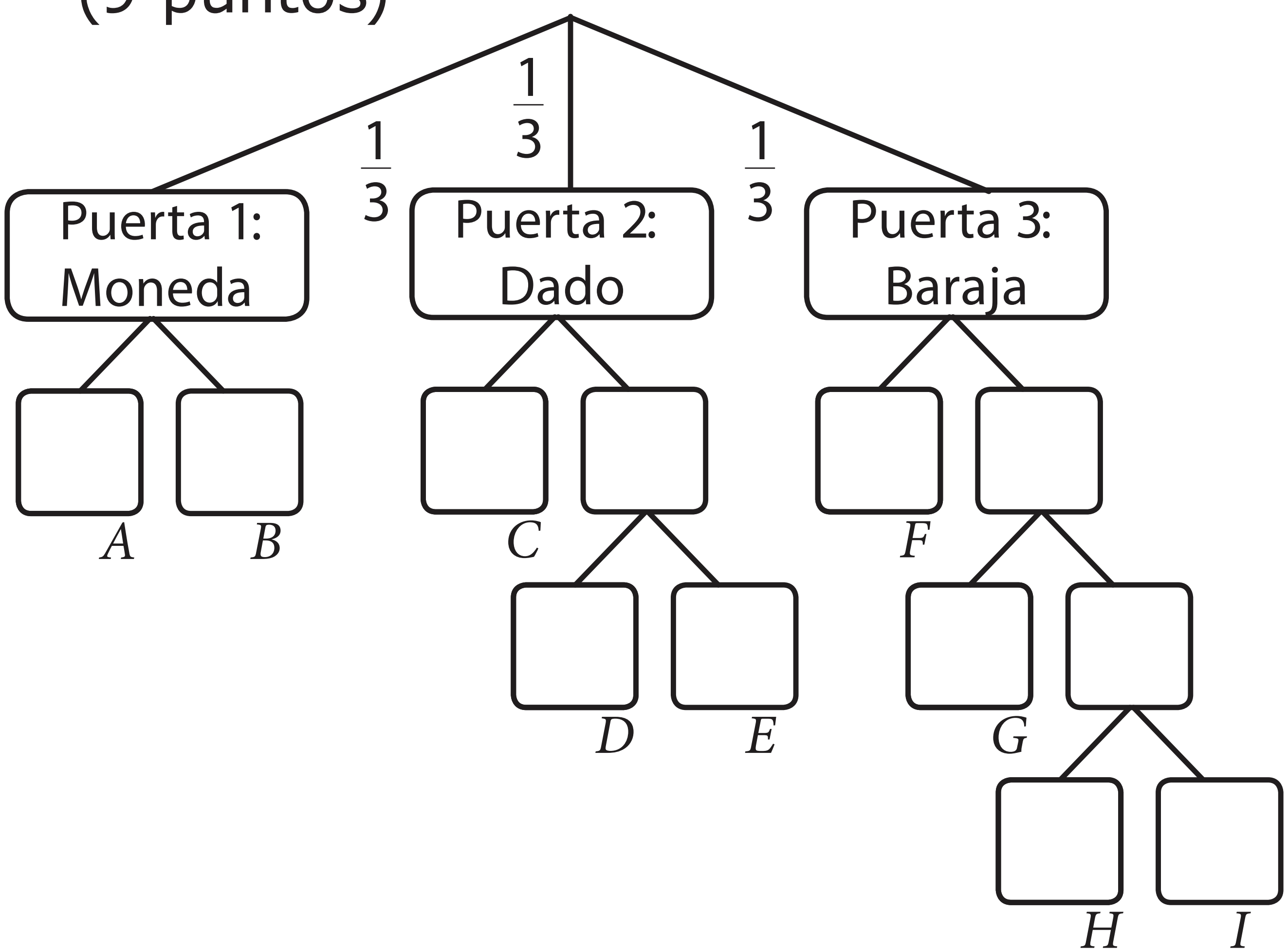
- Nuestra participante Josefa debe escoger entre tres puertas. Detrás de las puertas encontrara una moneda, un dado o una baraja de cartas, pero no sabe en qué puerta esta cada objeto, por lo que su elección es al azar.

- Si escoge la puerta que contiene la moneda, deberá lanzarla y gana si obtiene cara.

- Si escoge la puerta que tiene el dado, deberá lanzarlo y si obtiene un puntaje mayor que 4, entonces podrá lanzar una moneda y ganara si obtiene cara.

- Si escoge la puerta que tiene la baraja, deberá extraer una carta y si saca un trébol, entonces podrá lanzar un dado y si obtiene un puntaje mayor que, 4 podrá lanzar una moneda y ganara si obtiene una cara.

a. Completa el diagrama de árbol con los resultados posibles y probabilidades. (9 puntos)



b. Calcula la probabilidad de los siguientes resultados posibles del experimento. (1 punto cada uno)

P(D) = ☐ P(E) = ☐ P(F) = ☐

P(G) = ☐ P(H) = ☐ P(I) = ☐

¿Cuál es la probabilidad de que Josefa gane el concurso? ¿Y de que pierda? (2 puntos)

Realiza tus cálculos

Respuesta:

d. ¿Cuál es la probabilidad de que escoja la puerta que contiene la baraja y pierda en el lanzamiento de la moneda? (1 punto)

Realiza tus cálculos:

Respuesta:

e. ¿Cuál es la probabilidad de que Josefa pierda el concurso si escogió la puerta con el dado? (1 punto)

Realiza tus cálculos

Respuesta:

Verifica tus respuestas en el solucionario junto a un compañero y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla

Ítems	Conocimientos y habilidades	TU puntaje	Tu desempeño
1ª	Elaborar o completar diagramas de árbol con las posibilidades de experimentos aleatorios para representar los eventos y determinar sus probabilidades.		Logrado: 11 puntos o más. Medianamente logrado: 9 a 10 puntos. Por lograr: 8 puntos o menos.
1b, 1c, 1d y 1e	Aplicar la regla aditiva, la multiplicativa y combinación de ambas para determinar probabilidades de eventos simples y compuestos.		
	Total		

Reflexiona sobre tu trabajo

- La estrategia que planteaste al inicio de este tema, ¿tenía relación con el uso de diagramas de árbol? Si no, ¿cómo se podría relacionar? Explica.

____

____

- ¿Has cumplido tus metas iniciales? ¿Qué has hecho para ello? ¿Qué debes mejorar?

____

____

- ¿Qué conocimientos previos fueron importantes para el desarrollo de este tema?

____

____

Comportamiento aleatorio

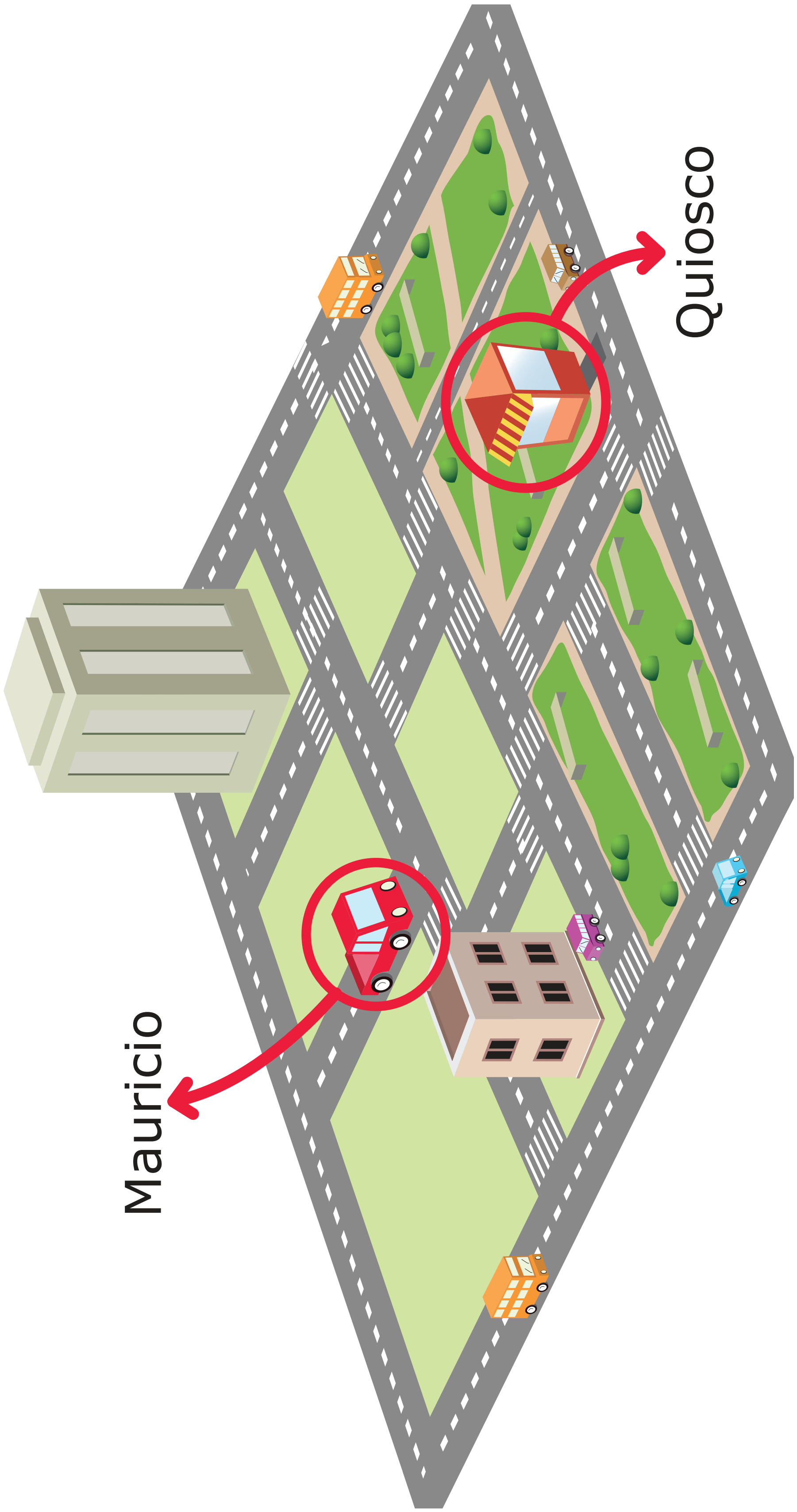
En esta sección recordarás lo que has estudiado en años anteriores y diseñarás una estrategia para desarrollar el Tema 3.

Recuerdo lo que sé

1. Lee la siguiente información.

Mauricio está en la calle y puede tomar varios caminos para ir al quiosco, como se muestra en la imagen. Decide que en cada esquina donde debe elegir entre su derecha e izquierda lo hará al azar usando una moneda honesta.

Supón que Mauricio siempre va en dirección al quiosco, es decir, cada vez que se enfrenta a dos caminos y sabe que uno de ellos lo conduce al quiosco, lo toma y en caso de no saber, la decisión es al azar.


Quiosco
Mauricio

a. ¿Se puede considerar que cada camino es evento de un experimento aleatorio? Explica tu respuesta.

___

___

b. Traza con distintos colores todos los caminos posibles que puede tomar Mauricio para llegar a su casa. ¿Cuántos caminos posibles hay? Completa la respuesta.

Hay ☐ caminos posibles.

c. ¿Se podría decir que cada camino tiene la misma probabilidad de ser escogido? Justifica tu respuesta.

___

___

d. Usa la regla de Laplace y calcula la probabilidad de cada uno de los caminos al quiosco

e. ¿Cuál es el camino con mayor probabilidad de ser escogido?

Diseño mi estrategia

Analiza cada caso y plantea una estrategia para desarrollar cada actividad.

2. Si al día siguiente Mauricio elige el camino de la derecha con $\frac{1}{3}$ de probabilidades y con $\frac{2}{3}$ de probabilidades el de la izquierda, ¿cuáles son las probabilidades de los caminos ahora?

Plantea tu estrategia

Respuesta:

3. Responde las siguientes preguntas a partir del problema anterior.

a. ¿Se podría haber ocupado la regla de Laplace para resolver el problema? Justifica tu respuesta.

b. ¿Cuál es el camino con mayor probabilidad de ser escogido al modificar las probabilidades? Compara tu respuesta con la obtenida en el ítem 1e.

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué otras situaciones en las que esté presente el azar se pueden definir por etapas?

____

____

- ¿Justificaste cada problema usando tus conocimientos matemáticos? Explica.

____

____

- ¿Qué conocimientos del tema anterior utilizaste para diseñar tu estrategia?

____

____

Paseos aleatorios y frecuencias relativas

Objetivos

- Comprender el concepto de azar.

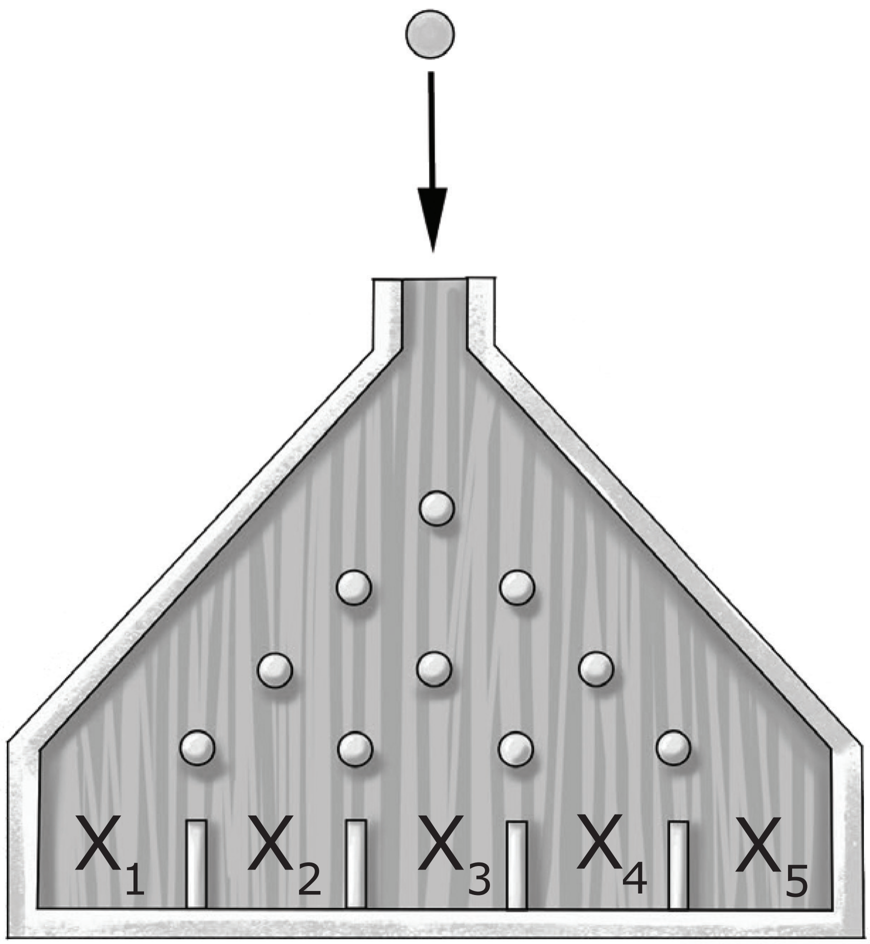
- Experimentar con la tabla del Galton y con paseos aleatorios sencillos.

- Realizar análisis estadísticos usando frecuencias relativas.

Habilidad

«Se lanza una moneda 10 veces y se quiere calcular la probabilidad de que salgan 4 caras».
Esta y muchas otras situaciones se pueden modelar usando la tabla de Galton. Averigua cuáles otras.

La tabla de Galton o máquina de Galton consta de un tablero vertical con varias filas de clavos. Se introducen bolitas en la parte superior para que caigan rebotando aleatoriamente y depositándose, a medida que caen, en los casilleros de la parte inferior. La imagen muestra una máquina de Galton con 4 filas de clavos y 5 casilleros x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5.



Considera que cada vez que una bolita rebota en un clavo esta tiene una probabilidad de 0,5 de ir hacia la derecha y de 0,5 de ir hacia la izquierda.

• Traza con distintos colores todos los caminos posibles que puede tomar la bolita para llegar a uno de los casilleros.

• ¿Cuántos caminos pudiste formar? ¿Cómo se relaciona la cantidad de caminos con las potencias de base 2?

____

____

• ¿Cuál de los casilleros tiene una mayor cantidad de caminos por los cuales la bolita puede llegar a él?

____

____

• Si se lanza una bolita en el tablero, ¿puedes saber con certeza en qué casillero caerá? ¿Por qué?

• Si se lanzan 10 bolitas, escribe cuántas crees que deberían caer en cada casillero. ¿Qué casilleros se ocupan con mayor frecuencia? Justifica tu respuesta.

• Si se agregan 5 filas más de clavos, ¿cuántos caminos crees que se pueden formar en total?

Simula 10 lanzamientos de bolitas en la tabla inicial. Para hacerlo, lanza una moneda en cada fila de la tabla. Si sale cara, la bolita va a la derecha, si sale sello, a la izquierda, es decir, para cada bolita deberás lanzar 4 veces una moneda.

• Completa la tabla de frecuencias con los resultados de tu simulación.

Casillero	Frecuencia	Frecuencia relativa
X_1		
X_2		
X_3		
X_4		
X_5		
Total	10	1

• La cantidad de bolitas que pensaste que caerían fue cercana a las frecuencias obtenidas. ¿Por qué crees que pasó eso?

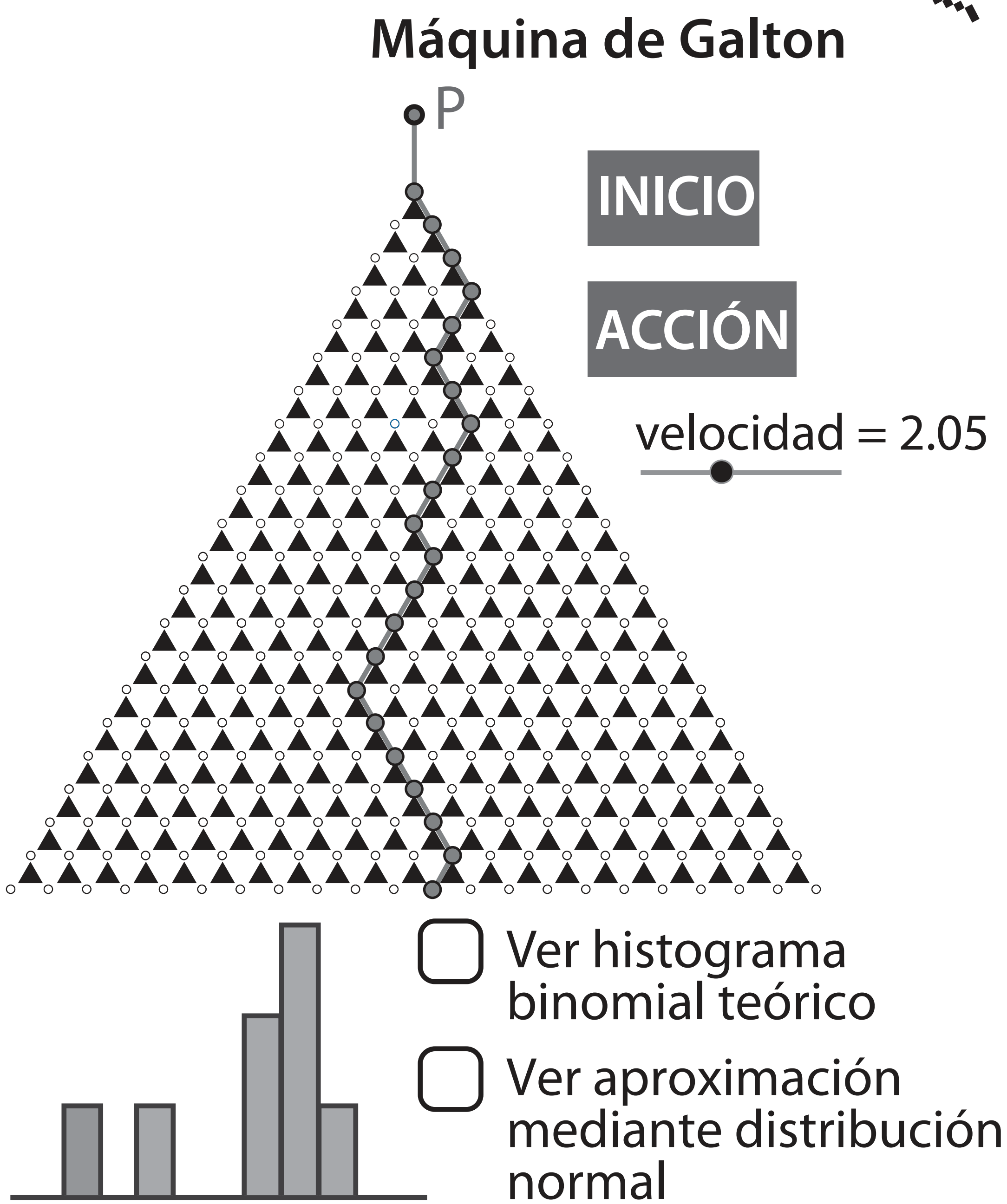
____

____

Francis Galton (1822-1911)

Estadístico, entre otras profesiones. Dedicó gran parte de su vida a la investigación. Sus contribuciones fueron reconocidas recién cuando tenía 87 años. Cofundador de la revista científica Biometrika, muy prestigiosa en las áreas de Economía y Biología.

Herramientas tecnológicas



x_i	f_i
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	1
7	0
8	1
9	0
10	0
11	0
12	3
13	1
14	0
15	0
16	0
17	0
18	0
19	0
20	0
21	0
Total	8

Entra al link *https://tube.geogebra.org/m/10276* y encontrarás una máquina de Galton virtual.

• ¿Cuántos caminos posibles puede tomar una bolita? ¿Cómo lo supiste?

____

____

• En esta máquina, ¿en qué casilleros crees que se concentrarán las bolitas que ingresan en la parte superior?

____

____

• Presiona el botón de inicio y luego el de acción para simular 100 lanzamientos de bolitas. Observa la tabla de frecuencias que aparece al costado derecho de la máquina. ¿Se cumplió tu conjetura anterior?

____

____

Como pudiste notar, tanto la actividad de inicio de tema como la tabla de Galton corresponden a un experimento en el que en cada etapa se carece de certeza respecto a qué camino se seguirá. Situaciones como estas se conocen como **paseos aleatorios.**

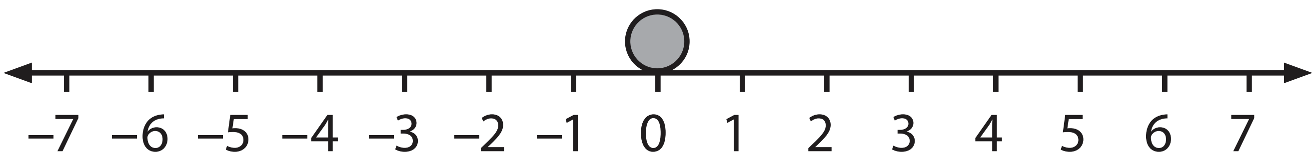
Conceptos

- Un experimento aleatorio es aquel en que, bajo ciertas condiciones, podemos conocer todos sus posibles resultados, pero al realizarlo no podemos determinar con certeza cuál se obtendrá.

- Un paseo aleatorio es una caminata o un recorrido en el cual en cada paso o etapa se tienen varias opciones para continuar, pero no se tiene certeza de cuál tomaremos.

Ejemplo 1. Lee la situación y responde

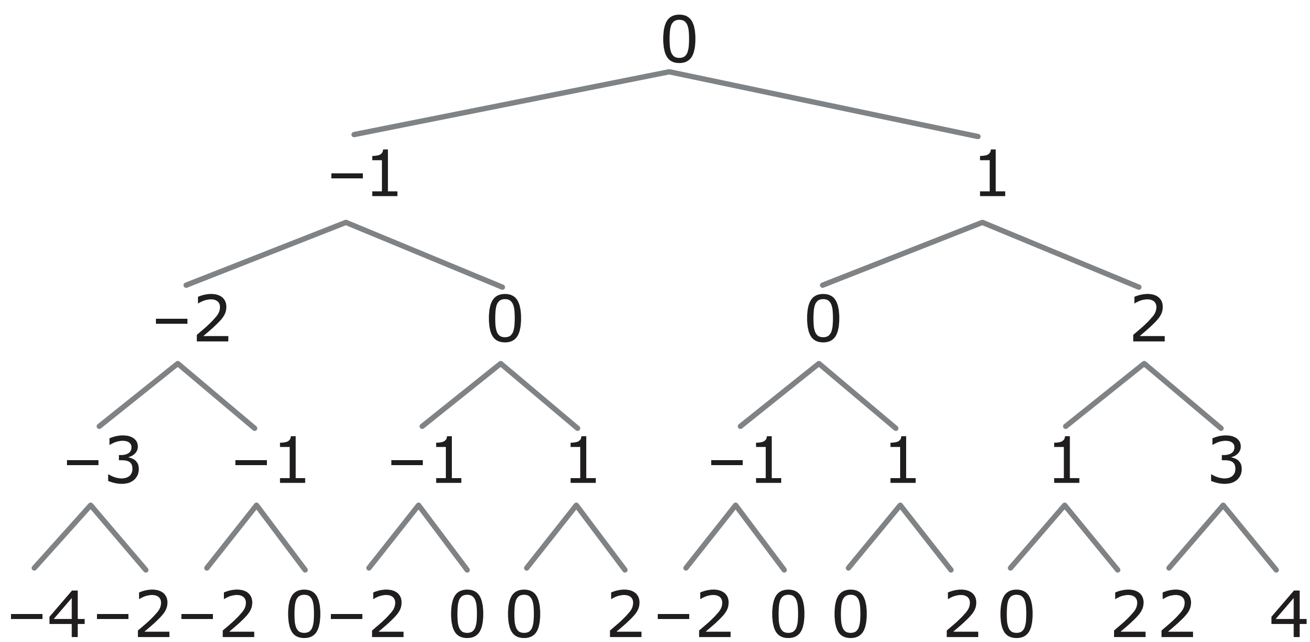
Considera la recta numérica de la imagen, en la que se sitúa una pelotita en el 0.



Se realiza el siguiente experimento: Se lanza una moneda al aire. Si sale cara, avanza la pelotita una posición hacia la derecha, si sale sello, una posición hacia la izquierda. El experimento se hace 4 veces.

- ¿Cuántas opciones tiene la bolita de terminar en la posición marcada con 0? Para responder a la pregunta puedes seguir estos pasos:

1. La forma más sencilla de revisar todas las posibles opciones que tiene para posicionarse la bolita es construir un diagrama de árbol.



2. Buscas los resultados de interés, en este caso que la bolita se encuentre situada en la posición 0, y las cuentas.

Respuesta: Existen 6 opciones de terminar en la posición marcada con el 0 después de efectuar 4 veces el experimento.

¿Cómo crees que se pueden usar los diagramas de árbol para el cálculo de la probabilidad de un camino aleatorio?

Conceptos

- Cuando realizas varias veces un mismo experimento aleatorio, la frecuencia relativa de un evento se define como la cantidad de resultados a favor del evento elegido, dividido por la cantidad total de veces que se realizó el experimento.

- La frecuencia relativa de un evento también es conocida como la probabilidad empírica. Esta permite aproximar la probabilidad teórica de cierto evento en situaciones en que no se conoce con exactitud.

Ejemplo 2. Lee la situación y responde.

A un joven, fanático de los autos rojos, le gustaría saber cuál es la probabilidad de que en una hora observe uno desde su balcón. Decidió anotar en una hoja el color de cada auto que pasara por la calle, y obtuvo lo siguiente:

A	V	R	N	V	B	A	R	N	A
V	B	A	N	R	A	N	V	V	B
R	V	R	V	A	N	V	B	N	R

Donde A: Azul, B: Blanco, R: Rojo,
N: Negro y V: Verde.

A partir de los datos, ¿cuál es la probabilidad empírica de que pase un auto rojo en una hora?

Atención

Recuerda que la frecuencia absoluta es la cantidad de veces que se observa un cierto evento, y la frecuencia relativa de un evento corresponde a la frecuencia absoluta dividida por el total observado.

1. Construyes la tabla de frecuencias para poder obtener las frecuencias relativas.

Colores de auto		
Color	Frecuencia absoluta	Frecuencia Relativa
Azul	6	6/30
Blanco	4	4/30
Negro	6	6/30
Rojo	6	6/30
Verde	8	8/30
Total	30	1

2. Observas la frecuencia relativa del evento de interés y obtienes la probabilidad empírica.

En este caso, el evento es ver un auto rojo, cuya frecuencia relativa es $\frac{6}{30}$, que simplificada es $\frac{1}{5}$.

Respuesta: La probabilidad empírica de ver un auto rojo en una hora es de $\frac{1}{5}$, que es igual a 0,2.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Lee la situación y responde.
Para un estudio se realizó una encuesta a 54 mujeres sobre la cantidad de hijos

que tenía. Lamentablemente, después de registrar los resultados se produjo un problema en la computadora que almacenaba los datos y se perdieron algunos, quedando solo la siguiente tabla:

Resultado de una encuesta		
Cantidad de hijos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
0	9	
1	$\frac{1}{9}$	
2	18	
3		
4	$\frac{1}{6}$	

a. Completa los datos que faltan en la tabla anterior.
b. Si se escoge una mujer al azar de este grupo, ¿cuál es la probabilidad empírica de que ella tenga 2 o 4 hijos?

2. Decide si las siguientes situaciones corresponden o no a paseos aleatorios. Justifica tu respuesta.

a. Una persona que camina por las calles de una ciudad, cada vez que puede doblar a la derecha en una calle lo hace.
b. Una persona camina por un sendero y cada 10 minutos lanza una moneda al aire. Si sale cara, toma un descanso, y si sale sello, sigue su camino sin descansar.
c. Una persona está apostando en un juego de casino y solo puede ganar o perder, nunca empatar.

d. En el ejercicio c. agregamos que puede empatar.
e. El conserje de un edificio abre la puerta y deja pasar a una persona si la reconoce y sabe que vive ahí; en caso contrario, no la deja pasar.

3. Cada una de las situaciones anteriores que consideraste un paseo aleatorio, represéntala con un diagrama de árbol.

4. Junto con un compañero o una compañera planteen tres situaciones de la vida real que se puedan considerar como paseos aleatorios.

5. Como se mencionó en la cápsula de Habilidad, la tabla de Galton permite modelar distintas situaciones de la vida real. Averigüen sobre este tema, su relación con el modelo binomial y hagan un informe. Recuerden mencionar la bibliografía y fuentes que ocuparon.

6. Un hombre realiza el siguiente experimento: se para en un cierto punto de inicio y lanza una moneda. Si sale cara, avanza un paso, y en caso de salir sello, vuelve al punto de inicio.

a. Construye un diagrama de árbol para representar el experimento anterior si la persona realizó el experimento 4 veces.
b. Si suponemos que la posición de la persona es la cantidad de pasos a la que se encuentra del punto de inicio, ¿cuál es la posición que posee más caminos en el diagrama de árbol?
c. ¿Corresponde el experimento anterior a un paseo aleatorio? Justifica tu respuesta.

7. Junto con un compañero o una compañera, consideren la tabla de Galton de la actividad inicial y realicen lo siguiente.

Dibujen en su cuaderno la tabla de Galton de la actividad inicial y simulen el camino de una bolita de la siguiente manera:

- Tracen el recorrido de la bolita, el cual se obtendrá en forma aleatoria tirando una moneda cada vez que la bolita toque un clavo. Le corresponderá ir hacia la derecha si sale cara, y a la izquierda en caso contrario, y así hasta que la bolita llegue a un casillero.

- Registren en qué casillero cayó la bolita y sigan con otra.

• Hagan este experimento simulando 5 bolitas, luego 10 bolitas y finalmente 15 bolitas.

a. Confeccionen una tabla con las frecuencias absolutas y relativas para los tres casos (5, 10 y 15 bolitas).
b. ¿Cómo se comportan las frecuencias relativas en los tres casos? ¿Existe algún patrón en los tres experimentos? Explica.
c. Construyan el diagrama de árbol teórico que corresponde a este experimento y calculen las probabilidades teóricas de caer en cada receptáculo.
d. ¿Cómo se comportan las probabilidades empíricas (frecuencia relativa) en relación con las teóricas?
e. En caso de existir diferencias, ¿por qué creen que sucede? Comenten.

Reflexiona sobre tu trabajo

• En el trabajo sobre la tabla de Galton, ¿nombraste adecuadamente la bibliografía y autores de donde obtuviste la información?

____

____

• Si buscaste información de Internet, ¿te fijaste que fuera confiable? Explica.

____

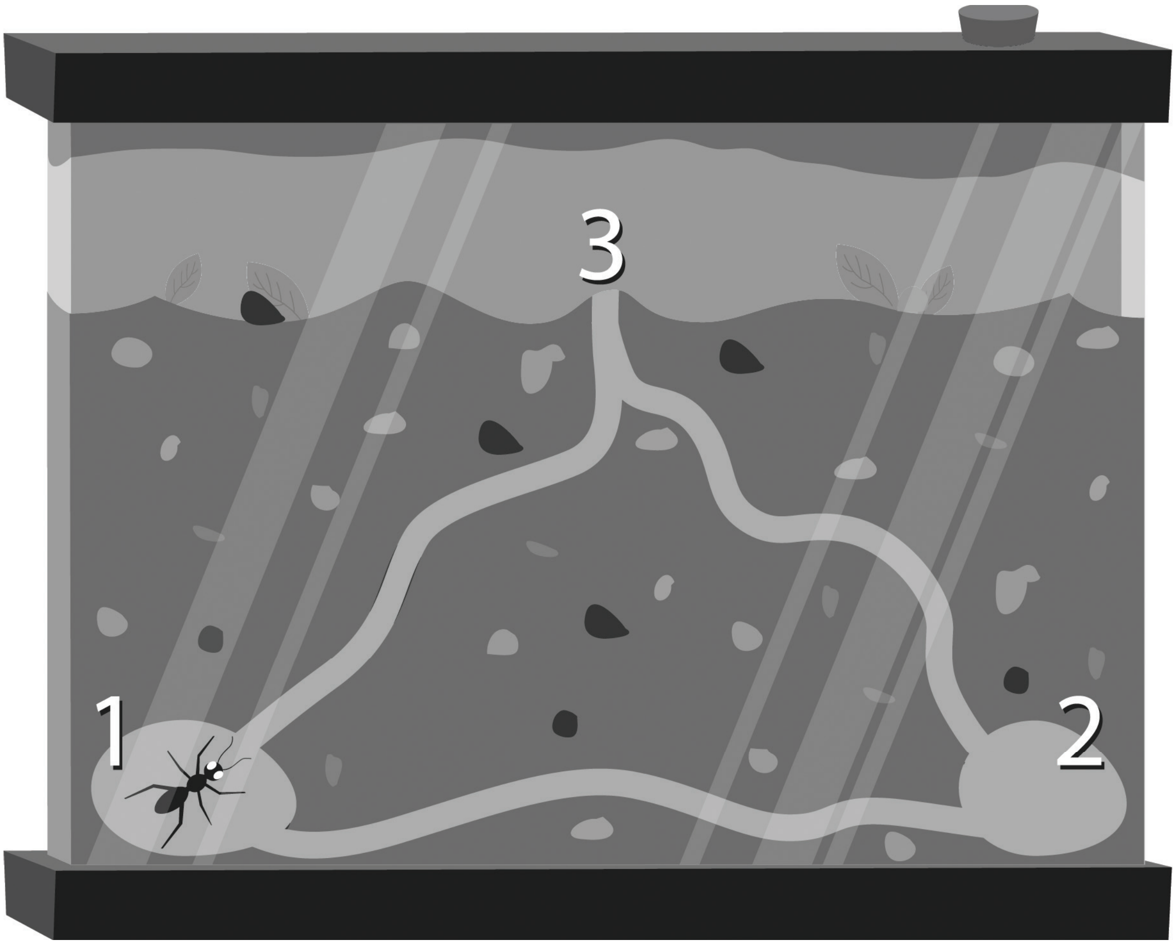
____

Paseos aleatorios y probabilidad

Objetivos

- Comprender el concepto de azar.
- Experimentar con paseos aleatorios sencillos.
- Utilizar probabilidades para describir el comportamiento azaroso.

Una hormiga se encuentra en uno de los vértices de un triángulo y se mueve a uno de los otros dos vértices en forma aleatoria. Además se sabe que la hormiga tiene igual preferencia por ir a cualquiera de los dos vértices.



• ¿Qué significa en términos de probabilidad que la hormiga tenga igual preferencia por ir a cualquiera de los dos vértices?

• Si suponemos que la hormiga se ha movido 4 veces, construye el diagrama de árbol correspondiente.

• ¿Cómo se puede incluir el concepto de probabilidad en el diagrama de árbol que modela la situación?

En la lección anterior pudiste analizar paseos aleatorios usando frecuencias relativas, pero también es posible modelarlos con probabilidades.

Conceptos

- Un **paseo aleatorio** se puede modelar usando probabilidades y un diagrama de árbol, asignando probabilidad de ocurrencia a cada una de las etapas y aplicando las propiedades de las probabilidades estudiadas en el Tema 2.

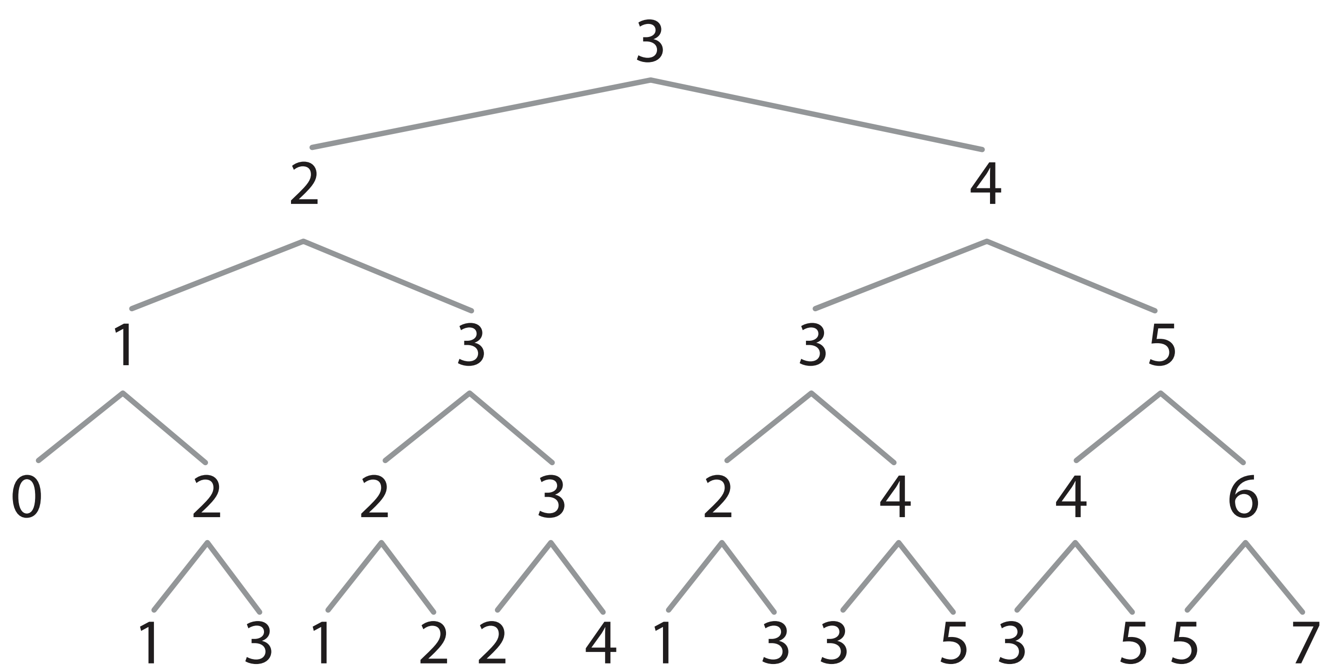
Ejemplo 1. Resuelve el siguiente problema.

Marcela apostará en cierto juego en el que se sabe hay una probabilidad de ganar de 0,5 y una probabilidad de perder de 0,5. Ella cuenta inicialmente con $ 3 y apuesta $ 1 en cada juego. Marcela jugará a lo más 4 juegos. ¿Cuál es la probabilidad de que quede en la bancarrota (con $ 0) o que gane al menos $ 1? Se supone que juega siempre que puede.

Paso a paso.

Para resolver el problema, puedes seguir estos pasos:

1. Construyes un diagrama de árbol para representar el experimento



2. Identificas los resultados a favor del evento A descrito como «Marcela queda en bancarrota o gana por lo menos $ 1». En este caso corresponden a las ramas con números finales 0, 4, 5 y 7.

3. Calculas la probabilidad de cada uno de los resultados. Para esto, en cada línea asignas $\frac{1}{2}$ de probabilidad y por el principio multiplicativo tienes que la probabilidad de que Marcela quede con $ 4, $ 5 o $ 7 es $\frac{1}{3}$ en cada caso, y la probabilidad de que quede en bancarrota es $\frac{1}{8}$.

4. Calculas la probabilidad del evento A. Como este evento está compuesto por resultados disjuntos, utilizas la propiedad aditiva de las probabilidades:

$$P(A) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{5}{16} + \frac{5}{16} = \frac{7}{16} = 0{,}4375$$

Respuesta: La probabilidad de que Marcela acabe en bancarrota o gane al menos $ 1 es 0,4375.

Habilidad

En la resolución de problemas, recuerda justificar tus pasos. Asi desarrollas la habilidad de argumentar y comunicar.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Considera una tabla de Galton con 5 niveles, es decir, con 5 filas de clavos: la primera con un clavo, la segunda con dos, y así sucesivamente.

a. Construye el diagrama de árbol para representar los posibles caminos de una bolita a un casillero.
b. Si asumimos que la probabilidad de que en cada nivel la bolita vaya a la derecha o a la izquierda es la misma, calcula la probabilidad de que una bolita tome un camino específico.
c. ¿Cómo se podrían comparar las probabilidades de distintos caminos?

d. Si lanzamos una bolita por la tabla de Galton, y sabemos que llega a una casilla al terminar su recorrido, ¿qué casilla tiene mayor probabilidad de recibir la bolita?

2. De cinco tenistas en un torneo del circuito profesional, tres de ellos serán sometidos a un test de antidopaje escogidos al azar.

a. Construye un diagrama de árbol para determinar el total de posibilidades que existen.
b. Si dos de los cinco tenistas son hermanos, determina la probabilidad de que ambos sean sometidos al control de antidopaje.

3. Lee la situación y responde.

Una persona realiza el siguiente experimento: Se para en un punto inicial y lanza una moneda al aire. Si sale cara, la persona avanza un paso, y en caso de sello, la persona se devuelve al punto inicial. Si ya estaba en el punto inicial, se queda allí.

a. Construye un diagrama de árbol para representar la situación en el caso de que la persona lanzara 5 veces la moneda.
b. Si la persona lanzó 5 veces la moneda, ¿cuál es la probabilidad de que este se encuentre a tres pasos del punto inicial?
c. ¿Existe alguna tendencia en la probabilidad de que la persona tenga rachas muy largas de avanzar un

paso? Para esta pregunta, considera la probabilidad de que la persona saque 15, 20 o 30 caras seguidas y analiza qué pasa con las probabilidades.

d. Según los resultados del experimento y sus probabilidades, después de varios intentos, ¿cómo debería ser el comportamiento de la persona respecto de su posición?

e. Si la persona hace el experimento con una moneda cargada, es decir, no tiene la misma probabilidad de salir cara que de salir sello, en este caso, comenta sobre cómo cambia el experimento. Propón distintas situaciones con probabilidades y cantidad de lanzamientos.

f. Si se asume que la probabilidad de cara es de $\frac{2}{3}$, ¿cambia la conclusión del ítem anterior?

g. Supón ahora que la persona cambió el experimento y cuando sale sello en vez de volver al inicio simplemente retrocede un paso (para la cara sigue igual). En esta nueva situación, repite los ítems a, b y c. ¿Cambian las probabilidades obtenidas en este nuevo experimento en relación con el primero? Explica.

4. Considera el ejemplo de la hormiga de la actividad inicial y supón que esta tiene el doble de probabilidades de elegir ir al vértice a su derecha que al de su izquierda.

a. Construye un diagrama de árbol para representar el comportamiento de la hormiga en 4 etapas.
b. ¿En qué posición es más probable que se encuentre la hormiga después de 4 etapas?

c. ¿Es la misma posición que en el caso cuando la hormiga tenía igual probabilidad de ir a la derecha o a la izquierda? Justifica tu respuesta.

5. Junto con un compañero o compañera realicen la siguiente actividad. El siguiente problema es conocido como "Problema de Monty Hall o de las tres puertas".

• Una persona va a un concurso de un programa de televisión en el que debe escoger una de tres puertas. Detrás de cada una hay un premio: en dos de ellas un regalo sorpresa y, en la otra, el premio máximo, que es un automóvil.

• El participante escoge una de las puertas al azar e inmediatamente después de eso el conductor, quien sabe dónde se encuentra el automóvil, abre una de las puertas que no escogió el participante y que tiene un regalo sorpresa detrás.

• El conductor ofrece al participante cambiar la puerta que escogió inicialmente por la otra que queda sin abrir.
¿Le conviene al participante cambiar la puerta en el sentido de aumentar sus probabilidades de ganar?

a. A partir de tu intuición, ¿cuál sería tu respuesta al problema?
b. Construye un diagrama de árbol para representar la situación del concurso.
c. ¿Cuáles son todos los casos en los que el participante gana si se cambia de puerta?
d. ¿Cuáles son todos los casos en los que el participante pierde si se cambia de puerta?
e. ¿Qué aconsejarían hacer al participante para aumentar la probabilidad de que gane el auto en el concurso?

f. ¿Era lo que tú esperabas de forma intuitiva? Comenta.

Reflexiona sobre tu trabajo

- Para modelar una situación real en la que está presente el azar, ¿usarías un enfoque más frecuentista (experimental) o probabilidades teóricas? Justifica tu respuesta.

____

____

- ¿Qué estrategias de las que has aprendido te han parecido más útiles? ¿Por qué?

____

____

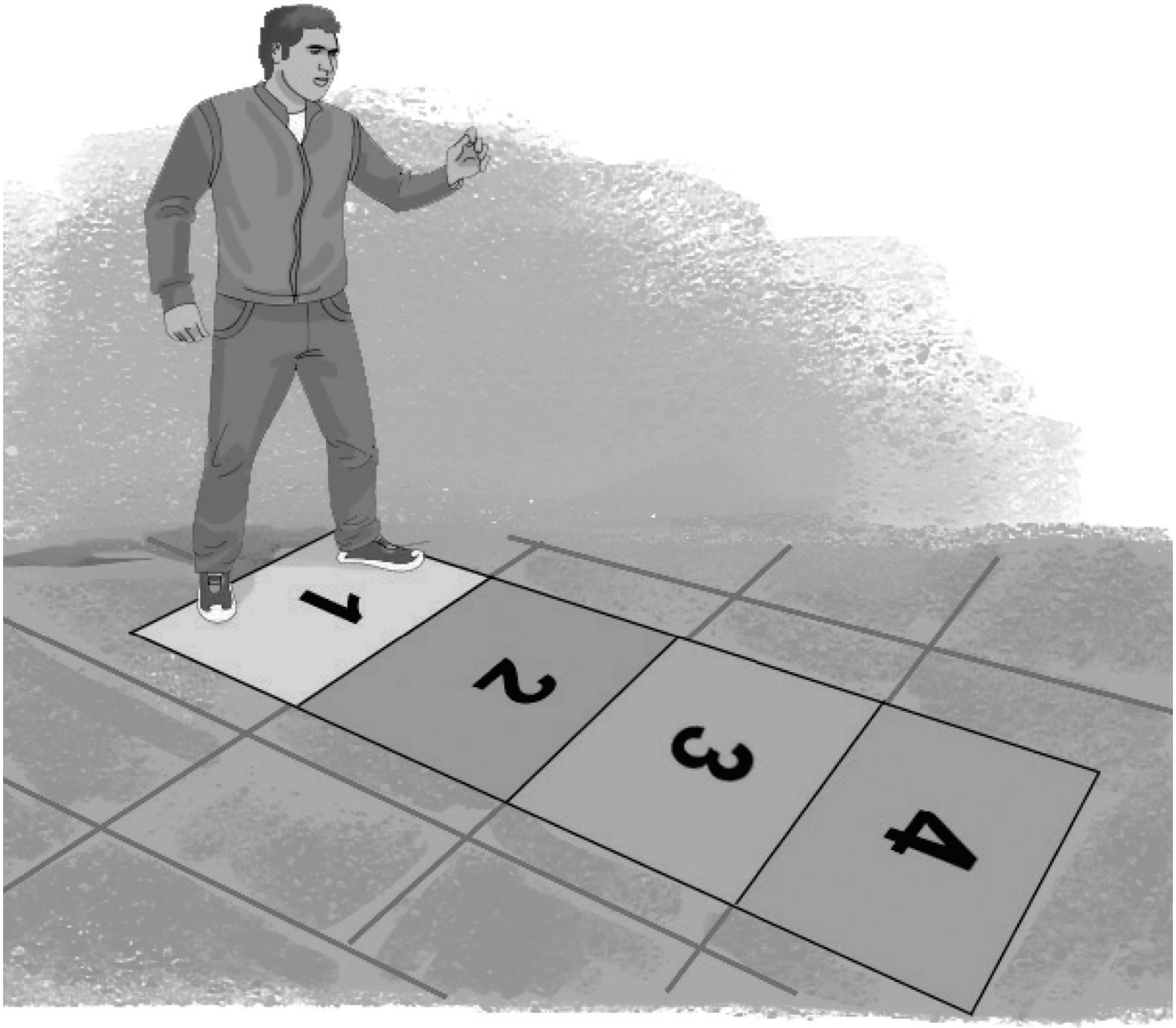
¿Cómo voy? Evaluación de proceso 3

Desarrolla las siguientes actividades de evaluación que te permitirán reconocer lo que has estudiado en este tema.

1. Lee la información y responde.

Un hombre se encuentra parado en un tablero rectangular, como se muestra en la imagen, y realiza el siguiente experimento:

Lanza una moneda. Si sale cara avanza hacia el cuadrado siguiente, y si sale sello, retrocede al anterior, salvo que esté en el primero, en cuyo caso se queda en el mismo lugar.


1
2
3
4

a. ¿Cuánto es la mínima cantidad de lanzamientos de moneda que debe hacer para llegar al último cuadrado? (1 punto)

b. Simula el experimento 10 veces usando una ficha para representar a la persona y lanza 4 veces la moneda. Realiza el experimento 10 veces y registra el casillero en el que queda la persona después de los 4 lanzamientos. (4 puntos)

Casillero en la que queda	1	2	3	4	Total
Frecuencia					
Frecuencia relativa					

c. Según la tabla que obtuviste, ¿qué tan probable es que la persona llegue al casillero 4? (1 punto)

d. ¿Cuál/es casillero/s tiene/n mayor frecuencia? ¿Cuál/es la menor frecuencia? ¿Qué significa? (1 punto)

e. Representa los posibles resultados al lanzar 4 veces la moneda en un diagrama de árbol. Anota las probabilidades asociadas en cada rama. (4 puntos)

f. ¿Cuál(es) camino(s) tiene(n) mayor probabilidad de ocurrencia? ¿Cuál(es) menos? Escribe en cada caso las probabilidades de los eventos. (1 punto)

g. ¿Cuál es la probabilidad de que después de 4 lanzamientos aún se encuentre en el primer cuadrado?
(1 punto)

h. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre en el segundo cuadrado después de 3 lanzamientos? (1 punto)

i. Tienen relación las probabilidades que obtuviste experimentalmente con las que planteaste teóricamente? Justifica tu respuesta. (2 puntos)

Verifica tus respuestas en el solucionario junto a un compañero y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1e, 1f, 1g y 1h	Elaborar diagramas de árbol para representar caminos aleatorios y estudiar sus resultados.		**Logrado:** 10 puntos o más. **Medianamente logrado:** 8 a 9 puntos. **Por lograr:** 7 puntos o menos.
1a, 1b, 1c, 1d y 1i	Resolver problemas que involucran estimaciones basadas en frecuencias relativas.		
		Total	

Reflexiona sobre tu trabajo

• ¿Qué estrategia para modelar situaciones de azar te parece más adecuada, registrar datos experimentales y usar las probabilidades empíricas, o utilizar diagramas de árbol con probabilidades teóricas? Justifica tu respuesta.

____

____

• ¿Has cumplido tus metas iniciales? ¿Qué has hecho para ello? ¿Qué debes mejorar?

____

____

• ¿Qué fue lo que más te interesó de la unidad? ¿Por qué?

____

____

Actividades complementarias

Juegos de azar
Juegos de probabilidades

El error del duque de Toscana

Alrededor del año 1560, el duque de Toscana, un gran jugador de juegos de azar, había observado que a lo largo de su experiencia al lanzar tres dados y sumar sus puntos, el 10 aparecía con más frecuencia que el 9, a pesar de que, según él, para ambas sumas había seis maneras de lograrlas.

Para él las maneras de sumar 9 eran:		
1+6+2	1+3+5	1+4+4
2+2+5	2+3+4	3+3+3

Y las maneras de sumar 10 eran:		
1+3+6	1+4+5	2+2+6
2+3+5	2+4+4	3+3+4

a. ¿Qué error cometió el duque de Toscana en sus cálculos?
b. Según la regla de Laplace, ¿cuál es el espacio muestral al lanzar tres dados?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 9? ¿Y que la suma sea 10?
d. ¿Qué puedes concluir sobre este error? Explica tu respuesta.

Juegos de azar

En Chile existen diferentes juegos de azar. Entre los juegos que consisten en extraer cierta cantidad de bolitas desde una tómbola para completar un cartón existe la posibilidad de escoger los números del cartón.

En este contexto, las personas escogen números que en lo posible se encuentren distribuidos dentro del total de las bolitas, por ejemplo, si las bolitas son 20 y deben escoger 5 números, una persona podría escoger; los números 2, 7, 11, 15 y 19. Es muy poco posible que escojan la combinación 1, 2, 3, 4 y 5, porque creen que tienen menos posibilidades.

a. Según el cálculo de probabilidades, ¿sería correcto pensar de esta manera? Justifica tu respuesta.
b. ¿Se podría hacer un análisis de las frecuencias relativas con los resultados de los sorteos anteriores para obtener información sobre la probabilidad de las combinaciones? Explica tu respuesta.

Lanzamiento de un dado

Tres compañeros quieren calcular la probabilidad de sacar un puntaje igual a 1 y 2 al lanzar dos dados.

- El primero razona de la siguiente manera: La probabilidad de sacar un 1 es $\frac{1}{6}$ y la probabilidad de sacar un 2 es $\frac{1}{6}$, por lo tanto la probabilidad de que salga un 1 y un 2 es $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.
- El segundo razona de la siguiente manera: La probabilidad de sacar un 1 es $\frac{1}{6}$ y la probabilidad de sacar un 2 es $\frac{1}{6}$, por lo tanto la probabilidad de que salga un 1 y un 2 es $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.
- El tercero razona de la siguiente manera: La probabilidad de sacar un 1 o un 2 en

un dado es $\frac{2}{6}$ y la probabilidad de sacar un 1 o un 2 en el otro dado es de $\frac{2}{6}$, por lo tanto la probabilidad de que salga un 1 y un 2 es $\frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

a. Los tres cálculos son incorrectos. ¿Cuál fue el error en cada caso?

b. Determina correctamente la probabilidad de sacar un puntaje igual a 1 y 2 al lanzar dos dados.

El problema del sorteo discutido

Un profesor decidió sortear un obsequio entre los 30 alumnos de su clase. Un alumno propuso tomar 30 papelitos, marcar uno de ellos y, después de doblarlos y mezclarlos, repartir uno a cada estudiante. El profesor propuso un método más sencillo y rápido: Pensaré en un número entre 1 y 30, y lo anotaré en un papel y, luego, siguiendo el orden en el que están sentados, cada alumno dirá un número distinto hasta que uno acierte el número que he pensado.

Uno de los alumnos, sentado al fondo de la sala, respondió que no estaba de acuerdo con este método, argumentando que él tendría menos posibilidades de acertar que los primeros, y que lo más probable es que ni siquiera llegara la oportunidad de decir el número, por que antes otro alumno ya lo habría acertado. ¿Este alumno estaba en lo cierto o, por el contrario, el profesor propuso un sorteo justo?

Problema de la apuesta interrumpida

Dos hermanos, Beatriz y Andrés, están apostando en un juego, en el que gana el primero que consigue 10 puntos. En cada ronda ambos tienen la misma probabilidad de ganar y el que gana obtiene un punto. El partido se encuentra en un punto culminante. Beatriz lleva 9 y Andrés, 8 puntos, pero por motivos extraordinarios, deben interrumpir el juego. Dado que ninguno ha llegado a los 10 puntos, deciden repartir el dinero de la apuesta realizada.

a. ¿Cómo deben repartir la apuesta? Explica tu respuesta.
b. Conversa con tus compañeros y compañeras la solución del problema.

c. La solución correcta del problema dependerá de aspectos que pueden no ser matemáticos, pero intenta llegar a una solución mediante el uso de probabilidades. Puedes usar un diagrama de árbol con las jugadas que quedan.

¿Que aprendí? Evaluación final

A continuación, te proponemos preguntas que tendrás que desarrollar considerando lo que has aprendido en esta unidad.

Comparación de muestras

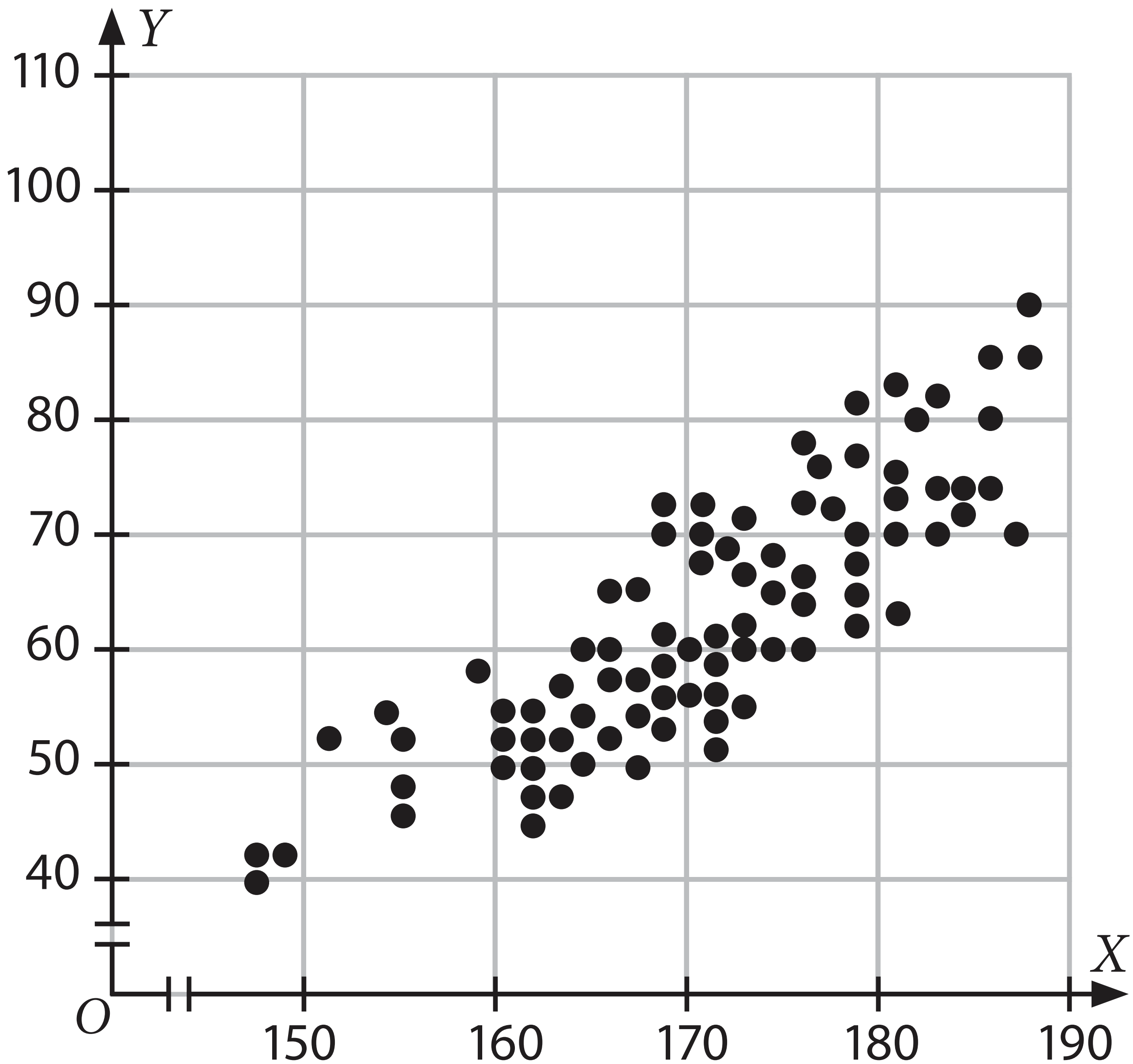
1. Responde las siguientes preguntas a partir del gráfico de dispersión.

a. Los puntos, ¿presentan alguna tendencia? (1 punto)

b. Traza la recta más próxima a los datos. (1 punto)

c. En el gráfico, ¿hay presencia de puntos atípicos (aislados o outliers)? (1 punto)

d. A partir de las respuestas anteriores, ¿qué conclusión puedes sacar sobre la relación entre las variables (X e Y)? (2 puntos)



2. El diagrama de dispersión muestra los datos de una encuesta hecha a hombres y mujeres para analizar la relación entre la talla y la masa corporal. Los puntos rojos corresponden a mujeres y los círculos, a hombres.

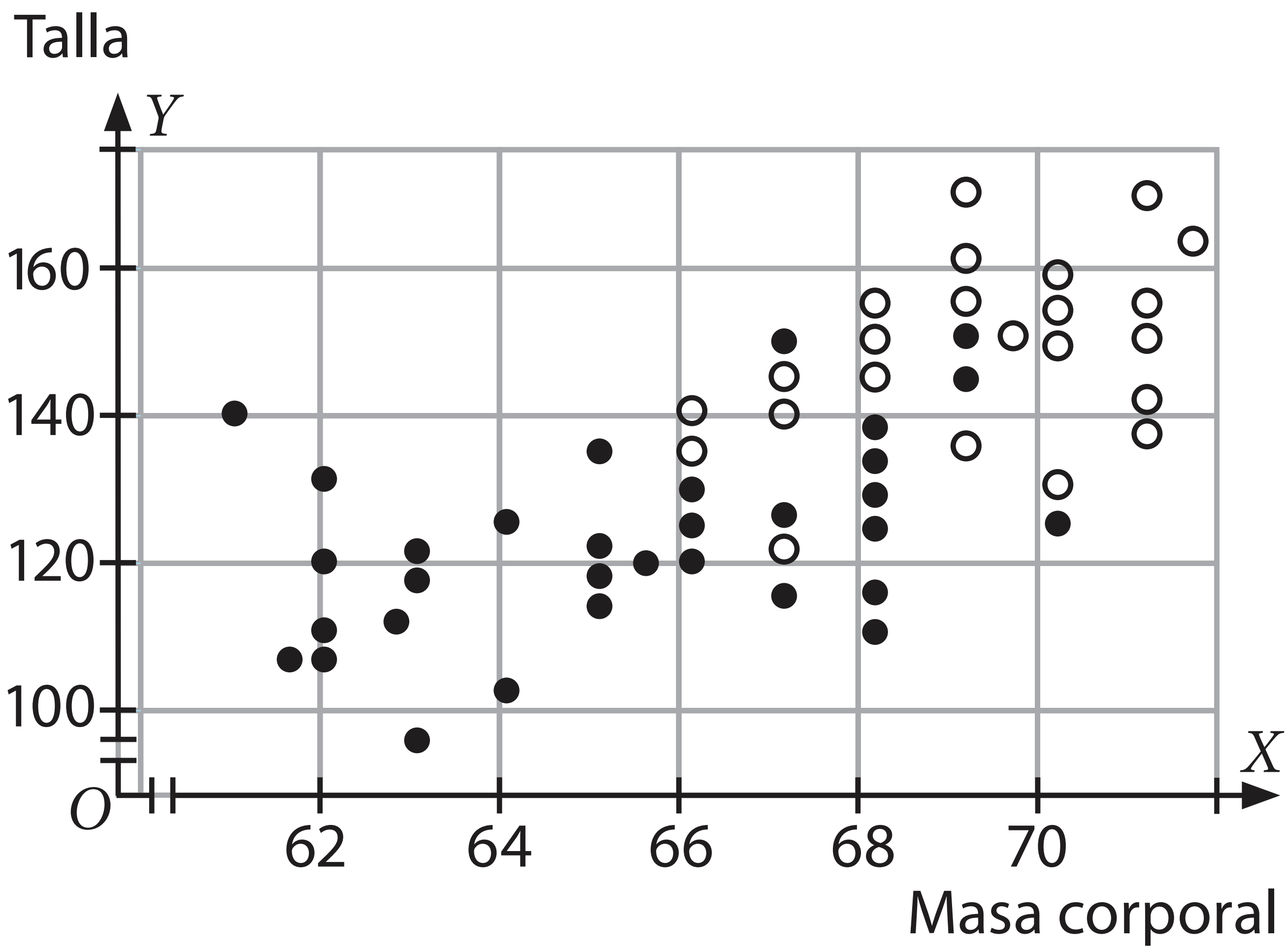
a. Para el caso de las mujeres, ¿están correlacionadas la talla y la masa corporal? ¿Y para los hombres?
(2 puntos)

b. ¿Se pueden apreciar con claridad puntos atípicos, rojos o círculos?
(1 punto)

c. Traza una recta que a tu criterio separe de mejor manera los puntos rojos de los círculos. (1 punto)

d. ¿Cómo cambia la masa corporal a medida que la talla es mayor? Responde por separado para el caso de las mujeres y de los hombres. (2 puntos)

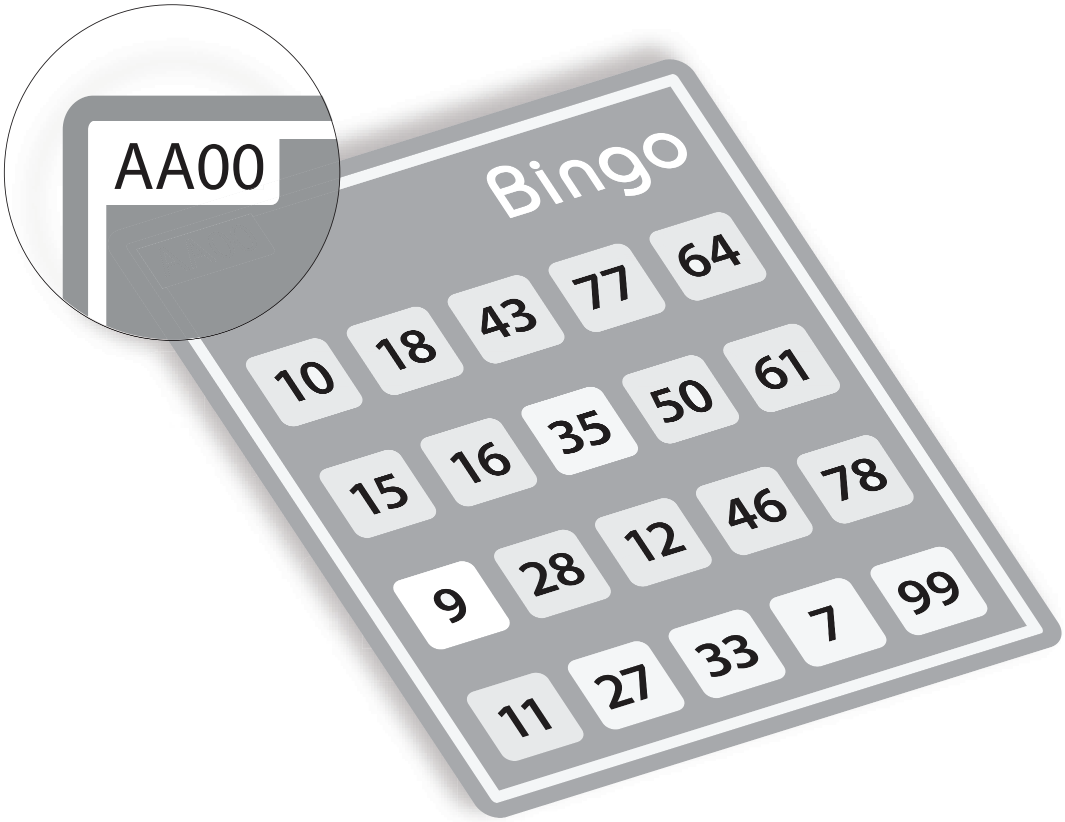
e. De acuerdo a tus respuestas y al gráfico, escribe una conclusión respecto a la relación entre la talla y la masa corporal, y su diferencia entre hombres y mujeres. (2 puntos)



Propiedades de la probabilidad

3. Miguel está organizando un bingo a beneficio en su barrio y folia cada uno de los cartones con dos letras (excepto CH, LL y Ñ) y dos números. Los números y las letras se pueden repetir.

a. Determina la cantidad de cartones distintos que pueden elaborar. Considera 26 letras y los 10 dígitos. (1 punto)
b. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un cartón que esté marcado solo con números pares? (1 punto)
c. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un cartón y que su marca contenga al menos una vocal y un número primo? (1 punto)



4. En un restaurante se ofrecen promociones para almorzar, las cuales están compuestas de una comida y una bebida, donde los clientes pueden elegir entre las siguientes:

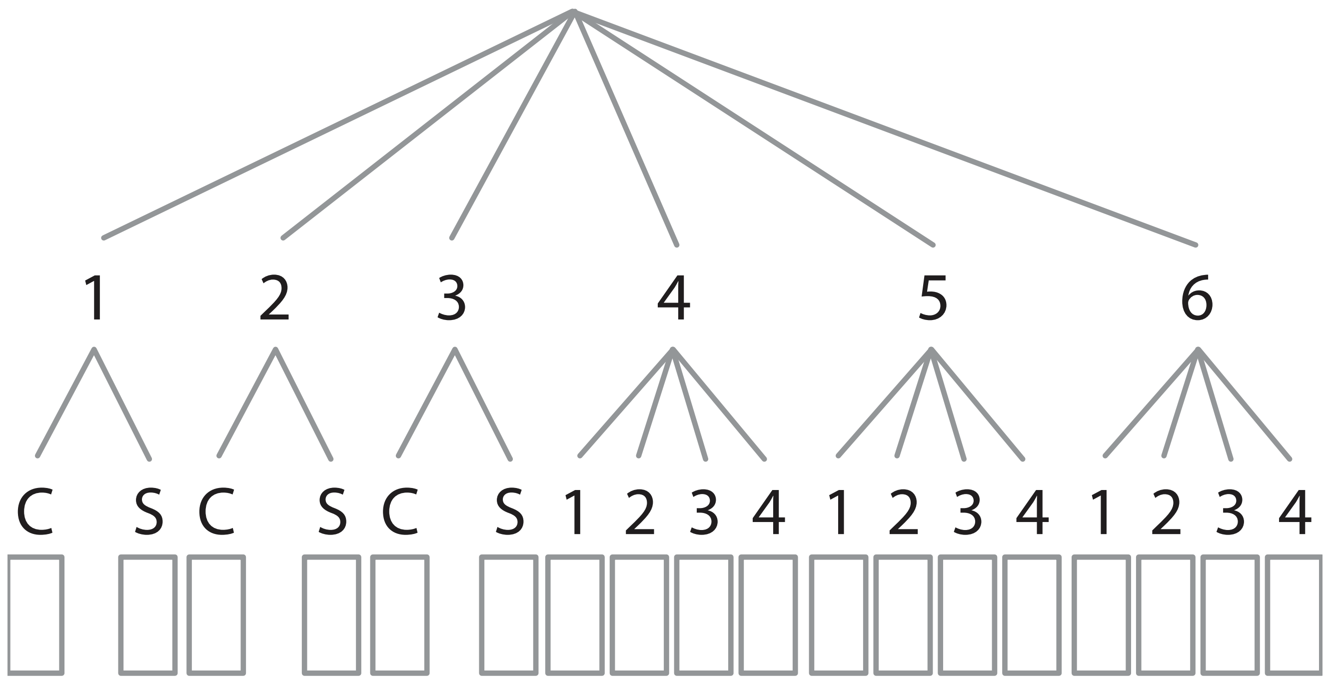
- Comida: hamburguesa, pizza o completo
- Bebida: jugo, agua o bebida cola

a. Construye un diagrama de árbol para obtener todos los casos posibles de promociones. (1 punto)
b. ¿Cuál es la probabilidad de que en una promoción el cliente pida una bebida cola? (1 punto)
c. ¿Cuál es la probabilidad de que en una promoción el cliente pida una hamburguesa o una pizza? (2 puntos)

5. En la imagen se muestra el diagrama de árbol correspondiente al siguiente experimento:

Se lanza un dado. Si sale 3 o menos, se lanza una moneda, de lo contrario se vuelve a lanzar un dado, pero esta vez de 4 caras.

Completa el diagrama asignando la probabilidad de cada rama y de los eventos finales. (1 punto)



6. Supón que tienes los siguientes eventos:

A: El gato se sube a un árbol.
B: El niño toma un helado.
C: La niña salta la cuerda.

a. Describe con tus palabras los eventos

$A \cup B$, $B \cup C$, $A \cup C$, $A \cap B$, $B \cap C$ y $A \cap C$. (3 puntos)

Supón que $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ y $P(C) = \frac{1}{6}$ y que los eventos son todos independientes entre sí.

b. Calcula la probabilidad de los eventos $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cup C$, $A \cap B$, $B \cap C$ y $A \cap C$. (3 puntos)

c. ¿Los cálculos anteriores se pueden hacer sin suponer la independencia de los eventos? Explica. (2 puntos)

Comportamiento aleatorio

1. Lee la situación y responde.

Josefina escucha música y activa la función de reproducción aleatoria para no preocuparse de cambiarla. Ella está intrigada con saber la probabilidad de que suene una canción de rock, por lo que cada vez que comenzaba una canción anotaba en una hoja el género de esta, obteniendo los siguientes datos, en los que R: Rock, P: Pop, M: Metal y T: Tropical.

R	P	M	T	M	P	R	M	R	P	T	R	P	T	R
M	T	P	R	M	T	M	R	P	M	R	T	R	T	R

a. ¿Dónde está el componente aleatorio del experimento que realizó Josefina? (1 punto)

b. Representa los datos en una tabla de frecuencias. (1 punto)

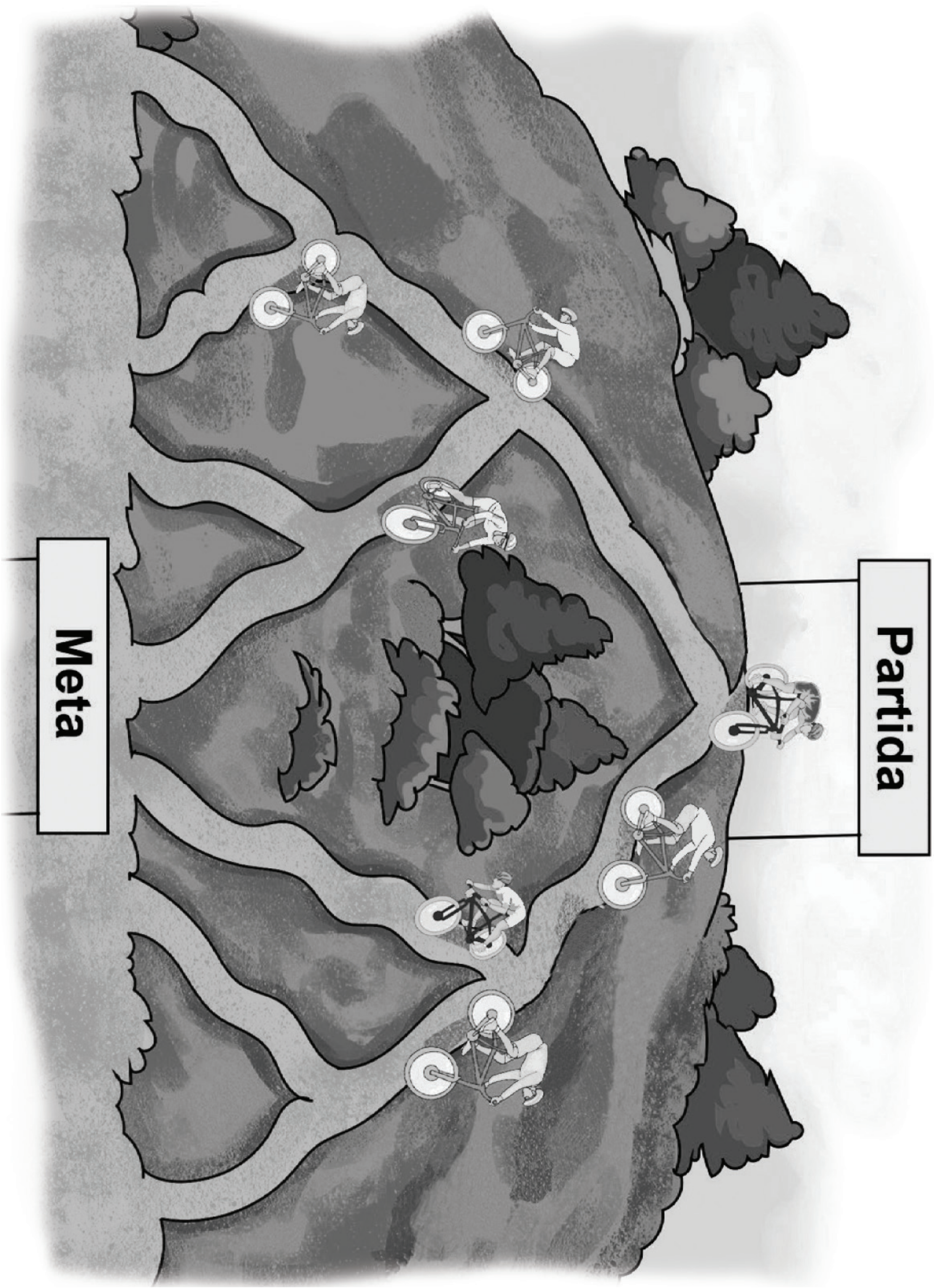
c. ¿Cuál es la respuesta a lo que se preguntó Josefina en términos de probabilidad empírica? (1 punto)

¿Qué aprendí? Evaluación final

8. Lee la información y responde.

De la cima de un cerro bajan 54 competidores de mountainbike, los cuales pueden seguir varios senderos según sus preferencias, pero no todos llegan a la meta, como se muestra en la imagen.

Se sabe que en cada bifurcación un tercio de los competidores decide ir a su izquierda y dos tercios deciden ir a su derecha.


Meta
Partida

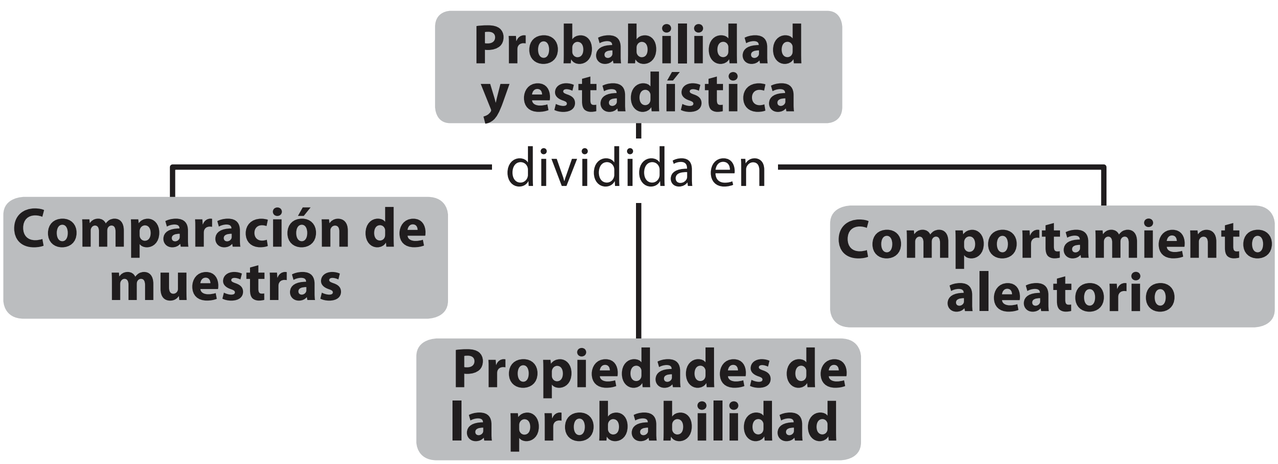
a. Anota en la representación la cantidad probable de competidores que habrá en cada uno de los diferentes caminos. (2 puntos)
b. ¿Cuántas personas probablemente llegarán a la meta? (1 punto)
c. ¿Cuál es la probabilidad de que un competidor llegue a la meta pasando por tres bifurcaciones? (2 puntos)
d. ¿Cuál es la probabilidad de que un competidor no llegue a la meta? (2 puntos)

Verifica tus respuestas en el solucionario junto a un compañero y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1 y 2	Registrar distribuciones de dos características distintas de una población en tablas de doble entrada o gráficos de dispersión. Comparar características de dos poblaciones.		**Logrado:** 23 puntos o más. **Medianamente logrado:** 19 a 22 puntos. **Por lograr:** 18 puntos o menos.
3, 4, 5 y 6	Aplicar las reglas de las probabilidades en la resolución de problemas.		
7 y 8	Comprender el concepto de azar usando frecuencias relativas o probabilidades.		
	Total		

Actividad de cierre

Resume lo que aprendiste en esta unidad. Para esto, confecciona un esquema con conceptos que consideres importantes y descripciones de cada uno. Si se relacionan los conceptos, únelos con líneas y escribe sobre ellas por qué se relacionan.



Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Usaste las estrategias que planteaste al comienzo de la unidad o de cada tema? ¿Te permitieron cumplir con las metas planteadas?

___

___

___

- ¿Fuiste crítico frente a la información que se presentaba? ¿Averiguaste cuando tuviste dudas? Explica.

___

___

___

- Cuando resolviste problemas, ¿justificaste tus pasos usando bases matemáticas o estadísticas? Describe la situación particular que más compleja fue de justificar.

____

____

____

- ¿Qué actitudes crees que debes mejorar y que te pueden servir en tu vida cotidiana?

____

____

____